MINISTERO DELL'ISTRUZIONE, DELL'UNIVERSITÀ E DELLA RICERCA

SCUOLE ITALIANE ALL'ESTERO

ESAMI DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione suppletiva 2005

Calendario australe

SECONDA PROVA SCRITTA

Tema di Matematica

PROBLEMA 1

Si consideri l'equazione $y = x^3 - ax + b$.

1. Si determinino a e b in modo che la sua curva rappresentativa Γ sia tangente, nel punto A di ascissa –1, alla retta r d'equazione y = 4. Si disegni Γ.
2. La retta r incontra Γ in un altro punto B. Si calcoli l'area della regione di piano delimitata dal segmento AB e da Γ.
3. Si determini l'equazione della retta s per l'origine degli assi che delimita con Γ e con l'asse y una regione finita di piano, nel secondo quadrante, di area 5/4.

PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita da $f(x) = \sin(x) + a\cos(x) + b$, con $x \in [-\pi, \pi]$

1. Calcolate a e b in modo che $x = \frac{\pi}{6}$ sia punto di massimo relativo e f(π/6)=0;
2. Tracciate il grafico λ della funzione così ottenuta e dite se essa ha un massimo assoluto e un minimo assoluto;
3. Calcolate l'area della regione finita di piano delimitata dalla tangente a λ nel suo punto di ascissa nulla, da λ e dalla retta $x = \frac{\pi}{2}$.

QUESTIONARIO

1. L'equazione $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ esprime il teorema del valore medio o di *Lagrange*. Determinare c quando $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, a=0 e b=1.
2. Un recipiente contiene *1000 litri* di liquido. Se è un prisma regolare a base triangolare, quali ne sono le dimensioni minime, espresse in *metri*?
3. Quale è il cono di volume massimo inscrivibile in una sfera assegnata?
4. La funzione $f(x)=10^{x+8}$ è *invertibile*? Perchè? Quale ne è la derivata? In genere, come si calcola la derivata della funzione inversa f^{-1}?
5. Dimostrare che la funzione $f(x)=\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ha infiniti punti di massimo e minimo relativo in $]0;1]$. In quali punti la funzione assume valore 1 e in quali –1?
6. Fra tutte le primitive di $f(x)=3\cos^3(x)$ trovare quella il cui grafico passa per il punto (0,5).
7. Spiegare perché l'equazione $3^x = -x^2 + 5x - 8$ non ammette soluzioni.
8. Perché tutte le tangenti alla curva d'equazione $y = x^3 + 3x - 4$ formano un angolo acuto con la direzione positiva dell'asse x ? Illustra le ragioni della tua risposta.

Durata della prova: 6 ore.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

PROBLEMA 1

Si consideri l'equazione $y = x^3 - ax + b$**.**

Punto 1

Si determinino a e b in modo che la sua curva rappresentativa Γ sia tangente, nel punto A di ascissa –1, alla retta r d'equazione y = 4. Si disegni Γ.

La tangente nel punto A di ascissa -1 ha equazione y = 4 di coefficiente angolare nullo. Tale coefficiente angolare è pari alla derivata prima della funzione valutata in $x = -1$ e cioè è pari a $m = \left(3x^2 - a\right)_{x=-1} = 3 - a$ ed imponendo che sia nullo si ricava $a = 3$.

Inoltre la curva passa per A(-1,4), per cui si ha $-1 + a + b = 4$ e poiché $a = 3$ si ha $b = 2$, La cubica è allora $y = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$.

Studiamo la funzione $y = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$

Dominio: R

Intersezioni asse x: $y = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) = 0 \Rightarrow x = 1, x = -2$

