

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1.

Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le due parabole p' e p'' di equazioni rispettivamente:

$$y = x^2, \quad x = y^2 - 2y.$$

- a) Fornire la rappresentazione grafica, dopo aver determinato, fra l'altro, i loro punti comuni.
- b) Indicato con V' il vertice della parabola p' , con V'' il vertice della parabola p'' e con P il punto in cui p'' interseca il semiasse positivo delle y , calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dall'arco $V'V''$ della parabola p' , dall'arco $V''P$ della parabola p'' e dal segmento $V'P$.
- c) Calcolare l'ampiezza dell'angolo secondo cui le due parabole si secano in O e con l'uso di una calcolatrice esprimerla in gradi sessagesimali, primi e secondi.
- d) Le due parabole p' e p'' sono congruenti: farlo vedere, dimostrando che esiste almeno un'isometria che trasforma una di esse nell'altra e trovando le equazioni di tale isometria.
- e) Stabilire se l'isometria trovata ammette elementi uniti.

PROBLEMA 2.

Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{x+k}{x^2},$$

dove k è un parametro reale non nullo.

- a) Dimostrare che non hanno punti in comune e ognuna di esse presenta uno ed un solo flesso.
- b) Tra le curve assegnate, indicare con γ quella che ha come tangente inflessionale la retta r di equazione $x+27y-9=0$.
- c) Disegnare l'andamento di γ , dopo averne trovato le caratteristiche salienti e, in particolare, l'equazione della retta t tangente alla curva γ nel punto A di ascissa 1 e le coordinate dell'ulteriore punto B che t ha in comune con γ .
- d) Trovare l'equazione della circonferenza di diametro AB .
- e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva γ , dalla retta r e dall'asse x .

QUESTIONARIO

1. Si considerino il rettangolo ABCD e la parabola avente l'asse di simmetria parallelo alla retta AD, il vertice nel punto medio del lato AB e passante per i punti C e D. In una rotazione di mezzo giro intorno all'asse della parabola il rettangolo genera un solido di volume V' e la regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta CD genera un solido di volume V'' . Determinare il rapporto V'/V'' .

2. Il numero delle soluzioni dell'equazione $\sin 2x \cos x = 2$ nell'intervallo reale $[0, 2\pi]$ è:

[A] 0; [B] 2; [C] 3; [D] 5.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

3. Il limite della funzione $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, per $x \rightarrow 0$:

[A] non esiste; [B] è $+\infty$; [C] è 0; [D] è un valore finito diverso da 0.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

4. Dimostrare che la funzione $f(x) = x^a$, dove a è un qualsiasi numero reale non nullo, è derivabile in ogni punto del suo dominio.

5. Il seguente teorema esprime la condizione d'integrabilità di Mengoli-Cauchy:

Se una funzione reale di variabile reale, definita in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, è ivi continua, allora ivi è anche integrabile.

Enunciare la proposizione inversa e spiegare in maniera esauriente perché tale proposizione non è un teorema.

6. Dire se è corretto o no, affermare che si ha:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$$

dove c è una costante arbitraria e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

7. Calcolare l'ampiezza dell'angolo formato da due facce consecutive di un ottaedro regolare, espressa in gradi sessagesimali ed approssimata al "primo".

8. Dimostrare che ogni similitudine trasforma una parabola in una parabola.

9. Un'urna contiene 150 palline, che possono essere di vetro o di plastica, bianche o nere. Per la precisione: 62 palline sono bianche, 38 sono di vetro nero e 40 sono di plastica bianca. Calcolare la probabilità che, estratta a caso una pallina, NON sia di plastica nera.

10. In ciascuna di tre buste uguali vi sono due cartoncini: in una busta essi sono bianchi, in un'altra sono neri, nella terza sono uno bianco e l'altro nero. Si estrae a caso una busta e, da essa, un cartoncino. Qual è la probabilità che il cartoncino rimasto in questa busta sia dello stesso colore di quello estratto?

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 1

a)

La parabola di equazione $y = x^2$ ha asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate e vertice in $V' = (0,0)$.

La parabola di equazione $x = y^2 - 2y$ ha asse di simmetria parallelo all'asse delle ascisse, vertice in $V'' = (-1,1)$ ed incontra l'asse delle ordinate nei punti $V' = (0,0)$ e $P = (0,2)$.

