

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolve uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Un filo metallico di lunghezza λ viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.

a) Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:

b) la somma delle due aree sia minima?

c) la somma delle due aree sia massima?

Una aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

PROBLEMA 2

Si considerino le funzioni f e g determinate da $f(x) = \log x$ e $g(x) = ax^2$, essendo a un parametro reale e il logaritmo in base e .

1. Si discuta, al variare di a , l'equazione $\log x = ax^2$ e si dica, in particolare, per quale valore di a i grafici di f e g sono tra loro tangenti.
2. Si calcoli, posto $a = 1$, l'area della parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni f e g e dalle rette $x = 1$ e $x = 2$.
3. Si studi la funzione $h(x) = \log x - ax^2$ scegliendo per a un valore numerico maggiore di $\frac{1}{2e}$ e se ne disegni il grafico.

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

- Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64^a casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.
- I poliedri regolari – noti anche come *solidi platonici* – sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?
- Un foglio di carta deve contenere: un'area di stampa di 50 cm^2 , margini superiore e inferiore di 4 cm e margini laterali di 2 cm . Quali sono le dimensioni del foglio di carta di area minima che si può utilizzare?
- La capacità di un serbatoio è pari a quella del cubo inscritto in una sfera di un metro di diametro. Quanti sono, approssimativamente, i litri di liquido che può contenere il serbatoio?
- Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- L'equazione risolvente un dato problema è: $k \cos 2x - 5k + 2 = 0$ dove k è un parametro reale e x ha le seguenti limitazioni: $15^\circ < x < 45^\circ$. Si discuta per quali valori di k le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.
- La funzione $f(x) = x^3 - 2x^2$ soddisfa le condizioni del teorema di *Lagrange* nell'intervallo $[0,1]$? Se sì, trova il punto ξ che compare nella formula

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$
- La funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$ assume valori di segno opposto negli estremi dell'intervallo $I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \right]$, eppure non esiste alcun $x \in I$ tale che $f(x) = 0$. È così? Perché?
- Della funzione $f(x)$ si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che: $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. Puoi determinare $f(x)$?
- La funzione $f(x) = a \operatorname{sen} x + b \operatorname{cos} x$ ha un estremo relativo per $x = \frac{4\pi}{3}$ ed è $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1$.
Si trovino a e b e si dica quale è il periodo di $f(x)$.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

*Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.***PROBLEMA 1**

Un filo metallico di lunghezza λ viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.

a) Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:

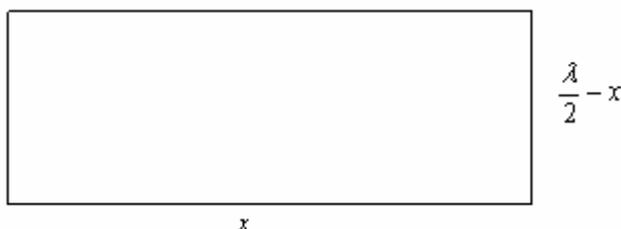
b) la somma delle due aree sia minima?

c) la somma delle due aree sia massima?

Una aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

SOLUZIONE DI DE ROSA NICOLA

a)



L'area è:

$$A(x) = x \cdot \left(\frac{\lambda}{2} - x \right) = \frac{\lambda x}{2} - x^2, 0 \leq x \leq \frac{\lambda}{2}$$

Calcoliamo la derivata prima e seconda :

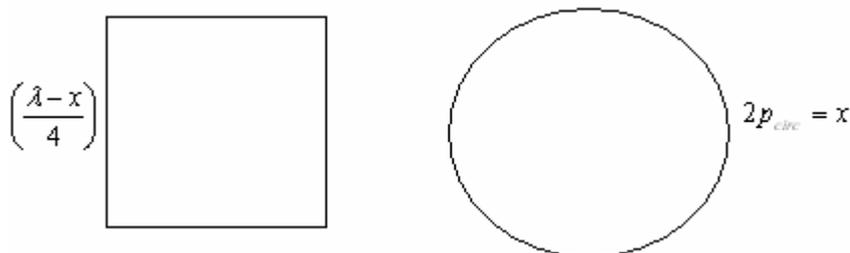
$$A'(x) = \frac{\lambda}{2} - 2x > 0 \rightarrow x < \frac{\lambda}{4}$$

$$A''(x) = -2 < 0 \forall x \rightarrow x = \frac{\lambda}{4} \text{ è l'ascissa del massimo, per cui}$$

$$A_{\max} = A(x_{\max}) = A\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{\lambda^2}{16} \text{ cioè l'area massima la si ha in corrispondenza di un quadrato}$$

Ora suddividiamo il perimetro in due:

$2p_{circ} = x$ è il perimetro dell'aiuola circolare e $2p_q = \lambda - x$ quello del quadrato



Con queste convenzioni si ha che il lato del quadrato è $\left(\frac{\lambda - x}{4}\right)$ per cui l'area è $A_q(x) = \left(\frac{\lambda - x}{4}\right)^2$

mentre il raggio del cerchio sarà $\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ per cui l'area sarà $A_c(x) = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = \frac{x^2}{4\pi}$

per cui l'area totale sarà

$$A_{tot}(x) = \left(\frac{\lambda - x}{4}\right)^2 + \frac{x^2}{4\pi}, 0 \leq x \leq \lambda$$

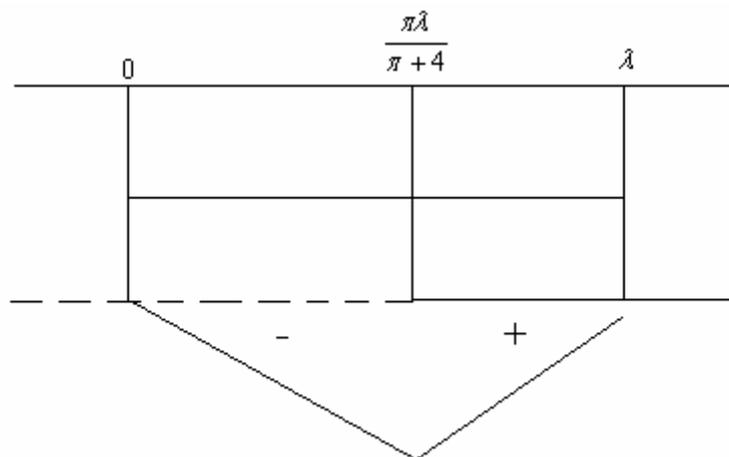
b)

Ora si calcolano le derivate della funzione $A_{tot}(x)$:

$$A'_{tot}(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda - x}{4}\right) + \left(\frac{x}{2\pi}\right) = \left(\frac{x - \lambda}{8}\right) + \left(\frac{x}{2\pi}\right) = \frac{x(\pi + 4) - \pi\lambda}{8\pi} > 0 \rightarrow x > \frac{\pi\lambda}{\pi + 4}$$

$$A''_{tot}(x) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi} > 0$$

La situazione è sotto rappresentata:



Dal grafico soprastante si evince che l'area minima la si ha per $x = \frac{\pi\lambda}{\pi+4}$ in corrispondenza della quale si ricava

$$A_{tot, \min} = A\left(\frac{\pi\lambda}{\pi+4}\right) = \left(\frac{\lambda - \frac{\pi\lambda}{\pi+4}}{4}\right)^2 + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\pi\lambda}{\pi+4}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{(\pi+4)^2} + \frac{\lambda^2\pi}{4(\pi+4)^2} = \frac{\lambda^2(\pi+4)}{4(\pi+4)^2} = \frac{\lambda^2}{4(\pi+4)}$$

c)

Vediamo l'area massima: in tal caso il massimo lo si raggiunge agli estremi dell'intervallo cioè per $x = 0, x = \lambda$.

Ora

$$A_{tot}(x=0) = \frac{\lambda^2}{16},$$

$$A_{tot}(x=\lambda) = \frac{\lambda^2}{4\pi} > \frac{\lambda^2}{16} = A_{tot}(x=0)$$

Per cui l'area massima la si ha per $x = \lambda$ ed è $A_{tot, \max} = \frac{\lambda^2}{4\pi}$

d)

Il volume di un parallelepipedo è dato dal prodotto delle tre dimensioni, cioè

$$V_{parallelepipedo} = l_1 l_2 l_3$$

Se si aumentano le dimensioni del 10% si ha:

$$V'_{parallelepipedo} = 1.1l_1 * 1.1l_2 * 1.1l_3 = 1.331 * l_1 l_2 l_3 = 1.331 V_{parallelepipedo}$$

Per cui l'incremento percentuale del volume è del 33.1% .

PROBLEMA 2

Si considerino le funzioni f e g determinate da $f(x) = \log x$ e $g(x) = ax^2$, essendo a un parametro reale e il logaritmo in base e .

1. Si discuta, al variare di a , l'equazione $\log x = ax^2$ e si dica, in particolare, per quale valore di a i grafici di f e g sono tra loro tangenti.
2. Si calcoli, posto $a = 1$, l'area della parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni f e g e dalle rette $x = 1$ e $x = 2$.
3. Si studi la funzione $h(x) = \log x - ax^2$ scegliendo per a un valore numerico maggiore di $\frac{1}{2e}$ e se ne disegni il grafico.

