Sessione straordinaria 2006 – Tema di Matematica

***Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.***

*PROBLEMA 1.*

È dato il triangolo ABC in cui:

$$\overline{AB} = \frac{25}{2}, \quad \overline{AC} = 5\sqrt{5}, \quad \operatorname{tg}\hat{A} = 2.$$

Determinare l'altezza del triangolo relativa al lato AB e tracciare la circonferenza k avente centro in C e tangente al lato AB.

Dopo aver riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali, in modo, però, che uno degli assi di riferimento sia parallelo alla retta AB:

a) scrivere l'equazione della circonferenza k;

b) trovare le coordinate dei vertici del triangolo e del punto D in cui la circonferenza k interseca il segmento BC;

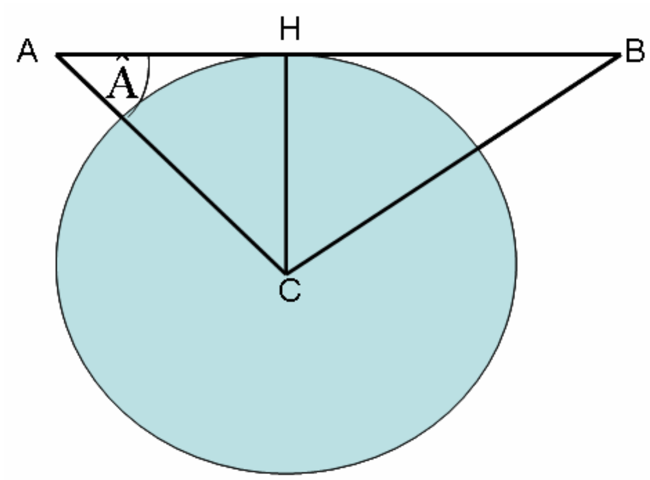
c) determinare l'equazione della parabola p, avente l'asse perpendicolare alla retta AB, tangente in D alla circonferenza k e passante per A;

d) calcolare le aree delle due regioni in cui la parabola p divide il triangolo ABC;

e) trovare, infine, le coordinate dei punti comuni alla circonferenza k ed alla parabola p.

***SOLUZIONE***

Consideriamo la figura seguente:




Applichiamo la teoria trigonometrica al triangolo rettangolo ACH:

$$CH = AH\,tg\left(\hat{A}\right) = 2AH$$

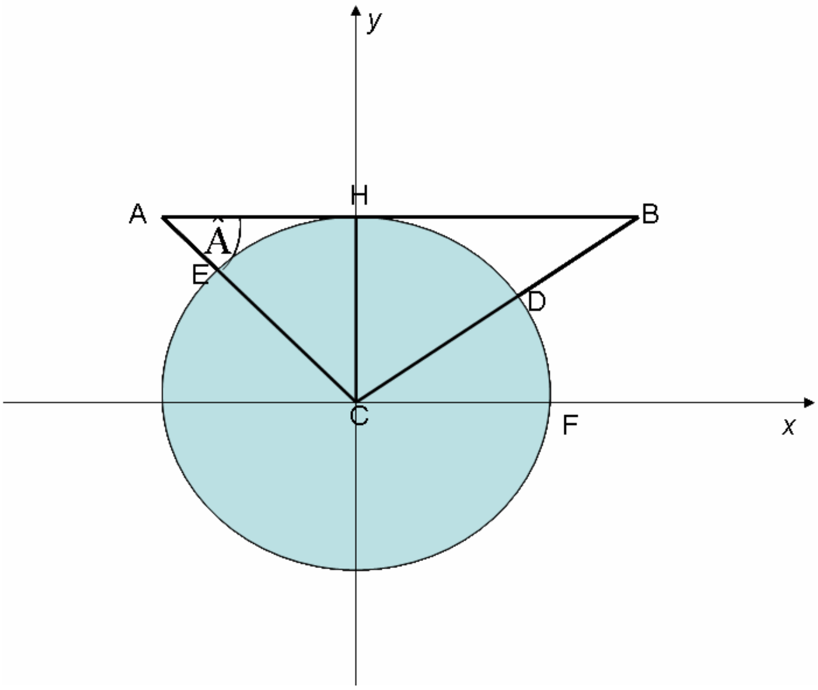
Ora essendo il triangolo ACH rettangolo per il teorema di Pitagora si ha:

$$AH^2 + CH^2 = AC^2 \rightarrow \frac{CH^2}{4} + CH^2 = 125 \rightarrow CH^2 = 100 \rightarrow CH = 10 \rightarrow AH = 5$$

***a)***

Il sistema di riferimento più immediato e conveniente consiste nel prendere C come origine, per cui la circonferenza con centro nell'origine C e raggio *CH=10* ha equazione

$$k: x^2 + y^2 = r^2 = 100$$




***b)***

Calcolo del punto D: lo ricaviamo dall'intersezione della retta CB con la circonferenza.

Calcoliamo la retta BC: essa passante per il centro (0,0) ha equazione

$$y = mx,$$
$$m = \frac{CH}{HB} = \frac{10}{\frac{25}{2} - 5} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$

Per cui D:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases} \rightarrow x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 100 \rightarrow \frac{25}{9}x^2 = 100 \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = \pm 6 \rightarrow y = \pm 8$$

Per cui si ha $D = (6,8)$

B ha coordinate $B=\left(|HB|,|CH|\right)=\left(\frac{15}{2},10\right)$

A ha coordinate $A=\left(-|AH|,|CH|\right)=(-5,10)$

***c)***

Equazione della parabola: $y=ax^2+bx+c$

Il passaggio per $A=(-5,10)$ impone: $25a-5b+c=10$

Il passaggio per $D=(6,8)$ impone: $36a+6b+c=8$

Il coefficiente angolare della tangente in $D=(6,8)$ alla parabola è :

$$m=y^I(x=6)=(2ax+b)_{x=6}=12a+b$$

Ma tale tangente è certamente perpendicolare alla retta BC, per cui il suo coefficiente angolare sarà $m=-\frac{1}{\frac{4}{3}}=-\frac{3}{4}$ per cui la condizione sulla tangenza impone $12a+b=-\frac{3}{4}$ .

