

LICEO GINNASIO “L. SARU “
BRATISLAVA
SEZIONE BILINGUE ITALO – SLOVACCA
PROVA SCRITTA DI MATEMATICA
ESAME DI STATO 2004 / 2005

PROBLEMA 1

E' data l'equazione $y = -ax^2 + bx + c$ dove i coefficienti a, b, c sono numeri reali non negativi.

Determinare tali coefficienti sapendo che la parabola p , che rappresenta l'equazione in un piano cartesiano ortogonale (Oxy), interseca l'asse x nei punti O, A ed ha il vertice nel punto V in modo che

a. il triangolo OAV sia rettangolo

b. il segmento parabolico individuato dalla corda OA genera un solido di volume $\frac{128}{15}\pi$ quando ruota di un giro completo attorno all'asse x .

Considerata poi la circonferenza tangente in A alla retta AV e passante per O , calcolare le aree delle due regioni finite di piano in cui essa divide il segmento parabolico suddetto.

PROBLEMA 2

Data la curva $y = \frac{4x^2 + 1}{3x}$, se ne rappresenti il grafico.

Preso un punto P sull'arco di curva del primo quadrante, si conducano per esso le parallele agli asintoti che incontrano gli stessi nei punti A e B rispettivamente.

Determinare la posizione del punto P per cui è minima la somma dei segmenti PA e PB .

PROBLEMA 3

Data una circonferenza γ di raggio unitario e centro O , tracciare una semiretta s uscente da O ed intersecante γ in un punto Q . Indicato con P un generico punto di s esterno alla circonferenza, tracciare da esso le due tangenti alla circonferenza: siano A e B i punti di tangenza. Indicata con x la lunghezza del segmento PQ , trovare il limite per x tendente all'infinito del rapporto $k = \frac{\overline{AQ} + \overline{QB}}{\overline{AB}}$.

Studiare quindi la funzione $y = f(x)$ dove $f(x) = k^2$ e calcolare la superficie della regione di piano delimitata dalla curva e dagli assi cartesiani.

PROBLEMA 1

E' data l'equazione $y = -ax^2 + bx + c$ dove i coefficienti a, b, c sono numeri reali non negativi.

Punto 1

Determinare tali coefficienti sapendo che la parabola p , che rappresenta l'equazione in un piano cartesiano ortogonale (Oxy), interseca l'asse x nei punti O, A ed ha il vertice nel punto V in modo che

a . il triangolo OAV sia rettangolo

b . il segmento parabolico individuato dalla corda OA genera un solido di volume $\frac{128}{15}\pi$ quando ruota di un giro completo attorno all'asse x .

Il passaggio della parabola per $O = (0,0)$ impone la condizione $c = 0$, per cui la parabola interseca

l'asse delle ascisse in $O = (0,0), A = \left(\frac{b}{a}, 0\right)$. La parabola ha vertice in $V = \left(\frac{b}{2a}, \frac{b^2}{4a}\right)$.

Le misure dei lati del triangolo OAV sono:

$$\overline{OA} = \frac{b}{a}$$

$$\overline{OV} = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} + \frac{b^4}{16a^2}} = \frac{b}{4a} \sqrt{b^2 + 4}$$

$$\overline{AV} = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} + \frac{b^4}{16a^2}} = \frac{b}{4a} \sqrt{b^2 + 4}$$

Il triangolo OAV è rettangolo se $\overline{OA}^2 = \overline{OV}^2 + \overline{AV}^2$ e quindi se

$$2\left(\frac{b}{4a} \sqrt{b^2 + 4}\right)^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \Rightarrow b^2 + 4 = 8 \Rightarrow b = \pm 2, \text{ e poichè per ipotesi i coefficienti della parabola}$$

sono non negativi si ha $b = 2$.

Il volume del segmento parabolico individuato dalla corda OA è:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{b}{a}} (-ax^2 + bx)^2 dx \Rightarrow V = \pi \int_0^{\frac{2}{a}} (-ax^2 + 2x)^2 dx = \\ &= \pi \int_0^{\frac{2}{a}} (a^2x^4 + 4x^2 - 4ax^3) dx = \pi \left[\frac{a^2x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} - ax^4 \right]_0^{\frac{2}{a}} = \pi \left(\frac{32}{5a^3} + \frac{32}{3a^3} - \frac{16}{a^3} \right) = \frac{16\pi}{15a^3} \end{aligned}$$

$$\text{Imponendo } V = \frac{128}{15}\pi \text{ si ricava } a^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

La parabola ha equazione allora $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ e i punti di intersezioni con l'asse delle ascisse sono $O = (0,0)$, $A = (4,0)$ ed il vertice è $V = (2,2)$.