I punti in comune tra le due si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 - 2y \end{cases} \Rightarrow x = (x^2)^2 - 2(x^2) \Rightarrow$$

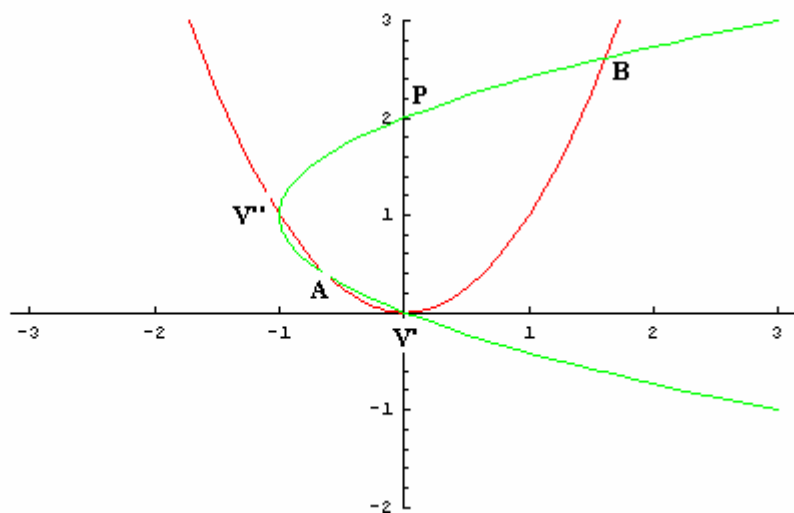
$$x^4 - 2x^2 - x = x(x+1)(x^2 - x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1, x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

I punti in comune saranno allora : $V' = (0,0)$, $V'' = (-1,1)$, $A = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$, $B = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

Sotto vengono entrambe rappresentate:

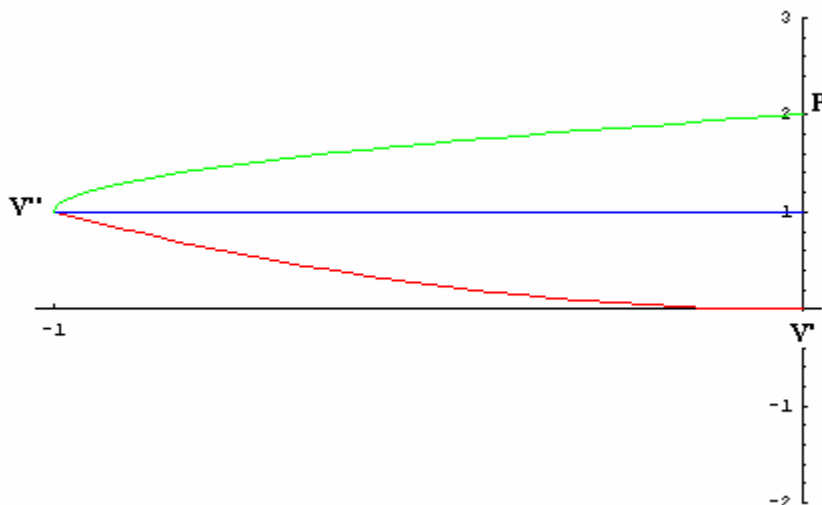
— $y = x^2$

— $x = y^2 - 2y$



b)

L'area da determinare è rappresentata nella figura sottostante:



Innanzitutto dobbiamo determinare la relazione che permette di definire l'arco di parabola $V'P$, per cui dobbiamo esplicitare la parabola di equazione $x = y^2 - 2y$ come funzione classica $y = g(x)$. Essa può essere così riscritta:

$$x = y^2 - 2y \Leftrightarrow y^2 - 2y - x = 0 \Rightarrow y = 1 \pm \sqrt{1+x}$$

e dal momento che l'arco di parabola $V'P$ si trova al di sopra dell'asse di simmetria $y = 1$, esso è definito dalla funzione $y = 1 + \sqrt{1+x}$ in $[-1, 0]$.

Per cui

$$A = \int_{-1}^0 (1 + \sqrt{1+x} - x^2) dx = \int_{-1}^0 (1 + \sqrt{1+x} - x^2) dx \left[x + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 = \frac{2}{3} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

c)

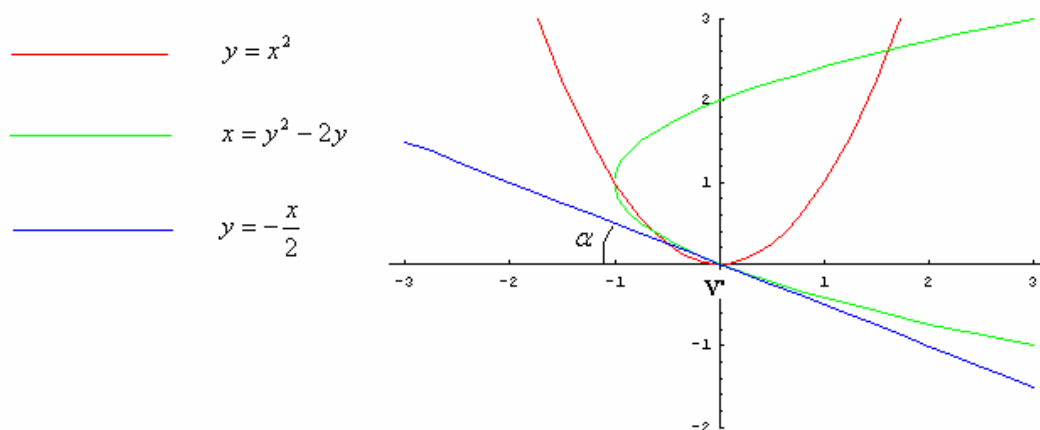
L'angolo sotto cui le due parabole si secano nell'origine $V'=(0,0)$ è l'angolo sotto cui si secano le due tangenti alle due parabole in $V'=(0,0)$.