Bisogna allora risolvere il sistema di tre equazioni in tre incognite seguente:

$$\begin{cases}25a-5b+c=10\\36a+6b+c=8\\12a+b=-\frac{3}{4}\end{cases}$$

Dalle prime due equazioni, sottraendo una dall’altra, eliminiamo la dipendenza da c ottenendo

$$11a+11b=-2$$

E ricavando il parametro b dalla terza equazione si ha:

$$11a+11\left(-12a-\frac{3}{4}\right)=-2\rightarrow 11a-132a-\frac{33}{4}=-2\rightarrow -121a=\frac{25}{4}\rightarrow a=-\frac{25}{484}$$

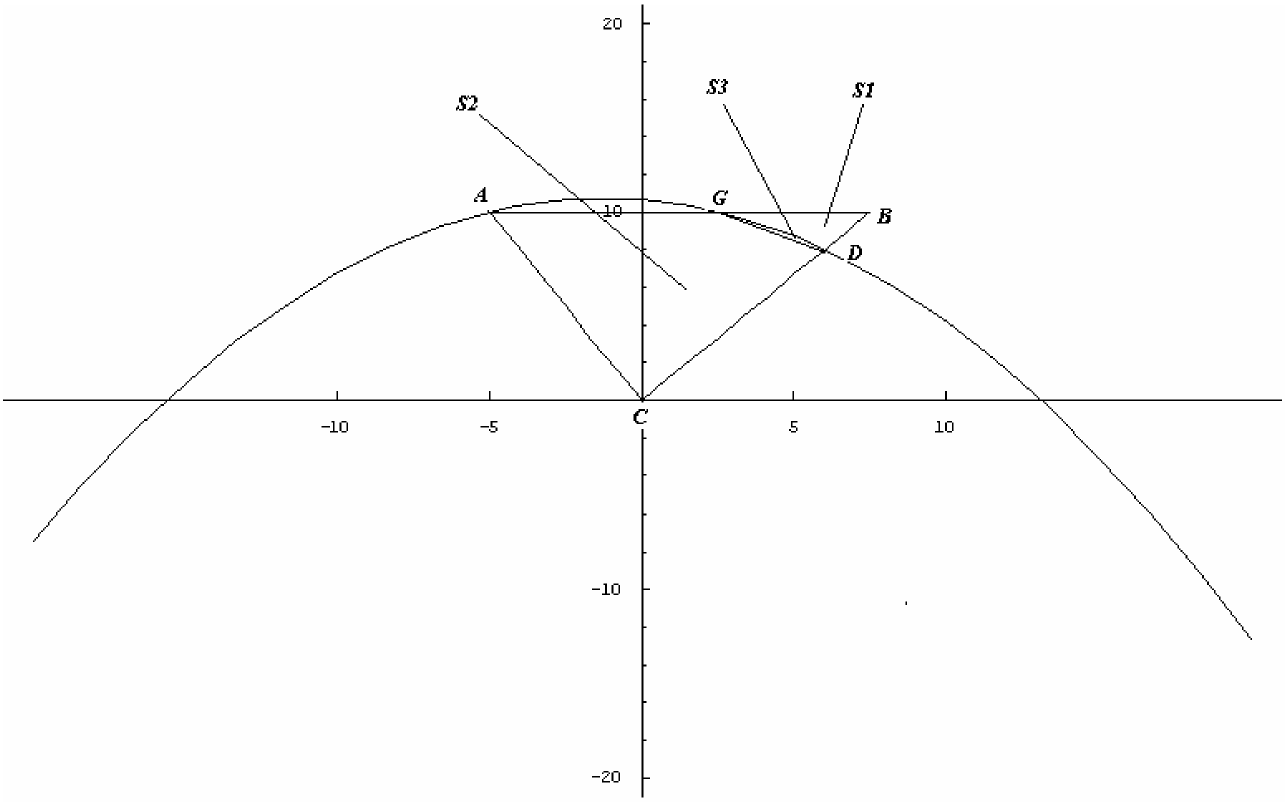
da cui

$$b=-12a-\frac{3}{4}=\frac{300}{484}-\frac{3}{4}=-\frac{63}{484}$$

$$c=10+5b-25a=10-\frac{315}{484}+\frac{625}{484}=\frac{5150}{484}$$

Per cui l'equazione della parabola è: $y=-\frac{25}{484}x^2-\frac{63}{484}x+\frac{5150}{484}$

***d)***




Iniziamo a calcolare il punto G di intersezione tra la parabola e la retta di equazione y=10: bisogna risolvere l'equazione

$$-\frac{25}{484}x^2-\frac{63}{484}x+\frac{5150}{484}=10 \rightarrow 25x^2+63x-310=0 \rightarrow x=\frac{-63\pm 187}{50} \rightarrow x_1=-5, x_2=\frac{62}{25}$$

per cui $G=\left(\frac{62}{25},10\right)$

Calcoliamo ora l'equazione della retta GD:

$$GD:\frac{y-10}{8-10}=\frac{x-\frac{62}{25}}{6-\frac{62}{25}} \rightarrow y=10-\frac{25}{44}\left(x-\frac{62}{25}\right)=-\frac{25}{44}x+\frac{251}{22}$$

Ora l'area

$$S_1=A_{BGD}-S_3$$
$$S_2=A_{ABC}-S_1$$

Quindi:

$$A_{BGD} = \frac{b*h}{2}$$
$$b = \frac{15}{2} - \frac{62}{25} = \frac{251}{50}$$
$$h = 10 - 8 = 2$$