Intersezioni asse y: $x = 0 \Rightarrow y = 2$

Eventuali simmetrie: la curva non è ne pari ne dispari

Positività: $y = (x-1)^2(x+2) > 0 \Leftrightarrow x \in]-2,1[\cup]1,+\infty[$

Asintoti verticali: la funzione non presenta asintoti verticali

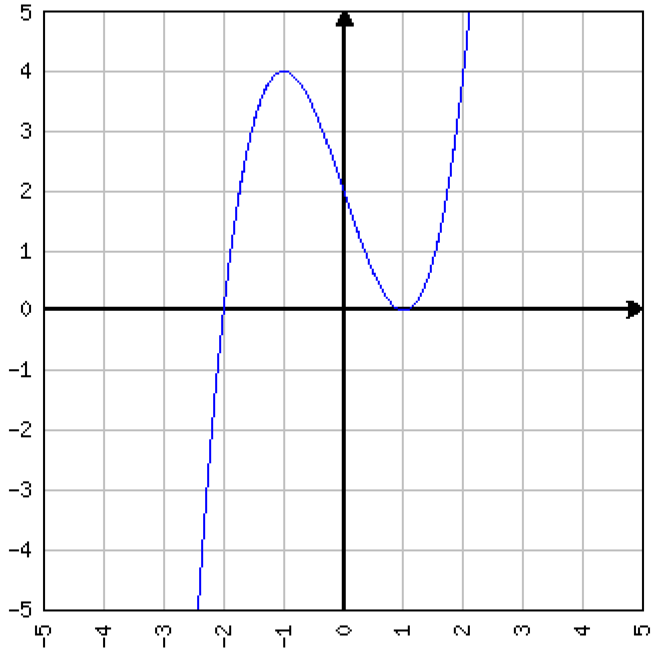
Asintoti orizzontali: per come è definita la funzione non presenta asintoti orizzontali in quanto $\lim_{x \to \pm\infty} x^3 - 3x + 2 = \pm\infty$

Asintoti obliqui: per come è definita la funzione non presenta asintoti obliqui

Crescenza e decrescenza: la derivata prima della funzione $y = x^3 - 3x + 2$ è $y' = 3\left(x^2 - 1\right)$ per cui la funzione è strettamente crescente in $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ e strettamente decrescente in $]-1,1[$.

Concavità e convessità: la derivata seconda della funzione $y = x^3 - 3x + 2$ è $y'' = 6x$ per cui la funzione è concava in $]0,+\infty[$ e convessa in $]-\infty,0[$ e si annulla in $x = 0$ in cui la curva presenta un flesso a tangente obliqua. Inoltre $y''(1) = 6 > 0, y''(-1) = -6 < 0$ per cui (-1,4) è un massimo relativo e (1,0) è un minimo relativo.

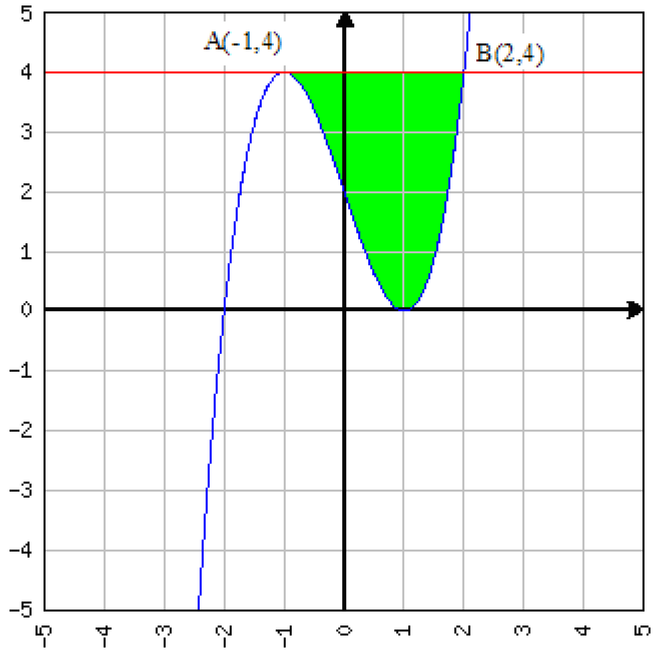
Il grafico della funzione è di seguito riportato:



Punto 2

La retta r incontra Γ in un altro punto B. Si calcoli l'area della regione di piano delimitata dal segmento AB e da Γ.

L'ulteriore intersezione di $y = x^3 - 3x + 2$ con $y = 4$ si calcola risolvendo l'equazione $x^3 - 3x + 2 = 4 \Rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0$. Un divisore di $x^3 - 3x - 2$ è certamente $(x+1)$, ed essendo in $x = -1$ la funzione tangente alla retta $y = 4$ possiamo dire che un divisore di $x^3 - 3x - 2$ è certamente $(x+1)^2$, per cui possiamo scomporre $x^3 - 3x - 2$ come $(x+1)^2(x-2)$ per cui l'ulteriore punto di intersezione è B(2,4).