SOLUZIONE DI De Rosa Nicola

1)

Per essere tangenti le due funzioni devono avere la stessa tangente in (x_0, y_0)

L'equazione di tale tangente è: $y - y_0 = m(x - x_0)$

Ora bisogna imporre l'uguaglianza tra i due coefficienti angolari ricavati tramite la derivata delle due funzioni in x_0

$$m = f'(x_0) = g'(x_0) \Rightarrow \frac{1}{x_0} = 2ax_0 \Rightarrow a = \frac{1}{2x_0^2} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x_0} \right)^2$$

Inoltre poichè (x_0, y_0) appartiene ad entrambe deve aversi che

$$f(x_0) = g(x_0) \Rightarrow \ln(x_0) = 0.5 \Rightarrow x_0 = \sqrt{e} \Rightarrow a = \frac{1}{2e}$$

Ora facciamo qualche considerazione :

se $a > \frac{1}{2e}$ **le intersezioni non esistono**

se $0 < a < \frac{1}{2e}$ **le intersezioni esistono e sono due**

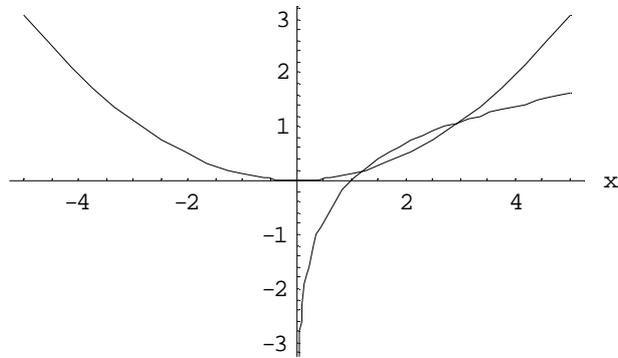
se $a < 0$ **esiste una sola intersezione**

Infatti se $a > \frac{1}{2e} > 0$ la parabola $g(x)$ corrispondente si stringe sempre di più, si allontana rapidamente dalla funzione $f(x)$ visto che il valore di a è positivo, ed al limite per $a \rightarrow +\infty$ diventa un impulso centrato in $x = 0$

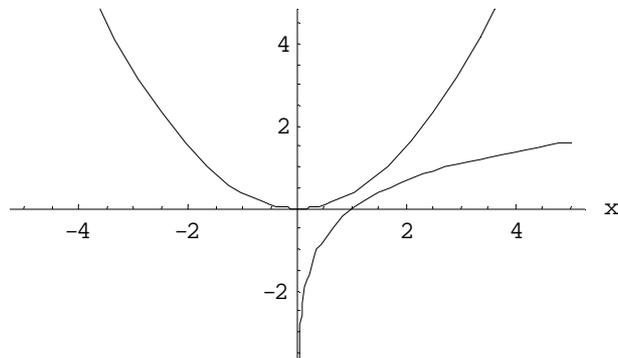
Se $a < 0$ la parabola cambia concavità, sarà ora rivolta verso il basso e l'intersezione corrispondente sarà una sola
Come esempio presentiamo tre casi ed i corrispondenti grafici dati dalla sovrapposizione dei grafici di $f(x)$ e $g(x)$

rispettivamente per $a = \frac{1}{3e}, \frac{1}{e}, -1$

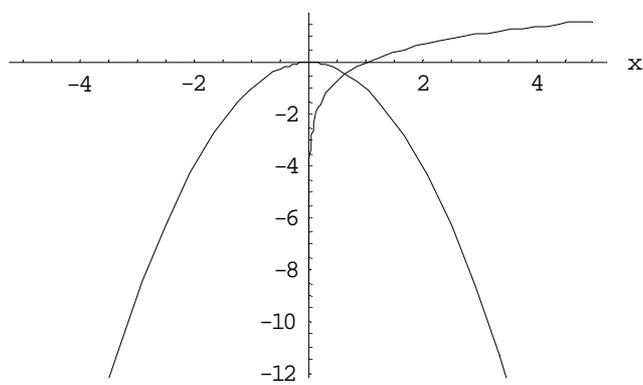
$$f(x) = \ln(x) \quad g(x) = \frac{x^2}{3 * e}$$