Per cui $A_{BGD} = \frac{b*h}{2} = \frac{251}{50}$

$$S_3 = \int_{\frac{62}{25}}^{6} \left[ \left( -\frac{25}{484}x^2 - \frac{63}{484}x + \frac{5150}{484} \right) - \left( -\frac{25}{44}x + \frac{251}{22} \right) \right] dx =$$

$$\int_{\frac{62}{25}}^{6} \left[ \left( -\frac{25}{484}x^2 + \frac{212}{484}x - \frac{372}{484} \right) \right] dx = \frac{1}{484} \left[ -\frac{25}{3}x^3 + 106x^2 - 372x \right]_{\frac{62}{25}}^{6} =$$

$$= \frac{1}{484} \left[ -1800 + 3816 - 2232 + \frac{238328}{1875} - \frac{407464}{625} + \frac{23064}{625} \right] =$$

$$= \frac{1}{484} \left[ -216 + \frac{745736}{1875} \right] = \frac{704}{1875}$$

Da cui

$$S_1 = A_{BGD} - S_3 = \frac{251}{50} - \frac{704}{1875} = \frac{17417}{3750}$$

$$S_2 = A_{ABC} - S_1 = \frac{AB*CH}{2} - S_1 = \frac{\frac{25}{2}*10}{2} - \frac{17417}{3750} = \frac{125}{2} - \frac{17417}{3750} = \frac{108479}{1875}$$

***e)***

Il calcolo dei punti di intersezione lo si risolve attraverso il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ y = -\frac{25}{484}x^2 - \frac{63}{484}x + \frac{5150}{484} \end{cases}$$

Da cui

$$x^2 + \left( -\frac{25}{484}x^2 - \frac{63}{484}x + \frac{5150}{484} \right)^2 - 100 = 0 \rightarrow 625x^4 + 3150x^3 - 19275x^2 - 648900x + 3096900 = 0 \rightarrow$$

$$(x-6)^2 \left( 25x^2 + 426x + 3441 \right) = 0 \rightarrow x_1 = 6, x_{2,3} = \frac{-213 \pm 44i\sqrt{23}}{25}$$

per cui l'unico punto di intersezione è $D = (6,8)$.

*PROBLEMA 2.*

Si considerino i polinomi di 5° grado, nella variabile x, con coefficienti reali, i cui grafici, rappresentati in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono simmetrici rispetto all'origine O ed hanno un massimo relativo nel punto $\left(-2, \frac{64}{15}\right)$.

a) Trovare l'equazione y=f(x) dei grafici suddetti.
b) Dimostrare che tali grafici hanno tre punti in comune, in due dei quali hanno anche la stessa tangente.
c) Indicare con γ il grafico avente come tangente inflessionale l'asse x e disegnarne l'andamento.
d) Indicato con P(x) il polinomio rappresentato da γ e chiamati u e v (u<v) le ascisse dei punti, distinti da O, in cui γ interseca l'asse x, calcolare:

$$\int_u^v P(x)\,dx\,.$$

e) Dopo aver controllato che γ ha tre flessi allineati, determinare le ascisse dei punti in cui la retta dei flessi interseca γ.

***SOLUZIONE***

***a)***

Un polinomio di 5° grado ha equazione:

$$y = g(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

Ora dire che la curva è simmetrica rispetto all'origine significa che

$$g(x) = -g(-x) \to ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = -\left(-ax^5 + bx^4 - cx^3 + dx^2 - ex + f\right)$$

$$bx^4 + dx^2 + f = 0 \to y = ax^5 + cx^3 + ex$$

Passaggio per $\left(-2, \frac{64}{15}\right) \to -32a - 8c - 2e = \frac{64}{15} \to e + 4c + 16a = -\frac{32}{15}$

Il massimo relativo in $\left(-2, \frac{64}{15}\right)$ impone:

$$y^I(-2) = 0 \to \left[5ax^4 + 3cx^2 + e\right]_{x=-2} = 80a + 12c + e = 0$$

$$y^{II}(-2) = \left[20ax^3 + 6cx\right]_{x=-2} = -160a - 12c < 0$$

Bisogna allora risolvere il sistema seguente:

$$\begin{cases} e + 4c + 16a = -\dfrac{32}{15} \\ 80a + 12c + e = 0 \end{cases}$$

Ora sottraendo una delle equazioni dall'altra ricaviamo:

$$\begin{cases} a = a \\ c = \dfrac{4}{15} - 8a \\ e = 16a - \dfrac{16}{5} \end{cases} \quad \text{per cui}$$

$$y = ax^5 + cx^3 + ex = ax^5 + \left(\frac{4}{15} - 8a\right)x^3 + \left(16a - \frac{16}{5}\right)x =$$
$$a\left(x^5 - 8x^3 + 16x\right) + \frac{4}{15}x^3 - \frac{16}{5}x$$

con la condizione $-160a - 12\left(\frac{4}{15} - 8a\right) = -64a - \frac{16}{5} < 0 \rightarrow$

$a > -\frac{1}{20}$ per avere il massimo relativo in quel punto.

***b)***

Calcolo punti in comune: partendo dall'equazione

$$y = ax^5 + \left(\frac{4}{15} - 8a\right)x^3 + \left(16a - \frac{16}{5}\right)x =$$
$$a\left(x^5 - 8x^3 + 16x\right) + \frac{4}{15}x^3 - \frac{16}{5}x$$

I punti in comune si ricavano imponendo tale sistema:

$$\begin{cases} \left(x^5 - 8x^3 + 16x\right) = x\left(x^2 - 4\right)^2 = 0 \\ y = \dfrac{4}{15}x^3 - \dfrac{16}{5}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = -2 \rightarrow y = \dfrac{64}{15} \\ x = +2 \rightarrow y = -\dfrac{64}{15} \end{cases}$$

I punti sono allora $(0,0), \left(-2, \frac{64}{15}\right), \left(2, -\frac{64}{15}\right)$ e come si nota il secondo ed il terzo sono effettivamente simmetrici rispetto all'origine.