Essendo la parabola $y = x^2$ tangente in $V'=(0,0)$ la tangente ad essa nel punto stesso è l'asse delle ascisse di equazione $y = 0$.

La tangente alla parabola $x = y^2 - 2y$ in $V'=(0,0)$ ha equazione $y = mx$. Ora l'arco $V'V''$ della parabola $x = y^2 - 2y$ è rappresentato dalla funzione $y = 1 - \sqrt{1+x}$ visto che esso si trova al di

sotto dell'asse di simmetria $y = 1$. Per cui $m = y'(0) = (1 - \sqrt{1+x})'_{x=0} = \left(-\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \right)_{x=0} = -\frac{1}{2}$, per

cui la tangente è $y = -\frac{x}{2}$. Si noti la figura sottostante:



L'angolo α sotto cui si secano le tangenti in $V'=(0,0)$ soddisfa all'equazione

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \tan(\alpha) = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 26^\circ 33' 54''$$

d)

Innanzitutto la parabola di equazione $x = y^2 - 2y$ può essere riscritta come

$$x + 1 = y^2 - 2y + 1 \Rightarrow x + 1 = (y - 1)^2$$

Per cui attraverso la trasformazione $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 1 \end{cases}$ essa viene trasformata in $(y')^2 = x'$. Ora se

appliciamo una ulteriore trasformazione del tipo $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$ la parabola $(y')^2 = x'$ viene trasformata in $y = x^2$. In conclusione la trasformazione da applicare per trasformare p' in p'' e viceversa è

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ x = y - 1 \end{cases}$$

e)

L'isometria trovata nel punto d) $\begin{cases} y = x + 1 \\ x = y - 1 \end{cases}$ può essere riscritta come $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$ per cui la retta di equazione $y = x + 1$ rappresenta la retta dei punti uniti.

PROBLEMA 2

a)

Il fascio di curve può essere riscritto anche nel seguente modo:

$$x^2y - x - k = 0 \rightarrow x(xy - 1) - k = 0$$

Si nota che il fascio non viene scritto al variare del parametro k come combinazione lineare di due differenti curve, per cui due curve qualsiasi del fascio non hanno alcun punto in comune. In altro modo se prendiamo $k \neq k', x \neq 0$ le due curve $y = \frac{x+k}{x^2}, y_1 = \frac{x+k'}{x^2}$ non hanno alcun punto in comune perché $y = y_1 \Leftrightarrow k = k'$, contrariamente a quanto supposto.

Vediamo ora che esiste un unico punto di flesso. Bisogna calcolare le derivate:

$$y'(x) = -\frac{2k+x}{x^3}$$

$$y''(x) = \frac{2(x+3k)}{x^4}$$

$$\text{Ora } y'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2k \text{ per cui } y''(-2k) = \frac{1}{8k^3} \text{ per cui } \left(-2k, -\frac{1}{4k}\right)$$

è un massimo se $k < 0$ ed è un minimo se $k > 0$

$$\text{Inoltre } y''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3k \text{ per cui } F = \left(-3k, -\frac{2}{9k}\right) \text{ è un flesso a tangente obliqua}$$

ed è l'unico per le considerazioni fatte.

b)

Calcoliamo ora la tangente inflessionale in funzione del parametro k : essa ha equazione

$$y + \frac{2}{9k} = m(x + 3k)$$

$$\text{con } m = y'(-3k) = -\frac{1}{27k^2} \text{ per cui la tangente diventa :}$$

$$y + \frac{2}{9k} = -\frac{1}{27k^2}(x + 3k) \rightarrow y = -\frac{x}{27k^2} - \frac{1}{3k}$$

La tangente data nella traccia può essere riscritta nel seguente modo : $y = -\frac{x}{27} + \frac{1}{3}$ per cui dal confronto, il valore opportuno del parametro k lo si ricava dal sistema seguente:

$$\begin{cases} -\frac{1}{27k^2} = -\frac{1}{27} \\ -\frac{1}{3k} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \pm 1 \\ k = -1 \end{cases}$$

Per cui il valore accettabile è $k = -1$ in corrispondenza del quale la curva diventa

$$y = \frac{x-1}{x^2}$$

c)