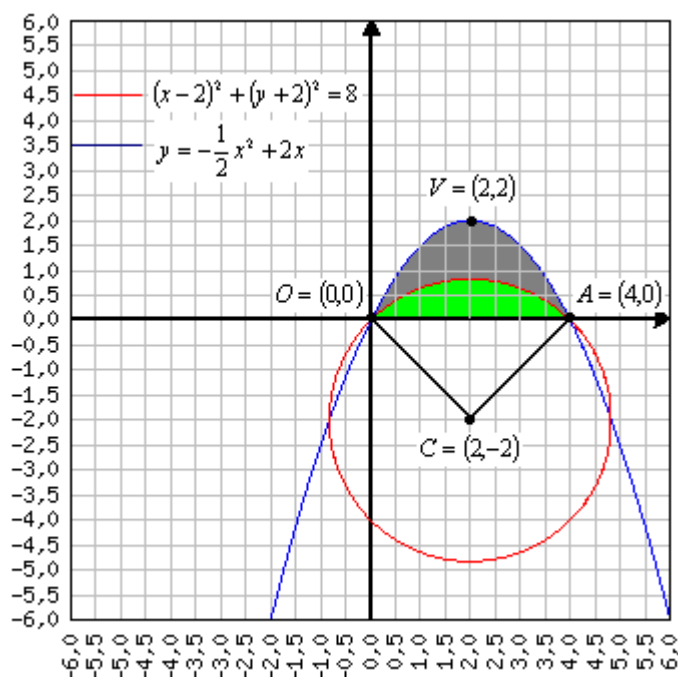
Punto 2

Considerata poi la circonferenza tangente in A alla retta AV e passante per O, calcolare le aree delle due regioni finite di piano in cui essa divide il segmento parabolico suddetto.

L'equazione generica della circonferenza è $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Il passaggio per $O = (0,0)$ impone $c = 0$; il passaggio per $A = (4,0)$ impone, invece, $4a + c + 16 = 0$ e poichè $c = 0$ si ricava $a = -4$. La retta AV ha equazione $y = 4 - x$: imponiamo che sia tangente alla circonferenza. Bisogna risolvere il seguente sistema e imporre che il delta sia nullo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + by = 0 \\ y = 4 - x \end{cases} \Rightarrow x^2 + (4 - x)^2 - 4x + b(4 - x) = 2x^2 - x(b + 12) + (4b + 16) = 0$$

Imponendo $\Delta = 0$ si ha $(b + 12)^2 - 8(4b + 16) = b^2 - 8b + 16 = (b - 4)^2 = 0 \Rightarrow b = 4$. L'equazione della circonferenza diventa $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 8$ cioè si tratta di una circonferenza di centro $C = (2, -2)$ e raggio $R = 2\sqrt{2}$.



Le aree da calcolare sono raffigurate in verde e grigio.

L'area in verde è data dall'area del settore circolare \widehat{COA} cui va sottratta l'area del triangolo COA.

L'angolo di apertura del settore circolare \widehat{COA} è $\alpha = \frac{\pi}{2}$; l'area in verde è allora

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \overline{CO}^2 \cdot \alpha - \frac{1}{2} \cdot \overline{CO}^2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{CO}^2 \cdot (\alpha - 1) = 4 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = (2\pi - 4).$$

L'area del segmento parabolico \widehat{OVA} è $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo circoscritto a norma del teorema

di Archimede: per cui $S_{\widehat{OVA}} = \frac{2}{3} \cdot (4 \cdot 2) = \frac{16}{3}$ per cui l'area in grigio è

$$S_2 = S_{\widehat{OVA}} - S_1 = \frac{16}{3} - (2\pi - 4) = \left(\frac{28}{3} - 2\pi \right).$$

Alternativamente si può procedere analiticamente attraverso il calcolo integrale.

La regione di piano in verde analiticamente è rappresentata dalla funzione $y = -2 + \sqrt{1 + 4x - x^2}$.