Ora le tre tangenti sono

Tangente in $(0,0) \rightarrow y = mx, m = \left[5ax^4 + 3\left(\frac{4}{15} - 8a\right)x^2 + \left(16a - \frac{16}{5}\right)\right]_{x=0} = \left(16a - \frac{16}{5}\right) \rightarrow y = \left(16a - \frac{16}{5}\right)x,$

Tangente in $(2, -\frac{64}{15}) \rightarrow +\frac{64}{15} = m(x-2), m = \left[5ax^4 + 3\left(\frac{4}{15} - 8a\right)x^2 + \left(16a - \frac{16}{5}\right)\right]_{x=2} = 0 \rightarrow y = -\frac{64}{15},$

Tangente in $(-2, +\frac{64}{15}) \rightarrow y - \frac{64}{15} = m(x+2), m = \left[5ax^4 + 3\left(\frac{4}{15} - 8a\right)x^2 + \left(16a - \frac{16}{5}\right)\right]_{x=-2} = 0 \rightarrow y = \frac{64}{15},$

Le tangenti nei punti $\left(-2,\frac{64}{15}\right),\left(2,-\frac{64}{15}\right)$ sono retti parallele all'asse delle ascisse e questo è una conferma dei calcoli effettuati perché per ipotesi il punto c è un massimo per cui la tangente in esso non è altro che una retta parallela all'asse delle ascisse. Lo stesso dicasi per il punto $\left(2,-\frac{64}{15}\right)$ che essendo simmetrico al punto $\left(-2,\frac{64}{15}\right)$ rispetto all'origine degli assi sarà un minimo e la tangente esso è sempre parallelo all'asse delle ascisse.

Le tre tangenti sono differenti per cui la traccia presenta un errore.

***c)***

Calcolo dei flessi:

$$y^{II}(x) = 20ax^3 + 6cx = 2x\left(10ax^2 + 3c\right) = 0 \rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{\frac{3c}{10a}} \text{ se } \quad ac < 0$$

Affinché la tangente inflessionale sia l'asse delle ascisse allora tale tangente deve avere equazione $y = 0$ e questo, visti i punti di flesso, accade se e solo se la tangente inflessionale nel flesso $(0,0)$, che ha equazione $y = mx$, ha coefficiente angolare nullo.

Il coefficiente angolare della tangente in $(0,0)$ è stato già calcolato prima ed è

$$m = \left[5ax^4 + 3\left(\frac{4}{15} - 8a\right)x^2 + \left(16a - \frac{16}{5}\right)\right]_{x=0} = \left(16a - \frac{16}{5}\right)$$

Per cui imponendo che il coefficiente angolare sia nullo ricaviamo:

$$\left(16a - \frac{16}{5}\right) = 0 \rightarrow a = \frac{1}{5}$$

E questo valore è $a > -\frac{1}{20}$ per cui il massimo è quello detto.

Per cui la curva diventa:

$$y = \frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3$$

Studiamo questa curva:

Dominio : R

Intersezione asse $x$: $y=0 \rightarrow \frac{x^5}{5}-\frac{4}{3}x^3=0 \rightarrow \frac{x^3}{15}\left(3x^2-20\right)=0 \rightarrow x=0, x=\pm 2\sqrt{\frac{5}{3}}$

Intersezione asse y : $x=0 \rightarrow y=0$

Asintoti verticali, orizzontali ed obliqui : non ce ne sono. In particolare

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5}{5}-\frac{4}{3}x^3=+\infty, \lim_{x\to-\infty} \frac{x^5}{5}-\frac{4}{3}x^3=-\infty$

Crescenza e decrescenza : $y^I(x)=x^4-4x^2=x^2\left(x^2-4\right)=0 \rightarrow x=0, x=\pm 2$