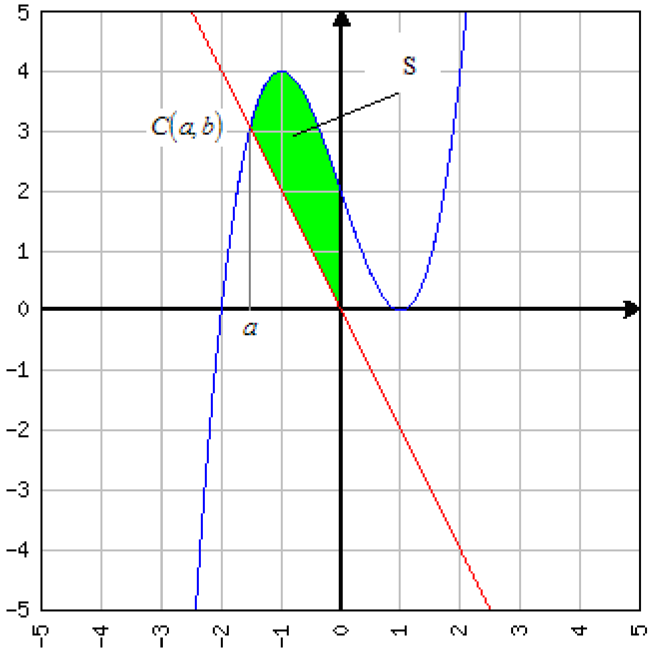
L'area da calcolare è rappresentata in verde e vale:

$$Area=\int_{-1}^{2}\left[4-\left(x^3-3x+2\right)\right]dx=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2}=\left(-4+6+4\right)-\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}-2\right)=6+\frac{3}{4}=\frac{27}{4}$$

Punto 3

Si determini l'equazione della retta s per l'origine degli assi che delimita con Γ e con l'asse y una regione finita di piano, nel secondo quadrante, di area 5/4.

La retta s ha equazione $y=mx$ con $m<0$. L' area da calcolare è rappresentata in verde nella figura seguente:



Indichiamo con $C(a,b)$ con $a<0$ il punto di intersezione della retta $y=mx$ con la curva $y=x^3-3x+2$.

L'area S è pari a $S=\int_{a}^{0}\left[\left(x^3-3x+2\right)-mx\right]dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{(m+3)x^2}{2}+2x\right]_{a}^{0}=-\frac{a^4}{4}+\frac{(m+3)a^2}{2}-2a$.

Ma il punto $C(a,b)$ appartiene sia alla retta che alla curva, per cui dobbiamo imporre l'uguaglianza $ma=a^3-3a+2$ da cui $m=a^2-3+\frac{2}{a}$. Sostituiamo tale condizione in S e otteniamo:

$S=-\frac{a^4}{4}+\frac{\left(a^2-3+\frac{2}{a}+3\right)a^2}{2}-2a=-\frac{a^4}{4}+\frac{\left(a^3+2\right)a}{2}-2a=\frac{a^4}{4}-a$. Imponendo che tale area sia pari a $\frac{5}{4}$ si ha l'equazione di quarto grado $\frac{a^4}{4}-a=\frac{5}{4}\Leftrightarrow a^4-4a-5=0$. Un divisore di

$\left(a^4 - 4a - 5\right)$ è $(a+1)$ in quanto sostituendo $a = -1$ in $a^4 - 4a - 5 = 0$ otteniamo l'identità 0=0. Applicando la regola di Ruffini, il polinomio si scompone in $a^4 - 4a - 5 = (a+1)\left(a^3 - a^2 + a - 5\right)$. Ricordando che per ipotesi cerchiamo un valore $a < 0$, il polinomio di terzo grado $\left(a^3 - a^2 + a - 5\right)$ è strettamente negativo, per cui non si annullerà mai. Questa osservazione ci consente di affermare che l'unico valore accettabile $a < 0$ ricavabile dall'equazione $a^4 - 4a - 5 = 0$ è $a = -1$ da cui ricaviamo $m = \left[a^2 - 3 + \frac{2}{a}\right]_{a=-1} = -4$ per cui la retta cercata $y = -4x$.

Alternativamente, possiamo pensare di calcolare le tre radici del polinomio $\left(a^3 - a^2 + a - 5\right)$, applicando o uno dei metodi numerici noti o il metodo di Cardano, e scoprire che $\left(a^3 - a^2 + a - 5\right)$ ha due radici complesse coniugate ed una radice reale positiva, tutte e tre non accettabili.