L'area in verde è allora

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^4 \left(-2 + \sqrt{1 + 4x - x^2} \right) dx = -8 + \int_0^4 \sqrt{1 + 4x - x^2} dx = \\ &= -8 + \int_0^4 \sqrt{8 - (x-2)^2} dx = -8 + 2\sqrt{2} \int_0^4 \sqrt{1 - \left(\frac{x-2}{2\sqrt{2}} \right)^2} dx \xrightarrow{\left(\frac{x-2}{2\sqrt{2}} \right) = t} \\ S_1 &= -8 + 2\sqrt{2} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1-t^2} \cdot 2\sqrt{2} dt = -8 + 8 \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1-t^2} dt = -8 + 16 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1-t^2} dt \xrightarrow{\int \sqrt{1-t^2} dt = \frac{1}{2} \left[\arcsin t + t\sqrt{1-t^2} \right]} \\ S_1 &= -8 + 8 \left[\arcsin t + t\sqrt{1-t^2} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -8 + 8 \left[\left(\frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} \right] = (2\pi - 4) \end{aligned}$$

come già trovato precedentemente.

L'area del settore parabolico, se non utilizziamo il risultato del teorema di Archimede, è:

$$S_{\widehat{OVA}} = \int_0^4 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x \right) dx = \left[-\frac{x^3}{6} + x^2 \right]_0^4 = -\frac{32}{3} + 16 = \frac{16}{3} \text{ come già trovato precedentemente}$$

PROBLEMA 2*Punto 1*

Data la curva $y = \frac{4x^2 + 1}{3x}$, **se ne rappresenti il grafico.**

Possiamo scrivere la curva come $y = \frac{4x}{3} + \frac{1}{3x}$ e dalla forma analitica deduciamo che si tratta di una iperbole di asintoto verticale $x = 0$ ed asintoto obliquo di equazione $y = \frac{4x}{3}$. Studiamo per intero la curva e troviamo i risultati suddetti attraverso lo studio analitico puntuale della curva stessa.

✚ *Dominio:* $R/\{0\}$;

✚ *Intersezione asse delle ascisse:* non ce ne sono;

✚ *Intersezioni asse delle ordinate:* non ce ne sono;

✚ *Eventuali simmetrie:* è una funzione dispari, infatti

$$f(-x) = \frac{4(-x)^2 + 1}{3(-x)} = -\frac{4x^2 + 1}{3x} = -f(x);$$

✚ *Positività:* $y = \frac{4x^2 + 1}{3x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$;

✚ *Asintoti verticali:* $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{4x^2 + 1}{3x} = \pm\infty$ per cui $x = 0$ è asintoto verticale destro e sinistro;

✚ *Asintoti orizzontali:* $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^2 + 1}{3x} = \pm\infty$ per cui non ci sono asintoti orizzontali;

✚ *Asintoti obliqui:*

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^2 + 1}{3x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^2 + 1}{3x^2} = \frac{4}{3}, q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{4x^2 + 1}{3x} - \frac{4}{3}x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{3x} \right) = 0; \text{ per cui la}$$

retta $y = \frac{4x}{3}$ è asintoto obliquo destro e sinistro;

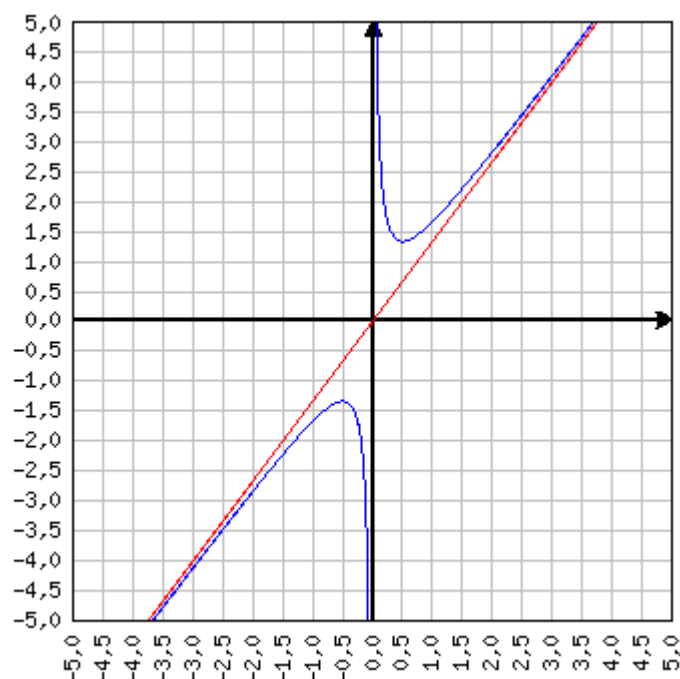
✚ *Crescenza e decrescenza:* la derivata prima è $y' = \frac{4x^2 - 1}{3x^2} > 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