$y^{II}(x)=4x^3-8x=4x\left(x^2-2\right)=0 \rightarrow x=0, x=\pm\sqrt{2}$

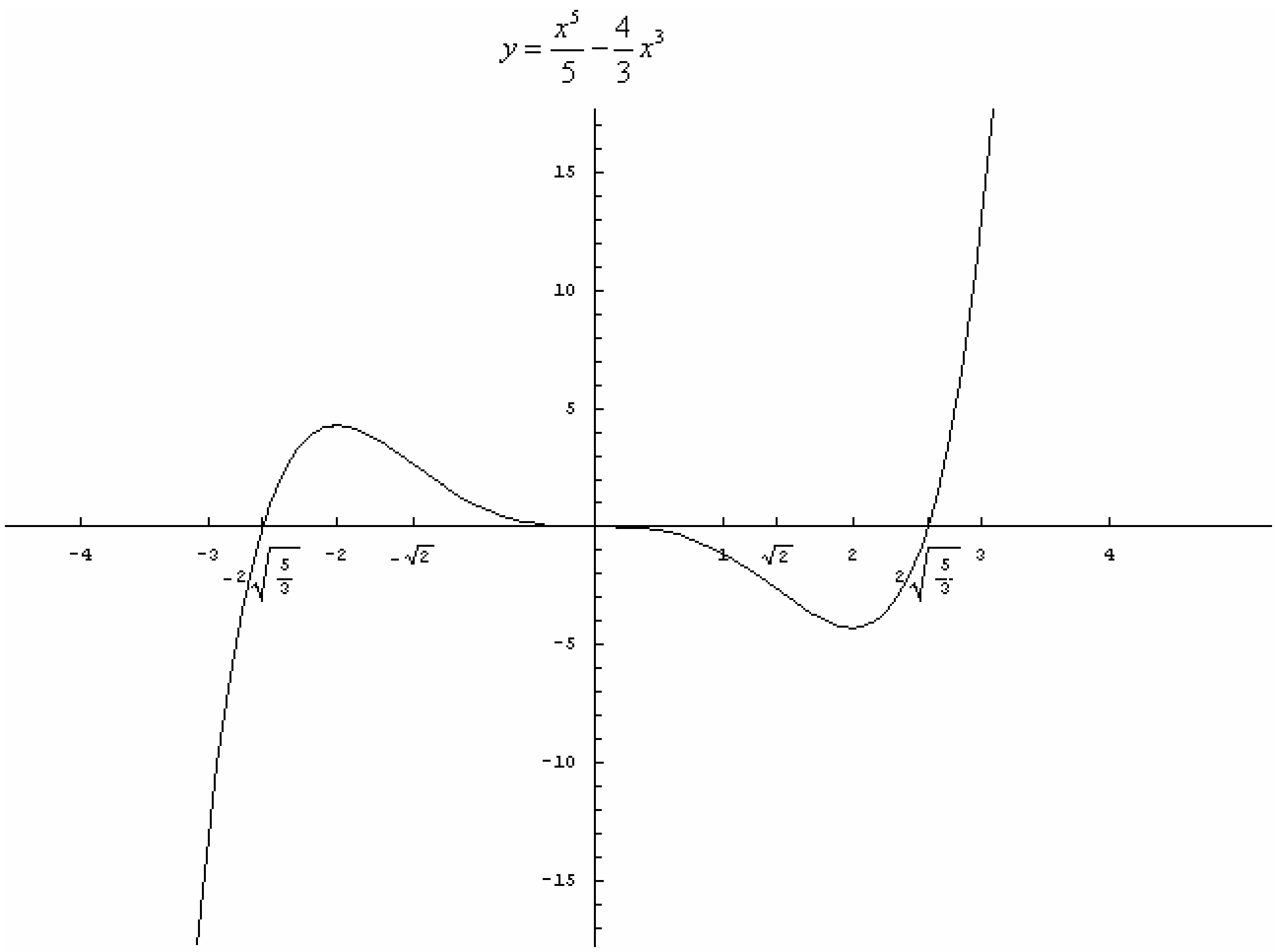
$y^{II}(0)=0, y^{III}(0)=-8 \rightarrow (0,0)$ è un flesso

$y^{III}\left(\pm\sqrt{2}\right)\neq 0 \rightarrow \left(\sqrt{2},-\frac{28\sqrt{2}}{15}\right),\left(-\sqrt{2},\frac{28\sqrt{2}}{15}\right)$ sono altrettanti flessi

$y^{II}(2)=16>0 \rightarrow \left(2,-\frac{64}{15}\right)$ è un minimo come ci aspettavamo

$y^{II}(-2)=-16<0 \rightarrow \left(-2,\frac{64}{15}\right)$ è un massimo come ci aspettavamo dalla traccia

Ecco il grafico:



***d)***

Le ascisse dei punti di intersezione con l'asse delle *x* distinte da *x=0* le abbiamo già trovate e sono $x = u = -2\sqrt{\frac{5}{3}}, x = v = 2\sqrt{\frac{5}{3}}$ .

Per cui l'integrale da calcolare è:

$$\int_{-2\sqrt{\frac{5}{3}}}^{+2\sqrt{\frac{5}{3}}} \left( \frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 \right) dx$$

Per calcolare questo integrale basta ricordare che l'integrale di una funzione dispari in un intervallo simmetrico rispetto all'origine è sempre nullo. In altro modo, interpretando geometricamente l'integrale come area sottesa, le due aree da calcolare si annullano a vicenda.
Per verificare ciò integriamo normalmente e verifichiamo che il risultato dell'integrale definito è nullo:

$$\int_{-2\sqrt{\frac{5}{3}}}^{+2\sqrt{\frac{5}{3}}} \left( \frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 \right) dx = \left[ \frac{x^6}{30} - \frac{x^4}{3} \right]_{-2\sqrt{\frac{5}{3}}}^{+2\sqrt{\frac{5}{3}}} = \left( \frac{8000}{810} - \frac{400}{27} \right) - \left( \frac{8000}{810} - \frac{400}{27} \right) = 0$$