Applichiamo allora il metodo di Cardano all'equazione cubica $\left(a^3 - a^2 + a - 5\right) = 0$.

Ponendo $y = a - \frac{1}{3}$, l'equazione diventa $y^3 + py + q = 0$ con $\begin{cases} p = \frac{2}{3} \\ q = -\frac{128}{27} \end{cases}$.

Applicando il metodo di Cardano si ricava che le soluzioni di $y^3 + py + q = 0$ sono esprimibili nel seguente modo: $y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$. Il delta dell'equazione $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ nel nostro caso è $\Delta = \frac{\left(-\frac{128}{27}\right)^2}{4} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{27} = \frac{4108}{729} > 0$ e questo ci assicura che una sola delle soluzioni è reale mentre le altre due sono complesse e coniugate. L'unica radice reale di $y^3 + py + q = 0$ è $y_r = \sqrt[3]{\frac{64}{27} + \sqrt{\frac{4108}{729}}} + \sqrt[3]{\frac{64}{27} - \sqrt{\frac{4108}{729}}} \cong 1.53$ da cui $a = y + \frac{1}{3} \cong 1.86$ che essendo positiva va scartata come soluzione del nostro problema.

PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita da $f(x)=\sin(x)+a\cos(x)+b$**, con** $x\in[-\pi,\pi]$

Punto 1

Calcolate a e b in modo che $x=\frac{\pi}{6}$ **sia punto di massimo relativo e f(π/6)=0;**

La condizione f(π/6)=0 impone $\frac{1}{2}+a\frac{\sqrt{3}}{2}+b=0$; la derivata prima di $f(x)=\sin(x)+a\cos(x)+b$ è $f'(x)=\cos(x)-a\sin(x)$ e $x=\frac{\pi}{6}$ è l'ascissa del punto di massimo se f'(π/6)=0 e quindi se $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{a}{2}=0 \Leftrightarrow a=\sqrt{3}$. Da ciò segue $b=-a\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}=-2$. La curva è allora $f(x)=\sin(x)+\sqrt{3}\cos(x)-2$. Tale funzione può essere scritta anche come $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2$.

Punto 2

Tracciate il grafico λ della funzione così ottenuta e dite se essa ha un massimo assoluto e un minimo assoluto;

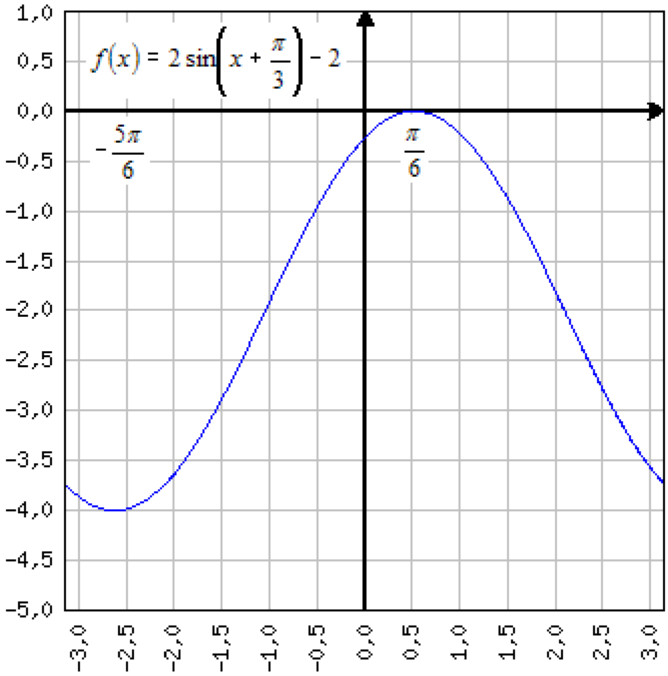
Il grafico di $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2$ lo ricaviamo per deduzione dal grafico della funzione elementare $\sin(x)$ attraverso i seguenti passi:

1. Si trasla rigidamente il grafico di $\sin(x)$ orizzontalmente verso sinistra di $\frac{\pi}{3}$ ottenendo il grafico di $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$;
2. Si ricava il grafico di $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ attraverso una dilatazione di fattore 2 raddoppiando tutte le ordinate del grafico di $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$;
3. Si trasla rigidamente il grafico di $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ di un tratto verticale pari a 2 verso le ordinate negative ottenendo il grafico di $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2$.