Studio della curva $y = \frac{x-1}{x^2}$

Dominio: $\forall x \neq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Intersezioni asse x: $y = 0 \rightarrow x = 1$

Intersezioni asse y: non ce ne sono

Positività:

$y > 0 \rightarrow \frac{x-1}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0$ dal momento che nel dominio di definizione x^2 è sempre positivo

per cui $y > 0 \rightarrow x > 1$

Asintoti verticali: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$ per cui $x = 0$ è asintoto verticale

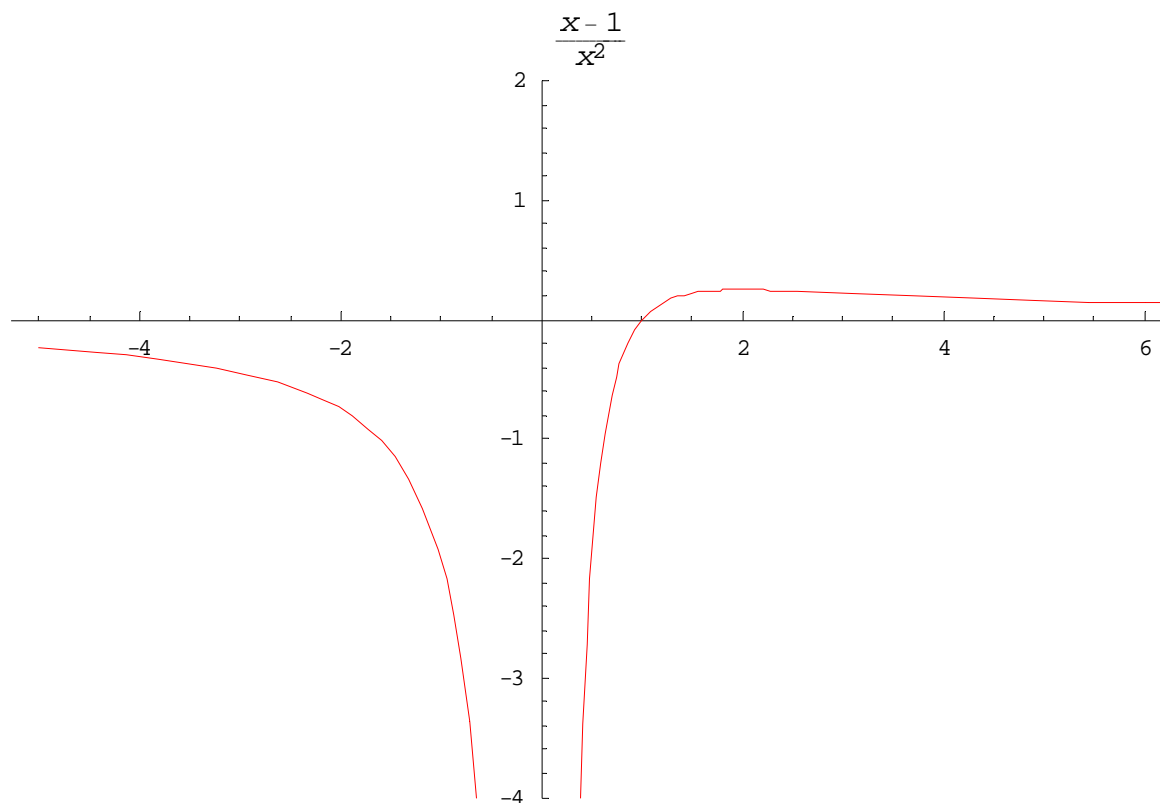
Asintoti orizzontali: $y = 0$, infatti $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$

Asintoti obliqui: non ce ne sono

Crescenza e decrescenza: essendo $k = -1$ la funzione presenterà un massimo in $\left(2, \frac{1}{4}\right)$ per le considerazioni fatte in precedenza.

Flessi: unico flesso $\left(3, \frac{2}{9}\right)$

Il grafico è sotto riportato:



La retta tangente in $A=(1,0)$ ha equazione:

$$y = m(x-1) \quad \text{con } m = y'(1) = \left(\frac{2-x}{x^3} \right)_{x=1} = 1 \text{ per cui la tangente diventa } y = x-1$$

Calcolo dell'altro punto di intersezione:

$$\frac{x-1}{x^2} = x-1 \rightarrow (x-1) \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) = 0 \rightarrow x = \pm 1 \text{ per cui l'altro punto è } B = (-1, -2)$$

d)