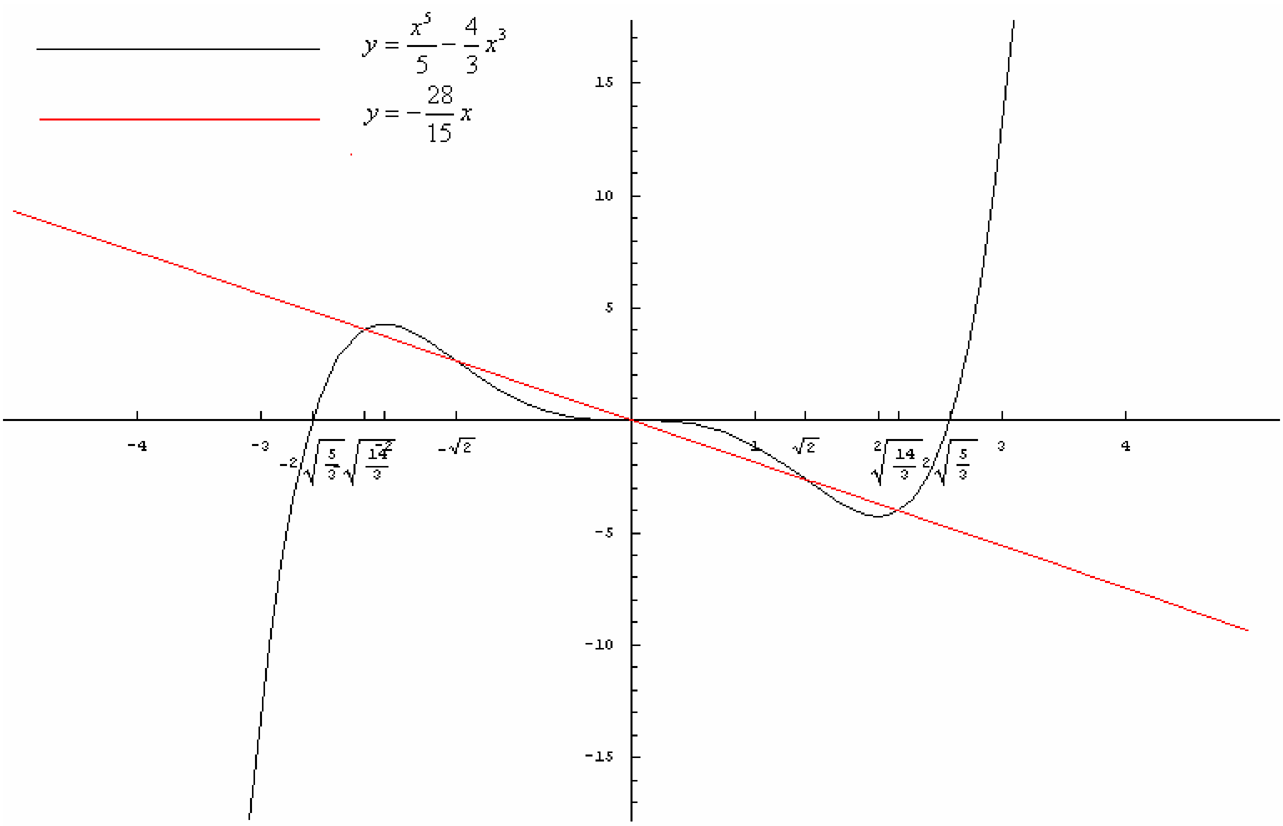
***e)***

I flessi sono stati già calcolati e sono $A = (0,0), \mathrm{B} = \left( \sqrt{2}, -\frac{28\sqrt{2}}{15} \right), \mathrm{C}\left( -\sqrt{2}, \frac{28\sqrt{2}}{15} \right)$

Per vedere se questi flessi sono allineati calcoliamo la retta BC:

$$BC: \frac{y + \frac{28\sqrt{2}}{15}}{\frac{28\sqrt{2}}{15} + \frac{28\sqrt{2}}{15}} = \frac{x - \sqrt{2}}{-\sqrt{2} - \sqrt{2}} \rightarrow \frac{y + \frac{28\sqrt{2}}{15}}{\frac{56\sqrt{2}}{15}} = \frac{-x + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \rightarrow y + \frac{28\sqrt{2}}{15} = \frac{28}{15}\left(-x + \sqrt{2}\right) \rightarrow y = -\frac{28}{15}x$$

e questa retta passa anche per $A = (0,0)$, quindi i tre flessi sono allineati sulla retta $y = -\frac{28}{15}x$ come rappresentato dalla figura sottostante:




Calcoliamo i punti di intersezione tra la retta su cui i flessi sono allineati e la curva:

$$\begin{cases} y=\frac{x^5}{5}-\frac{4}{3}x^3 \\ y=-\frac{28}{15}x \end{cases} \rightarrow \frac{x^5}{5}-\frac{4}{3}x^3+\frac{28}{15}x=0 \rightarrow$$

$$3x^5-20x^3+28x=x\left(3x^4-20x^2+28\right)=x\left(3x^2-6\right)\left(x^2-\frac{14}{3}\right)=0 \rightarrow x=0, x=\pm\sqrt{2}, x=\pm\sqrt{\frac{14}{3}}$$

*QUESTIONARIO.*

**1.** È assegnato un pentagono regolare di lato lungo L. Recidendo opportunamente, in esso, cinque triangoli congruenti, si ottiene un decagono regolare: calcolarne la lunghezza del lato. (*Si lascino indicate le funzioni goniometriche degli angoli coinvolti*).

**2.** Una piramide quadrangolare regolare è tale che la sua altezza è il doppio dello spigolo di base. Calcolare il rapporto fra il volume del cubo inscritto nella piramide e il volume della piramide stessa.

**3.** Se le funzioni f(x) e g(x), entrambe tendenti a 0, quando $x \to a$, non soddisfano alle condizioni previste dal teorema di De L'Hôpital, non è possibile calcolare il limite di $\frac{f(x)}{g(x)}$ quando $x \to a$. È vero o è falso? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

**4.** Il limite della funzione $f(x) = x - \ln x$, per $x \to +\infty$:

[A] è 0; [B] è un valore finito diverso da 0; [C] è $+\infty$; [D] è $-\infty$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

**5.** Dimostrare che la derivata, rispetto ad x, della funzione arctg(x) è $\frac{1}{1+x^2}$.

**6.** Dopo aver enunciato il teorema di Rolle, spiegare in maniera esauriente se può essere applicato alla funzione $f(x) = \sqrt{x^2}$, nell'intervallo [-1,1].

**7.** Giustificare, con considerazioni analitiche o mediante un'interpretazione grafica, che la seguente equazione:

$$x^5 + x^3 + 1 = 0$$

ammette una ed una sola soluzione reale. Trovare, quindi, l'intervallo $[z, z+1]$ al quale appartiene tale soluzione, essendo z un numero intero.

**8.** Considerata l'equazione: $x^5 - 2x^3 + 1 = 0$, spiegare, con il metodo preferito ma in maniera esauriente, perché non può ammettere più di una soluzione *razionale*.