Si fa notare inoltre che:

1. La funzione $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2$ non è mai positiva in quanto $\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|\le 1$ e si annulla nei punti in cui $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1 \Rightarrow x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$
2. i massimi relativi ed assoluti (coincidenti in quanto la funzione trigonometrica seno è limitata in [-1,1]) di $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2$ si hanno quando $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1 \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ mentre i minimi relativi ed assoluti (coincidenti in quanto la funzione trigonometrica seno è limitata in [-1,1]) si hanno quando $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-1 \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi$, per cui in $[-\pi,\pi]$ la funzione presenterà un unico massimo relativo ed assoluto in $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$ ed un unico minimo relativo ed assoluto in $\left(-\frac{5\pi}{6},-4\right)$.

Il grafico in $[-\pi,\pi]$ è di seguito presentato:

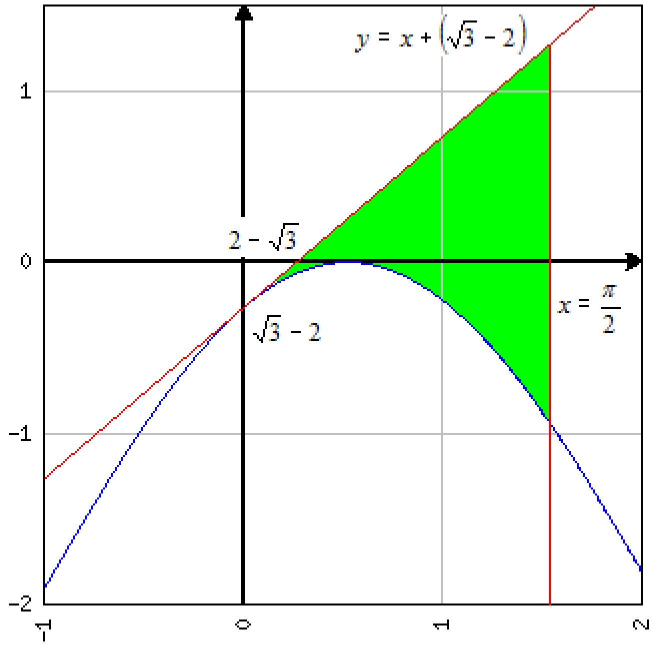


Punto 3

Calcolate l'area della regione finita di piano delimitata dalla tangente a λ nel suo punto di ascissa nulla, da λ e dalla retta $x=\frac{\pi}{2}$.

La retta tangente a λ nel suo punto di ascissa nulla $\left(0,\sqrt{3}-2\right)$ è la retta di equazione $y = x+\left(\sqrt{3}-2\right)$. La tangente $y = x+\left(\sqrt{3}-2\right)$ interseca l'asse delle ascisse in $\left(2-\sqrt{3},0\right)$.

L'area da calcolare è rappresentata in verde nella figura sottostante:



L'area da calcolare è:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(x+\sqrt{3}-2\right) - \left(2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2\right) \right] dx - = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[x+\sqrt{3}-2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \right] dx =$$

$$= \left[\frac{\left(x+\sqrt{3}\right)^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{\left(\pi+2\sqrt{3}\right)^2}{8} - \frac{3}{2} \right] + 2\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right] =$$

$$= \left[\frac{\left(\pi+2\sqrt{3}\right)^2}{8} - \frac{3}{2} \right] - \left(\sqrt{3}+1\right) = \frac{\left(\pi^2+4\pi\sqrt{3}\right)}{8} - \left(\sqrt{3}+1\right) = \frac{\left(\pi^2+4\pi\sqrt{3}-8-8\sqrt{3}\right)}{8}$$

QUESTIONARIO

Quesito 1

L'equazione $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ esprime il teorema del valore medio o di *Lagrange*. Determinare c quando $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, a=0 e b=1.

La derivata prima di $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ è $f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, per cui applicando la formula $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ e considerando che $f(0)=0, f(1)=1$, si ha $\frac{2}{3\sqrt[3]{c}}=1$ da cui $\sqrt[3]{c}=\frac{2}{3}\Rightarrow c=\frac{8}{27}$.

Quesito 2

Un recipiente contiene *1000 litri* di liquido. Se è un prisma regolare a base triangolare, quali ne sono le dimensioni minime, espresse in *metri*?