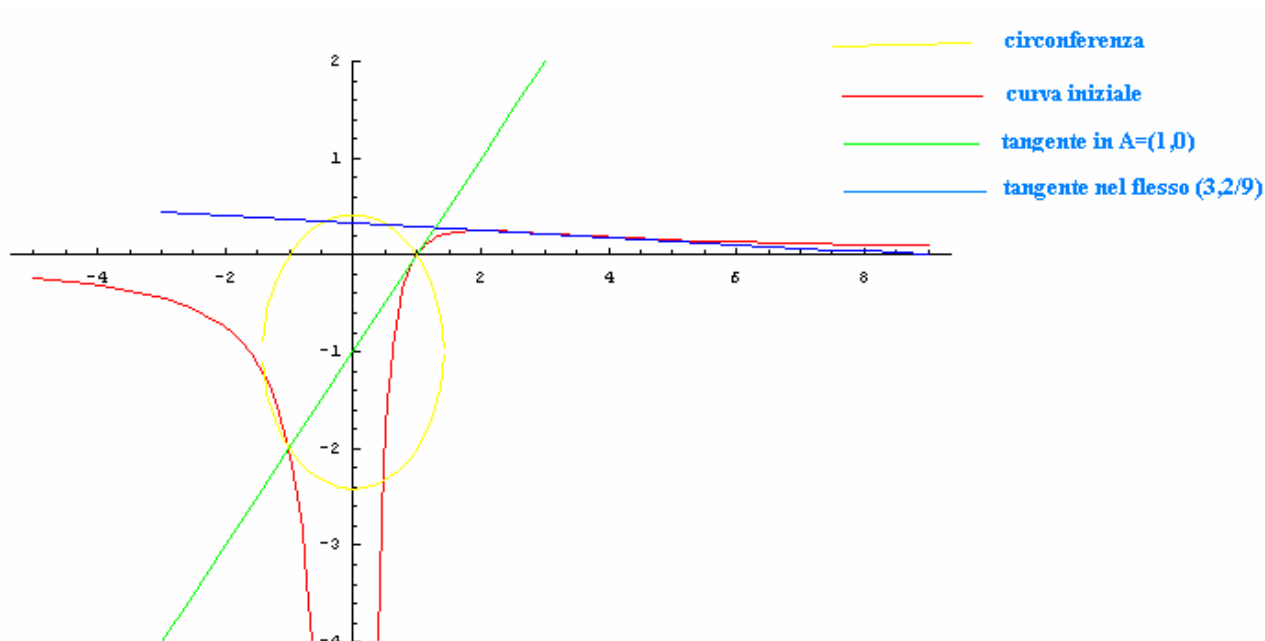
Il diametro AB ha lunghezza: $AB = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ per cui il raggio è $r = \sqrt{2}$ mentre

il punto medio del diametro AB è $C=(0,-1)$.

L'equazione della circonferenza è ora facile da determinare ed è:

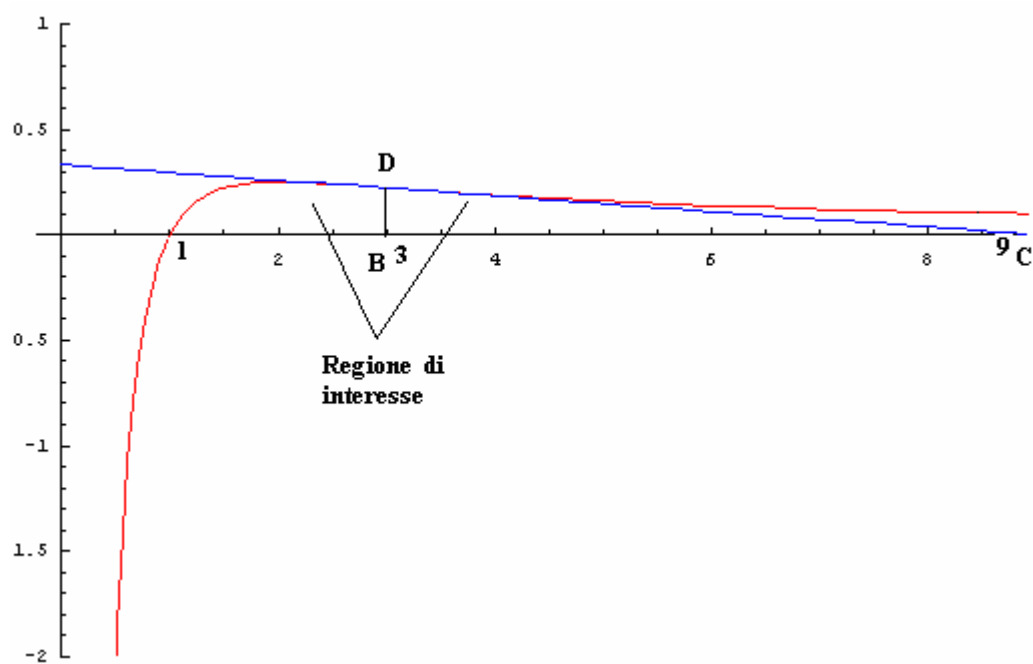
$$(x-0)^2 + (y+1)^2 = r^2 = 2 \rightarrow x^2 + (y+1)^2 = 2$$