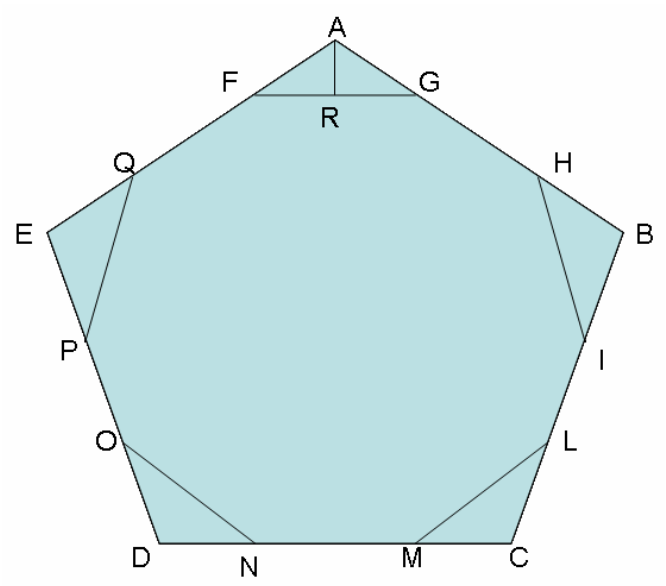
**9.** Considerata l'equazione: $\cos\frac{x}{2}\operatorname{sen}(2x) = 12$, spiegare in maniera esauriente se ammette soluzioni reali o se non ne ammette.

**10.** Una classe è formata da 28 alunni, di cui 16 femmine e 12 maschi. Fra le femmine c'è una sola "Maria" e fra i maschi un solo "Antonio". Si deve formare una delegazione formata da due femmine e due maschi. Quante sono le possibili delegazioni comprendenti "Maria" e "Antonio"?

***SOLUZIONE***

***1)***

Si consideri la figura sottostante, in cui sono stati recisi nel pentagono 5 triangoli isosceli congruenti:




In accordo soprastante si ha:

$$FA = AG = HB = BI = LC = CM = ND = DO = PE = EQ = x,$$
$$QP = PO = ON = NM = ML = LI = IH = HG = GF = y$$

In ogni poligono di n lati l'angolo al vertice è pari a $\alpha = \frac{n-2}{n}\pi$ e nel caso del pentagono in esame si ha: $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = \hat{E} = \alpha = \frac{n-2}{n}\pi = \frac{3\pi}{5}$.

Ora $y = FG = 2RG = 2AG\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) = 2x\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) = 2x\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \Rightarrow x = \frac{y}{2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{y}{2\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)}$

Ora ricordando che

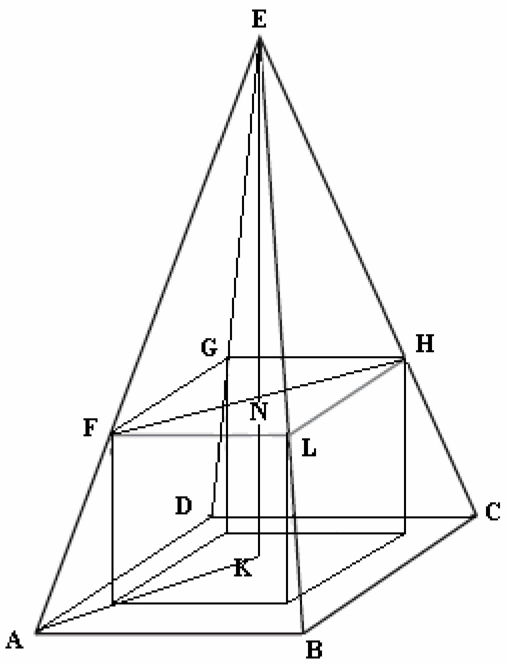
$$L = 2x + y = 2\frac{y}{2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)} + y = y\left[1 + \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}\right] \Rightarrow y = \frac{L}{\left[1 + \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}\right]} = \frac{L\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{L\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)}{1 + \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)}$$

Se ci fosse stato richiesto di trovare una relazione che non coinvolgesse gli angoli, bastava notare che $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\cos(36°)=1-2\sin^2(18°)=1-2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2=1-\frac{3-\sqrt{5}}{4}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ per cui

$$y=L\frac{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}=L\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}{1+\frac{1+\sqrt{5}}{4}}=L\frac{1+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}=L\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)}{20}=L\frac{4\sqrt{5}}{20}=L\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{L}{\sqrt{5}}$$

***2)***

Si consideri la figura sottostante che rappresenta la geometria del problema:




L'altezza della piramide è $KE=2AB=2l$ dove $AB=BC=CD=DA=l$.

Il volume della piramide è allora $V_P=\frac{1}{3}AB^2EK=\frac{2}{3}AB^3=\frac{2}{3}l^3$.

I triangoli ENF ed EKA sono simili. Per cui posto $FL=x$ si ha $FN=\frac{FH}{2}=x\frac{\sqrt{2}}{2}$, si ha :

$$AK:KE=FN:NE\Rightarrow AK:KE=FN:\left(EK-NK\right)\Rightarrow$$

$$l\frac{\sqrt{2}}{2}:2l=x\frac{\sqrt{2}}{2}:\left(2l-x\right)\Rightarrow 2x=2l-x\Rightarrow x=\frac{2}{3}l$$

per cui $V_C=\left(\frac{2}{3}l\right)^3=\frac{8}{27}l^3$ per cui $\frac{V_C}{V_P}=\frac{\frac{8}{27}l^3}{\frac{2}{3}l^3}=\frac{4}{9}$.

***3)***

La risposta è evidentemente falsa. Per giustificare questa nostra affermazione prendiamo due funzioni, $f(x), g(x)$ che non soddisfano al teorema di De l'Hospital, cioè tali che $f(x) \overset{x\to a}{\rightarrow} 0, g(x) \overset{x\to a}{\rightarrow} 0$ e il limite $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ non esiste, ma per le quali esiste il limite $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Un esempio è fornito dalle due funzioni seguenti:

$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right), g(x) = \sin(x)$ quando $x \to 0$. Infatti $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \overset{x\to 0}{\rightarrow} 0$ e questo lo si dimostra utilizzando il teorema dei carabinieri per cui, essendo $-x^2 \le x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \le x^2$ , dal confronto anche $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \overset{x\to 0}{\rightarrow} 0$.