per cui la funzione è strettamente crescente in $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ e strettamente

decrescente in $\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$; la derivata seconda è $y''(x) = \frac{8}{3x^3} > 0 \Rightarrow x > 0$ per cui

in $(0, +\infty)$ la funzione ha concavità verso l'alto inoltre $y'''\left(\pm\frac{1}{2}\right) = \pm\frac{64}{3}$ per cui $\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right)$ è

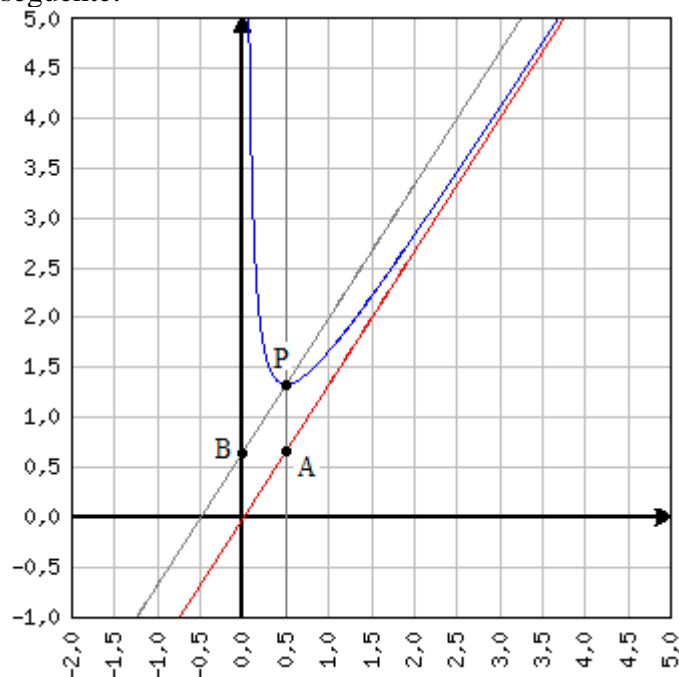
un minimo relativo e $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}\right)$ un massimo relativo. Il grafico è sotto presentato:



Punto 2

Preso un punto P sull'arco di curva del primo quadrante, si conducano per esso le parallele agli asintoti che incontrano gli stessi nei punti A e B rispettivamente. Determinare la posizione del punto P per cui è minima la somma dei segmenti PA e PB.

Consideriamo la figura seguente:



Il generico punto P dell'arco del primo quadrante dell'iperbole ha coordinate $P = \left(t, \frac{4t^2 + 1}{3t}\right)$ con $t > 0$. La retta passante per P e parallela all'asintoto verticale di equazione $x = 0$ ha equazione $x = t$ ed interseca l'asintoto obliquo in $A = \left(t, \frac{4t}{3}\right)$. La retta passante per P e parallela all'asintoto di equazione $y = \frac{4x}{3}$ ha equazione $y = \frac{4}{3}(x - t) + \frac{4t^2 + 1}{3t} = \frac{4x}{3} + \left(\frac{4t^2 + 1}{3t} - \frac{4t}{3}\right) = \frac{4x}{3} + \frac{1}{3t}$ ed interseca la retta di equazione $x = 0$ (asse delle ordinate) in $B = \left(0, \frac{1}{3t}\right)$. Con queste assunzioni i segmenti PA e PB misurano:

$$\overline{PA} = \left| \frac{4t^2 + 1}{3t} - \frac{4t}{3} \right| = \frac{1}{3t}$$

$$\overline{PB} = \sqrt{t^2 + \left(\frac{4t^2 + 1}{3t} - \frac{1}{3t}\right)^2} = \sqrt{t^2 + \frac{16t^2}{9}} = \frac{5t}{3}$$

La somma dei due segmenti è $f(t) = \frac{1}{3t} + \frac{5t}{3}$ con $t > 0$. La minimizzazione della funzione