Rappresentiamo su un unico grafico quanto trovato sinora:



e)

Per l'area da trovare facciamo uno zoom della regione di interesse:



Quindi l'area da trovare è somma dell'area del triangolo BCD e dell'area sottesa dalla curva nell'intervallo $[1,3]$, cioè essendo $DB = \frac{2}{9}$, $BC = 6$ si avrà:

$$AREA = \frac{\frac{2}{9} * 6}{2} + \int_1^3 \left(\frac{x-1}{x^2} \right) dx = \frac{2}{3} + \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx =$$

$$\frac{2}{3} + \left[\ln|x| + \frac{1}{x} \right]_1^3 = \frac{2}{3} + \ln 3 + \frac{1}{3} - 1 = \ln 3$$

Un modo alternativo è considerare l'area sottesa come la somma dell'area sottesa dalla curva in [1,3] e da quella sottesa dalla tangente inflessionale in [3,9], cioè:

$$AREA = \int_1^3 \left(\frac{x-1}{x^2} \right) dx + \int_3^9 \left(\frac{1}{3} - \frac{x}{27} \right) dx = \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx + \int_3^9 \left(\frac{1}{3} - \frac{x}{27} \right) dx =$$

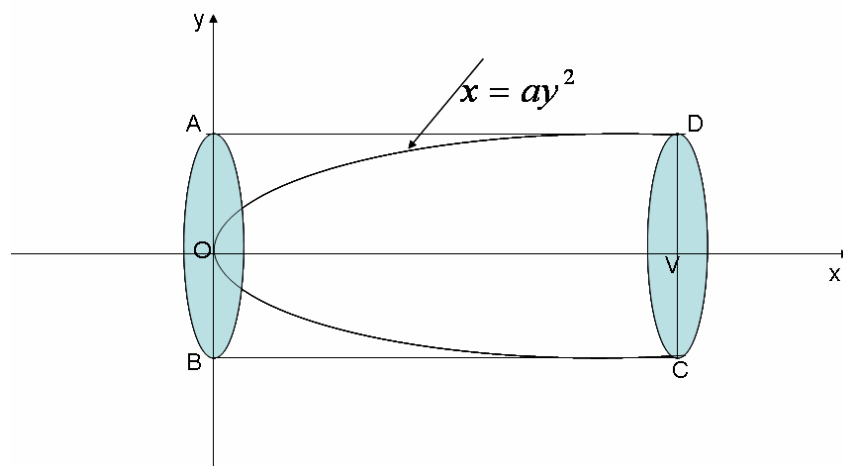
$$\left[\ln|x| + \frac{1}{x} \right]_1^3 + \left[\frac{x}{3} - \frac{x^2}{54} \right]_3^9 = \left[\ln 3 + \frac{1}{3} - 1 \right] + \left[3 - \frac{3}{2} - 1 + \frac{1}{6} \right] =$$

$$\left[\ln 3 - \frac{2}{3} \right] + \left[\frac{2}{3} \right] = \ln 3$$

QUESTIONARIO

1)

Si consideri la figura sottostante:



La parabola considerata ha l'asse delle ascisse come asse di simmetria per cui ha equazione $x = ay^2$ con $a > 0$. Per come illustrata la figura soprastante i punti A,B,C,D,V hanno coordinate generiche: $A = (0, b)$, $B = (0, -b)$, $C = (ab^2, b)$, $D = (ab^2, -b)$, $V = (ab^2, 0)$. Ora il volume V' non è altro che il volume del cilindro di figura di raggio di base b ed altezza ab^2 per cui $V' = \pi hr^2 = \pi ab^4$, mentre indicato con $y = \sqrt{\frac{x}{a}}$ la parte di grafico della parabola con ordinata positiva, si ha

$$V'' = \pi \int_0^{ab^2} \left(\sqrt{\frac{x}{a}} \right)^2 dx = \frac{\pi}{a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{ab^2} = \frac{\pi ab^4}{2} \text{ per cui } \frac{V'}{V''} = 2.$$