Un prisma regolare a base triangolare è un prisma che ha come base un triangolo equilatero di lato $L>0$ e la cui area di base è $A_{Base}=\frac{L^2\sqrt{3}}{4}$. Il volume del prisma per ipotesi è 1000 litri e ricordando che $1\,\text{litro}\cong 1\text{dm}^3=(10^{-3})\text{m}^3$ si ha che esso è pari a $V=1[\text{m}^3]$.

Il volume del prisma regolare a base triangolare è $V=A_{Base}\cdot h$ per cui $h=\frac{V}{A_{Base}}$. L'area totale è pari alla somma della superficie laterale e del doppio dell'area di base. La superficie laterale è il prodotto del perimetro di base $(3L)$ moltiplicato per l'altezza $h=\frac{V}{A_{Base}}$, per cui $S_T=2A_{Base}+S_l=\frac{L^2\sqrt{3}}{2}+3L\cdot h=\frac{L^2\sqrt{3}}{2}+3L\cdot\frac{V}{\frac{L^2\sqrt{3}}{4}}=\frac{L^2\sqrt{3}}{2}+\frac{4\sqrt{3}}{L}$. La minimizzazione della superficie totale la effettuiamo tramite calcolo delle derivate:

$$S'_T=L\sqrt{3}-\frac{4\sqrt{3}}{L^2}=\sqrt{3}\left(\frac{L^3-4}{L^2}\right)$$

$$S''_T=\sqrt{3}\left(\frac{L^3+8}{L^3}\right)$$

Si ha:

$$S'_T=\sqrt{3}\left(\frac{L^3-4}{L^2}\right)>0 \Rightarrow L>\sqrt[3]{4} \Rightarrow S_T \text{ strettamente crescente in } \left(\sqrt[3]{4},+\infty\right)$$

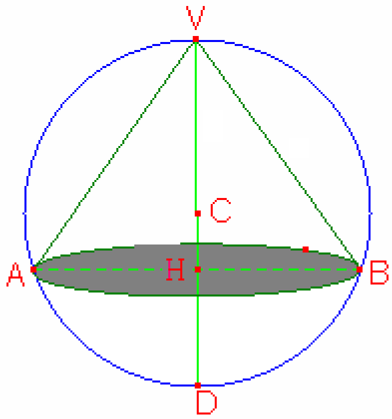
$$S'_T=\sqrt{3}\left(\frac{L^3-4}{L^2}\right)<0 \Rightarrow 0<L<\sqrt[3]{4} \Rightarrow S_T \text{ strettamente decrescente in } \left(0,\sqrt[3]{4}\right)$$

Inoltre $S''_T\left(\sqrt[3]{4}\right)=\left[\sqrt{3}\left(\frac{L^3+8}{L^3}\right)\right]_{L=\sqrt[3]{4}}=3\sqrt{3}>0$, per cui il lato di base L che minimizza la superficie totale è $L=\sqrt[3]{4}\,[\text{m}]$ ed in corrispondenza l'altezza vale $h=\left[\frac{4\sqrt{3}}{3L^2}\right]_{L=\sqrt[3]{4}}=\frac{2}{3}\sqrt[6]{\frac{27}{4}}\;[\text{m}]$

Quesito 3

Quale è il cono di volume massimo inscrivibile in una sfera assegnata?

Consideriamo la figura sottostante:



Consideriamo una sfera di raggio R e poniamo $\overline{VH}=x$, con $0<x<2R$. Con queste assunzioni $\overline{HD}=2R-x$ e poiché il triangolo VDB è rettangolo in quanto inscritto in una semicirconferenza, per il teorema di Euclide $\overline{HB}^2=\overline{VH}\cdot\overline{HD}=x\cdot(2R-x)$. Il volume del cono è $V(x)=\frac{1}{3}\left(\pi\cdot\overline{HB}^2\right)\cdot\overline{VH}=\frac{\pi}{3}\cdot\left[x^2\cdot(2R-x)\right]$ con $0<x<2R$. La massimizzazione del volume la effettuiamo attraverso le derivate:

$$V'(x)=\frac{\pi}{3}\cdot\left[4Rx-3x^2\right]$$

$$V''(x)=\frac{\pi}{3}\cdot\left[4R-6x\right]$$

Si ha:

$$V'(x)=\frac{\pi}{3}\cdot\left[4Rx-3x^2\right]>0 \Rightarrow 0<x<\frac{4R}{3} \Rightarrow V(x) \text{ strettamente crescente in } \left(0,\frac{4R}{3}\right)$$

$$V'(x)=\frac{\pi}{3}\cdot\left[4Rx-3x^2\right]<0 \Rightarrow \frac{4R}{3}<x<2R \Rightarrow S_T \text{ strettamente decrescente in } \left(\frac{4R}{3},2R\right)$$