$f(t) = \frac{1}{3t} + \frac{5t}{3}$ la effettuiamo tramite derivazione:

$$f'(t) = \frac{5t^2 - 1}{3t^2}$$

$$f'(t) = \frac{5t^2 - 1}{3t^2} > 0 \Rightarrow t > \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow f'(t) \text{ strettamente crescente in } \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, +\infty\right)$$

$$f'(t) = \frac{5t^2 - 1}{3t^2} < 0 \Rightarrow 0 < t < \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow f'(t) \text{ strettamente decrescente in } \left(0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$f'(t) = \frac{5t^2 - 1}{3t^2} = 0 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$f''(t) = \frac{2}{3t^3}, f''\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) > 0$$

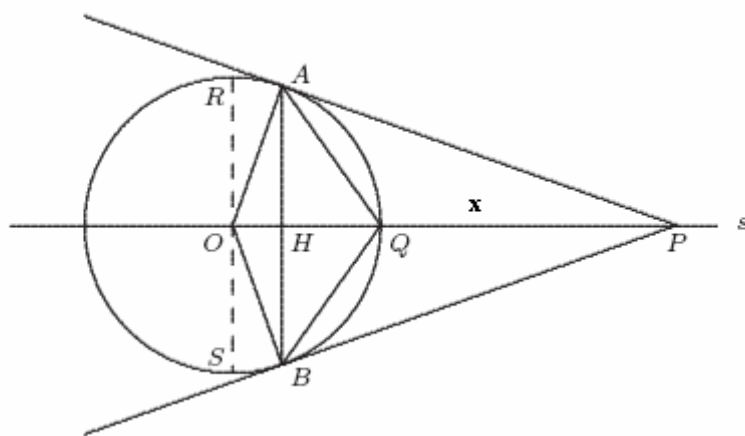
Dalle considerazioni sopra effettuate deduciamo che la funzione $f(t) = \frac{1}{3t} + \frac{5t}{3}$ assume valore

minimo per $t = \frac{\sqrt{5}}{5}$ e il minimo vale $f\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \left[\frac{1}{3t} + \frac{5t}{3}\right]_{t=\frac{\sqrt{5}}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

PROBLEMA 3*Punto 1*

Data una circonferenza γ di raggio unitario e centro O , tracciare una semiretta s uscente da O ed intersecante γ in un punto Q . Indicato con P un generico punto di s esterno alla circonferenza, tracciare da esso le due tangenti alla circonferenza: siano A e B i punti di tangenza. Indicata con x la lunghezza del segmento PQ , trovare il limite per x tendente all'infinito del rapporto $k = \frac{\overline{AQ} + \overline{QB}}{\overline{AB}}$.

Si consideri la figura sottostante:



Ponendo $\overline{PQ} = x$ si ha $\overline{PO} = \overline{PQ} + \overline{QO} = x + 1$.

Per il teorema di Pitagora $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 = \overline{PO}^2 - \overline{AO}^2 = (x+1)^2 - 1 = x \cdot (x+2)$. Poniamo ora

$\hat{POA} = \hat{POB} = \alpha$; di conseguenza $\hat{APO} = \hat{BPO} = \frac{\pi}{2} - \alpha$. I segmenti AB ed AQ per il teorema di

Carnot misurano rispettivamente $\overline{AB} = \sqrt{2\overline{AO}^2(1 - \cos 2\alpha)} = \sqrt{4\overline{AO}^2 \sin^2 \alpha} = 2\overline{AO} \sin(\alpha) = 2 \sin(\alpha)$

e $\overline{AQ} = \overline{QB} = \sqrt{2\overline{AO}^2(1 - \cos \alpha)} = \sqrt{4\overline{AO}^2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = 2\overline{AO} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

In questo modo il rapporto $k = \frac{\overline{AQ} + \overline{QB}}{\overline{AB}}$ vale $k = \frac{4 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2 \sin(\alpha)} = \frac{4 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$.

Per il teorema dei seni

$\overline{AO} = \overline{PO} \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1 = \frac{1}{x+1} \Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$ per cui il

rapporto $k = \frac{\overline{AQ} + \overline{QB}}{\overline{AB}}$ vale $k = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$ e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} k = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2} \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} = \sqrt{2} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}}_{=1} = \sqrt{2}.$$

Alternativamente, senza introdurre la trigonometria, si può procedere nel modo seguente.