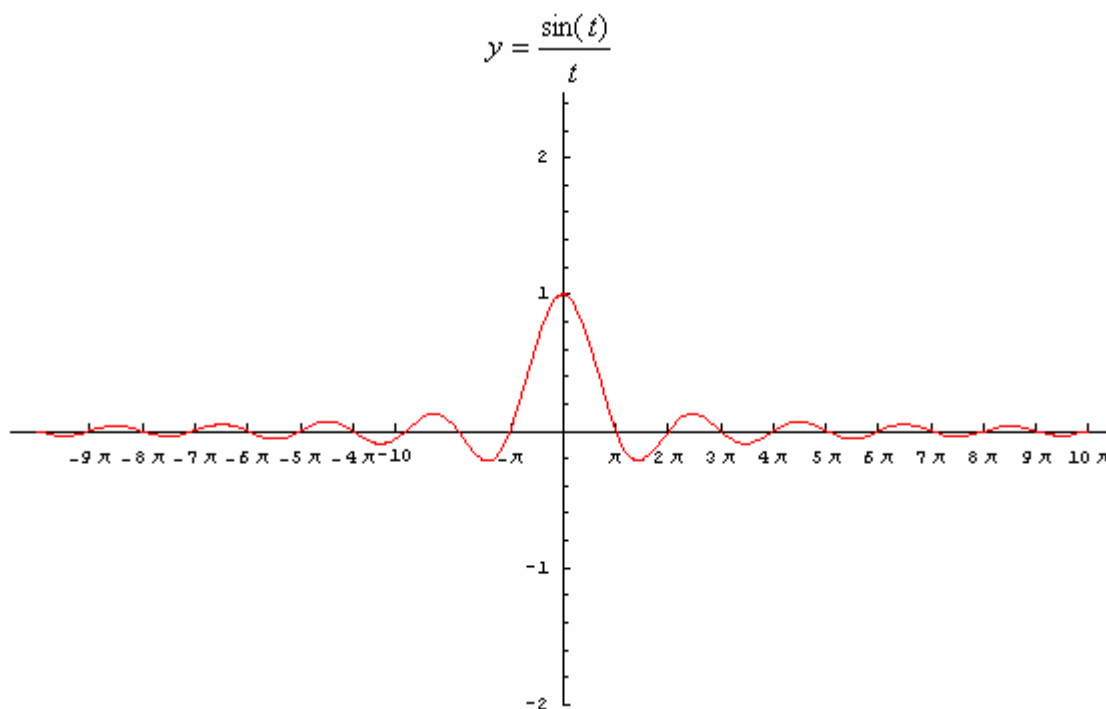
2)

L'equazione $\sin(2x)\cos(x) = 2$ non ha alcuna soluzione in $[0, 2\pi]$ visto che $\sin(2x) \leq 1, \cos(x) \leq 1 \Rightarrow \sin(2x)\cos(x) \leq 1$. Quindi la risposta esatta è A.

3)

Si ha $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ e forniamo due modi per dimostrarlo. In particolare dimostreremo che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ perché poi analogamente si dimostrerà $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$.

- Sostituzione $t = \frac{1}{x}$. In tal caso $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sin(t)}{t} = 0$ e ciò è di facile evidenza, notando il grafico della figura $y = \frac{\sin(t)}{t}$



▪ Teorema dei carabinieri

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \Rightarrow -x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x \text{ essendo } x > 0$$

per cui per il teorema dei carabinieri $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Analogamente $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$. La risposta esatta è quindi C.

4)

La funzione $y = x^a$ è definita per $x > 0$. Inoltre $y = x^a = e^{a \ln x} = f(g(x))$ con $f(x) = e^x$, $g(x) = a \ln x$. Ora $f(x), g(x)$ per $x > 0$ sono entrambe derivabili, allora anche la funzione da essi composta sarà derivabile, e per il teorema di derivazione delle funzioni composte

$$y' = g'(x) f'(g(x)) = \frac{a}{x} e^{a \ln x} = \frac{a}{x} x^a = ax^{a-1}.$$

5)

La proposizione inversa si enuncerebbe:

“Se una funzione di variabile reale, definita in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, è ivi integrabile, allora è ivi anche continua”

Questa proposizione è evidentemente falsa perché un controesempio è fornito dalle funzioni costanti a tratti del tipo

$$y = f(x) = \begin{cases} H & a \leq x < c \\ K \neq H & c < x \leq b \end{cases}$$

la quale non è continua in $x=c$ dal momento che $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = H \neq K = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ ma è ivi integrabile in quanto per la proprietà additiva degli integrali si ha

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^c Hdx + \int_c^b Kdx = H(b-a) + K(b-a) = (b-a)(H+K).$$