Inoltre banalmente $g(x) = \sin(x) \overset{x\to 0}{\rightarrow} 0$. Tuttavia non esiste $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Infatti $f'(x) = 2x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \pi\cos\left(\frac{1}{x}\right), g'(x) = \cos x$ per cui $\lim_{x\to 0} \frac{2x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \pi\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\left[2x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \pi\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]$. Ora sempre attraverso il teorema dei carabinieri si ha $f(x) = 2x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \overset{x\to 0}{\rightarrow} 0$, mentre l'addendo $-\pi\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ non presenta limite essendo la funzione coseno una funzione limitata ed oscillante.

Tuttavia il limite $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\sin(x)}\right] x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = \lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$ avendo sfruttato il limite fondamentale $\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\sin(x)}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin(x)}{x}\right]^{-1} = 1^{-1} = 1$. Un altro modo per mostrare quanto detto è effettuare la sostituzione $t = \frac{1}{x}$ per cui $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = \lim_{t\to\infty} \frac{\sin(\pi t)}{t} = 0$ ricordando l'andamento della funzione seno cardinale in un intorno di $\pm\infty$.

***4)***

$$\lim_{x\to+\infty} (x - \ln x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$$

Ora sfruttando de l'Hospital $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ per cui

$$\lim_{x\to+\infty} (x - \ln x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

per cui l'alternativa corretta è la C.

*5)*

Per la dimostrazione richiesta faremo riferimento al teorema di derivazione delle funzioni inverse. Infatti la funzione $y = \arctan(x)$ è l'inversa della funzione $x = \tan(y), y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. In questo intervallo la funzione inversa è derivabile, con derivata non nulla, per cui

$$D[\arctan(x)] = \frac{1}{D[\tan(y)]} = \cos^2(y) = \frac{1}{1+\tan^2(y)} = \frac{1}{1+x^2}$$

*6)*

Enunciamo innanzitutto il teorema di Rolle: sia $f : x \in [a,b] \to R$.
Se

- $f(x)$ continua in $[a,b]$;
- $f(x)$ derivabile in $(a,b)$;
- $f(a) = f(b)$

Allora $\exists c \in (a,b) : f'(c) = 0$.

Geometricamente questo teorema si interpreta col fatto che se una funzione è derivabile, e quindi ammette tangente, e se assume agli estremi valori uguali, allora essa ammetterà una tangente orizzontale.

Nel nostro caso la funzione $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ è continua, $f(-1) = f(1) = 1$, ma viene meno l'ipotesi fondamentale e cioè la derivabilità in $x = 0$, interno all'intervallo [-1,1]. Infatti $f(x) = \sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ ha come derivata $f'(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ per cui $1 = \lim_{x \to 0^+} f'(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f'(x) = -1$. Per questo motivo $f'(0)$ non esiste ed alla funzione $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ non è applicabile il teorema di Rolle.

*7)*

La funzione $y = x^5 + x^3 + 1$ è continua e derivabile in tutto R; inoltre $\lim_{x \to +\infty}(x^5 + x^3 + 1) = +\infty, \lim_{x \to -\infty}(x^5 + x^3 + 1) = -\infty$. D'altronde la funzione è crescente in $R - \{0\}$ dal momento che $y' = 5x^4 + 3x^2$. Quindi il comportamento a $\pm\infty$ e la crescenza in $R - \{0\}$ comporta che $\exists! \bar{x} : y(\bar{x}) = 0$.
Ora $y(0) = 1 > 0, y(-1) = -1 < 0$, per cui per il teorema degli zeri nell'intervallo [-1,0] la funzione presenterà l'unico zero previsto, cioè in tale intervallo sarà presente l'unica soluzione reale dell'equazione $x^5 + x^3 + 1 = 0$.

***8)***

Ricordiamo il teorema seguente:

se un polinomio p(x) a coefficienti interi è tale per cui il numero razionale $\frac{a}{b}$ è un suo zero, cioè $p\left(\frac{a}{b}\right)=0$, allora valgono le seguenti:

1. il numeratore *a* divide il termine noto;
2. il denominatore *b* divide il coefficiente di grado massimo del polinomio.

Quindi la nostra concentrazione va posta sul coefficiente di grado massimo del polinomio, che è unitario, e sul termine noto, anch'esso unitario. Ora gli unici divisori di 1 ( e cioè sia del coefficiente di grado massimo che del termine noto) sono 1 e -1. Quindi le possibili soluzioni razionali potrebbero essere 1 e -1.
Ma $p(1)=0, p(-1)=2$, per cui l'unica soluzione razionale è $x=1$.

***9)***

L'equazione $\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin(2x)=12$ non ha alcuna soluzione, dal momento che il prodotto di due numeri compresi tra -1 ed 1 $\left(\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|\leq 1, |\sin(2x)|\leq 1\right)$ è sempre un numero appartenente all'intervallo [-1,1].

***10)***

Tra le femmine c'è una sola "Maria" e tra gli uomini un solo "Antonio"; per cui le possibili coppie femmine comprendenti "Maria" sono 15, una per ogni coppia comprendente "Maria" ed una delle altre 15 femmine, mentre le possibili coppie comprendenti "Antonio" sono 11, una per ogni coppia comprendente "Antonio" ed uno dei rimanenti 11 uomini. In conclusione le possibili combinazioni di due maschi e due femmine comprendenti "Maria" ed "Antonio" sono 15*11=165.
Un altro modo per risolvere il quesito è che tolta "Maria" dalle femmine ed "Antonio" dai maschi, rimangono 15 femmine ed 11 maschi. Ora, ricordando il significato del coefficiente binomiale, il numero di combinazioni comprendenti "Maria" sono $\binom{15}{1}=15$, mentre il numero di combinazioni comprendenti "Antonio" sono $\binom{11}{1}=11$, per cui le delegazioni richieste sono $\binom{15}{1}\binom{11}{1}=15*11=165$.