Inoltre $V''(x)=\frac{\pi}{3}\cdot[4R-6x]_{x=\frac{4R}{3}}=-\frac{4\pi R}{3}<0$, per cui il volume è massimo per $x=\frac{4R}{3}$ e vale $V\left(\frac{4R}{3}\right)=\frac{\pi}{3}\cdot\left[\left(\frac{4R}{3}\right)^2\cdot\left(2R-\frac{4R}{3}\right)\right]=\frac{32\pi R^3}{81}$.

Quesito 4

La funzione $f(x)=10^{x+8}$ è *invertibile*? Perchè? Quale ne è la derivata? In genere, come si calcola la derivata della funzione inversa f^{-1}?

La funzione $f(x)=10^{x+8}$ è invertibile in quanto strettamente crescente in tutto R. Riscrivendo la funzione $f(x)=10^{x+8}$ come $f(x)=e^{\ln\left(10^{x+8}\right)}=e^{(x+8)\ln 10}$ si ricava che la sua derivata è $f'(x)=e^{(x+8)\ln 10}\cdot\ln 10=\ln 10\cdot 10^{x+8}$ che risulta essere strettamente positiva in tutto R.

In generale detta $g(y)$ l'inversa di $f(x)$, la derivata di g, per un noto teorema che recita "*La derivata di una funzione inversa è uguale al reciproco della derivata della funzione diretta (purché quest'ultima derivata non sia nulla)*" è $g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$. Si fa notare che le due derivate che compaiono nella formula si intendono calcolate in due punti che si corrispondono.

Come esempio, calcoliamo la derivata della funzione inversa di $f(x)=10^{x+8}$ in 10^8. L'inversa di $f(x)=10^{x+8}$ è $g(y)=Log(y)-8$ e a $y=10^8$ corrisponde $x=0$ per cui $g'\left(10^8\right)=\frac{1}{f'(0)}=\left[\frac{1}{\ln 10\cdot 10^{x+8}}\right]_{x=0}=\frac{1}{\ln 10\cdot 10^8}$. Controlliamo se il valore calcolato è corretto. La derivata di $g(y)=Log(y)-8$ è $g'(y)=\frac{1}{\ln 10\cdot y}$ e $g'\left(10^8\right)=\frac{1}{\ln 10\cdot 10^8}$ come già trovato.

Quesito 5

Dimostrare che la funzione $f(x)=\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ha infiniti punti di massimo e minimo relativo in $]0;1]$. In quali punti la funzione assume valore 1 e in quali –1?

I punti di massimo e minimo relativo di $f(x)=\cos\left(\frac{1}{x}\right)$, definita in $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, sono i punti in cui, rispettivamente, si ha $f(x)=\cos\left(\frac{1}{x}\right)=1$ e $f(x)=\cos\left(\frac{1}{x}\right)=-1$. Calcoliamoli:

1. Massimi relativi: $f(x)=\cos\left(\frac{1}{x}\right)=1\Leftrightarrow\frac{1}{x}=2k\pi\Rightarrow x=\frac{1}{2k\pi}$ con $k\in Z_0\equiv Z/\{0\}$
2. Minimi relativi: $f(x)=\cos\left(\frac{1}{x}\right)=-1\Leftrightarrow\frac{1}{x}=(2k+1)\pi\Rightarrow x=\frac{1}{(2k+1)\pi}$ con $k\in Z$

Consideriamo ora i massimi e minimi nell'intervallo $]0;1]$. Essendo $\frac{1}{\pi}<1$, per ogni $k\in Z_+$ $(k \text{ intero positivo})$ o per $k=0$ nel caso di minimo relativo l'ascissa del minimo o massimo relativo cadrà in $]0;1]$, ragion per cui sono infiniti i massimi e minimi relativi di $f(x)=\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ in quanto infiniti sono gli interi positivi. I punti in cui la funzione assume valore 1 e in quali –1 sono esattamente i punti di massimo e minimo relativi in quanto la funzione è una funzione coseno limitata in [-1,1].