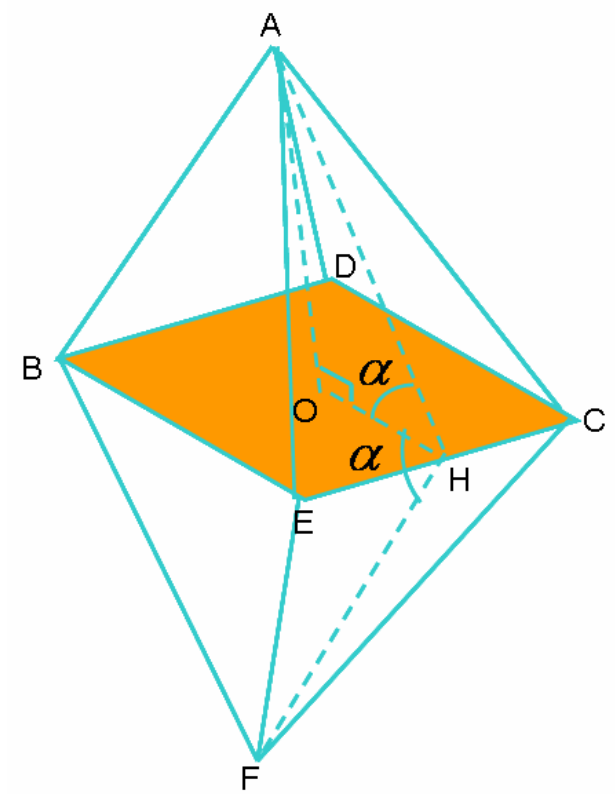
6)

Nell'ambito dei numeri reali \mathbb{R} , $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + k$ come evidentemente si dimostra calcolando le derivate delle funzioni $\ln(x), \ln(-x)$ che forniscono come risultato $\frac{1}{x}$. Se restringiamo l'analisi ad

\mathbb{R}^+ la $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + k$ risulta essere corretta.

7)

Si consideri l'ottaedro sotto rappresentato. Esso è costituito da un quadrato di base di lato 1 e da facce che sono triangoli equilateri. Sia AO la retta perpendicolare condotta da A al quadrato di base BEDC.



Per costruzione e simmetria $OH = \frac{l}{2}$, mentre AH, essendo l'altezza del triangolo equilatero AEC di lato 1 sarà $AH = \frac{l\sqrt{3}}{2}$. Ora il triangolo AOH è rettangolo per cui

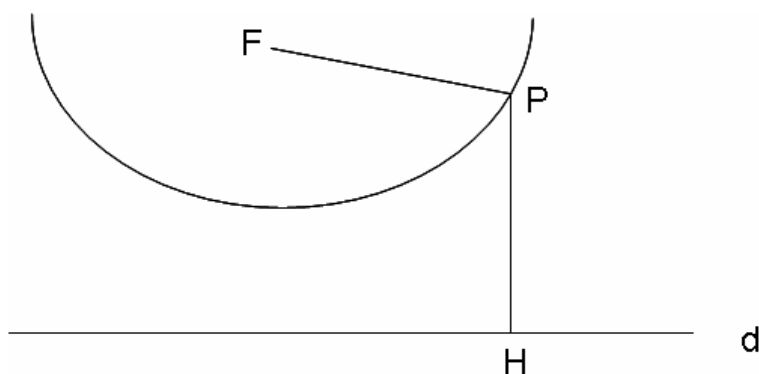
$$OH = AH \cos(\alpha) \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{OH}{AH} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cong 54^\circ 44'$$

da cui

$$2\alpha = 2 * 54^\circ 44' = 109^\circ 28'$$

8)

Ricordiamo che una parabola è il luogo dei punti che hanno la stessa distanza dal fuoco e da una retta chiamata direttrice. Cioè considerando la figura sottostante $PH=PF$.



Una similitudine presenta due proprietà sostanziali: trasforma rette perpendicolari in rette perpendicolari e conserva le distanze. Questo significa che se si indicano con F' , P' ed H' i trasformati secondo la similitudine e d' la nuova direttrice, si ha $\frac{P'F'}{P'H'} = \frac{PF}{PH} = 1 \Rightarrow P'F' = P'H'$; inoltre per la proprietà della trasformazione di rette perpendicolari in rette perpendicolari, anche la retta $P'H'$ sarà perpendicolare alla direttrice d' del nuovo luogo geometrico. Questo luogo però, viste le due proprietà ora dimostrate ($P'F' = P'H'$, $P'H'$ perpendicolare a d') non è altro che una parabola.

9)

Sia A l'evento $A = \{\text{pallina NON di plastica nera}\}$ e si indichi con $P(A)$ la sua probabilità.

Sappiamo che $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ dove $\bar{A} = \{\text{pallina di plastica nera}\}$

Innanzitutto le palline nere sono $150 - 62 = 88$ essendo presenti 62 palline bianche, cui vanno tolte quelle di vetro nere, ottenendo $88 - 38 = 50$. Per cui utilizzando l'interpretazione frequentista della probabilità, cioè intesa come rapporto tra casi favorevoli e totali, si ha

$$P(\bar{A}) = \frac{50}{150} = \frac{1}{3} \rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

10)

Affinché il cartoncino rimasto sia dello stesso colore estratto, il cartoncino può essere estratto da due delle tre buste. Per cui utilizzando l'interpretazione frequentista della probabilità, cioè intesa

come rapporto tra casi favorevoli e totali, si ha che la probabilità richiesta è $p = \frac{2}{3}$.