L'area del triangolo AOP è $S_{AOP} = \frac{\overline{AO} \cdot \overline{AP}}{2} = \frac{\overline{OP} \cdot \overline{AH}}{2} \Rightarrow \overline{AH} = \frac{\overline{AO} \cdot \overline{AP}}{\overline{OP}} = \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{1+x}$. Quindi

$$\overline{AB} = 2\overline{AH} = \frac{2\sqrt{x^2 + 2x}}{1+x}.$$

Ora

$$\overline{PH} = \sqrt{\overline{AP}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{x^2 + 2x - \frac{x^2 + 2x}{(1+x)^2}} = \sqrt{\frac{(x^2 + 2x)^2}{(1+x)^2}} = \frac{(x^2 + 2x)}{(1+x)}$$

per cui

$$\overline{HQ} = \overline{PH} - \overline{QP} = \frac{(x^2 + 2x)}{(1+x)} - x = \frac{x}{(1+x)}.$$

In questo modo

$$\overline{AQ} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{HQ}^2} = \sqrt{\frac{(x^2 + 2x)^2}{(1+x)^2} + \frac{x^2}{(1+x)^2}} = \sqrt{\frac{2x}{x+1}}.$$

In questo modo

$$k = \frac{\overline{AQ} + \overline{QB}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{2\sqrt{\frac{2x}{x+1}}}{2\sqrt{x^2 + 2x}}}{1+x} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}.$$

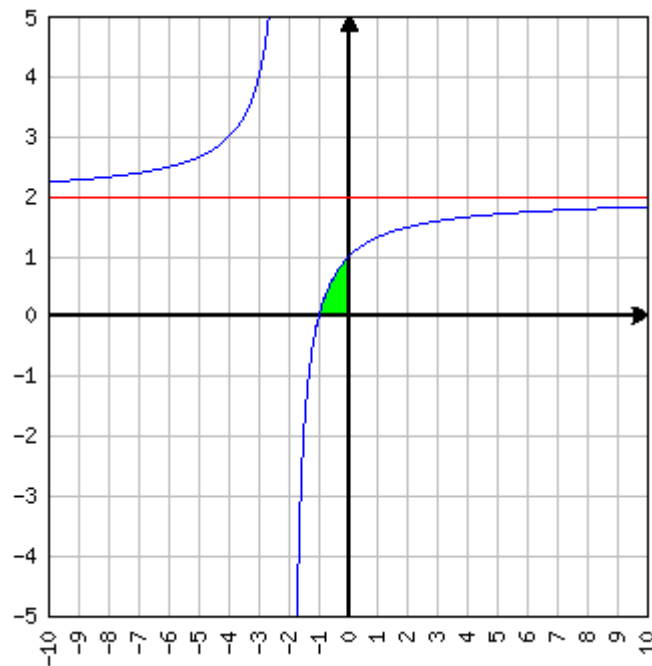
Punto 2

Studiare quindi la funzione $y = f(x)$ dove $f(x) = k^2$ e calcolare la superficie della regione di piano delimitata dalla curva e dagli assi cartesiani.

La curva $y = f(x)$ è $y = f(x) = k^2 = \frac{2(x+1)}{x+2}$. Si tratta della funzione omografica di asintoto

verticale $x = -2$, asintoto orizzontale $y = 2$. Tale funzione interseca l'asse delle ascisse in $(-1, 0)$ e quello delle ordinate in $(0, 1)$, è positiva in $(-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$ ed è sempre crescente.

La traccia non chiarisce se tener conto o meno dei limiti geometrici; nel nostro caso la limitazione è $x > 0$ per cui tenendone conto la funzione in oggetto diventa un arco di funzione omografica, quello per $x > 0$. Il grafico di seguito presentato non tiene conto dei limiti geometrici e l'area da calcolare è raffigurata in verde:



L'area da calcolare è calcolabile solo ed esclusivamente se si considera la funzione

omografica $y = f(x) = \frac{2(x+1)}{x+2}$ senza la limitazione geometrica imposta dal problema

$$\text{L'area vale } S = 2 \int_{-1}^0 \frac{x+1}{x+2} dx = 2 \int_{-1}^0 \left(1 - \frac{1}{x+2} \right) dx = 2 \left[x - \ln|x+2| \right]_{-1}^0 = 2[-\ln 2 - (-1)] = 2(1 - \ln 2).$$