Quesito 6

Fra tutte le primitive di $f(x)=3\cos^3(x)$ trovare quella il cui grafico passa per il punto (0, 5).

La funzione $f(x)=3\cos^3(x)$ può essere espressa equivalentemente in questo modo: $f(x)=3\cos^3(x)=3\cos(x)\cdot\left(1-\sin^2(x)\right)=3\cos(x)-3\cos(x)\cdot\sin^2(x)$.

Una primitiva di $f(x)=3\cos^3(x)$ è

$$\int\left[3\cos(x)-3\cos(x)\cdot\sin^2(x)\right]dx=\int 3\cos(x)dx-3\int\cos(x)\cdot\sin^2(x)dx=3\sin(x)-\sin^3(x)+C$$

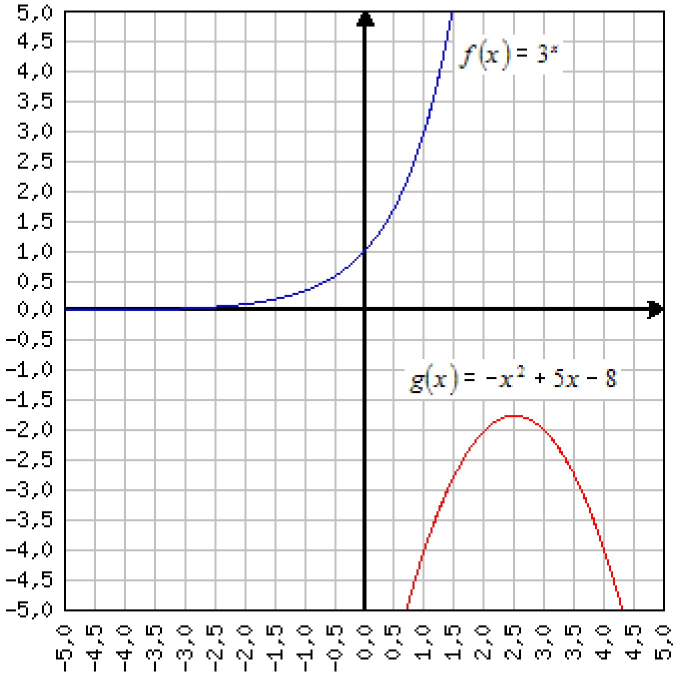
La primitiva passante per il punto (0, 5) deve soddisfare alla condizione di appartenenza del punto (0, 5) e la si trova in corrispondenza di C=5.

In definitiva la primitiva di $f(x)=3\cos^3(x)$ passante per il punto (0,5) è $f(x)=3\sin(x)-\sin^3(x)+5$.

Quesito 7

Spiegare perché l'equazione $3^x = - x^2 + 5 x – 8$ non ammette soluzioni.

La funzione $f(x)=3^x$ è strettamente positiva e crescente in tutto R e il suo grafico si trova interamente nel primo e secondo quadrante di un sistema di riferimento cartesiano, mentre la curva $g(x)=-x^2+5x-8$ è una parabola con concavità verso il basso, che ha vertice in $\left(\frac{5}{2},-\frac{7}{4}\right)$ e che non interseca mai l'asse delle ascisse per cui si trova interamente nel terzo e quarto quadrante di un sistema di riferimento cartesiano. Da queste due osservazioni ricaviamo che le due curve non potranno mai intersecarsi, ragion per cui l'equazione $3^x = - x^2 + 5 x – 8$ non ammette soluzioni in R. La figura sottostante in cui vengono rappresentate entrambe le curve conferma quanto detto:



Quesito 8

Perché tutte le tangenti alla curva d'equazione y = x³ + 3x – 4 formano un angolo acuto con la direzione positiva dell'asse x ? Illustra le ragioni della tua risposta.

Detto (x_0, y_0) un punto della cubica d'equazione $y = x^3 + 3x - 4$, la tangente per (x_0, y_0) alla curva $y = x^3 + 3x - 4$ ha equazione $y = m(x - x_0) + y_0$ con $m = y'(x_0) = 3(x_0^2 + 1)$. Il coefficiente angolare della tangente essendo espresso come $m = y'(x_0) = 3(x_0^2 + 1)$, è sempre positivo, per cui l'inclinazione in gradi della generica tangente con la direzione positiva dell'asse x è $0° < [\arctan(m)]° < 90°$.