$$f(x) = \ln(x) \quad g(x) = \frac{x^2}{e}$$

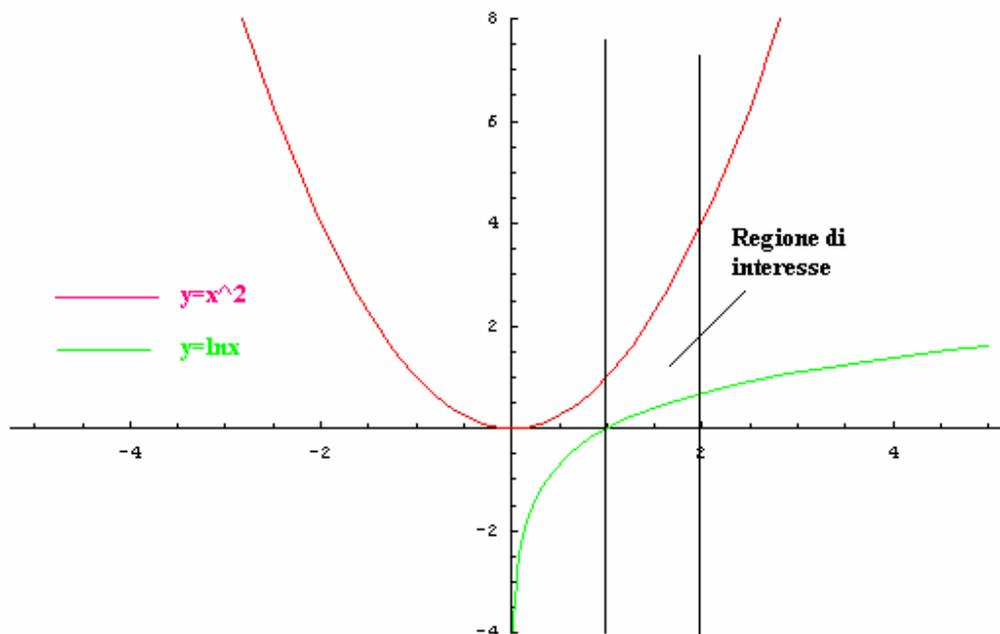


$$f(x) = \ln(x) \quad g(x) = -x^2$$



2)

Consideriamo la figura seguente:



Prima di calcolare l'area di interesse bisogna richiamare il calcolo dell'integrazione per parti applicato al nostro caso:

$$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - \int x \cdot \left(\frac{d(\ln(x))}{dx} \right) dx = x \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - \int dx = x \ln(x) - x + K = x(\ln(x) - 1) + K$$

L'area cercata è:

$$\int_1^2 [-\ln(x) + x^2] dx = \left[-x(\ln(x) - 1) + \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = -2(\ln 2 - 1) + \frac{8}{3} - 1 - \frac{1}{3} = -2\ln 2 + \frac{10}{3}$$

3)

$$h(x) = \ln(x) - ax^2$$

$$\text{Dominio: } x \in (0, +\infty)$$

Non ci sono intersezioni con gli assi, nè x nè y dal momento che $a > \frac{1}{2e}$

Positività: $h(x) < 0 \forall x \in (0, +\infty)$ dal momento che $\ln(x)$ sta sempre al di sotto della parabola

Asintoti verticali: $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty$$

Non ci sono asintoti orizzontali. Infatti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{e^{ax^2}}\right) = \ln\left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^{ax^2}}\right)\right] = \ln(0) = -\infty \text{ sfruttando de l'Hopital ed essendo } a > \frac{1}{2e} > 0$$

Non ci sono asintoti obliqui. Infatti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = -\infty$$

Crescenza e decrescenza :

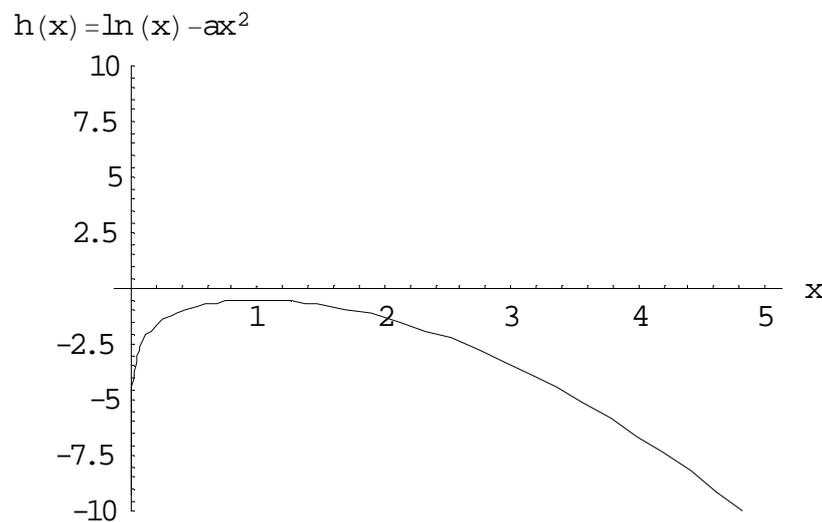
$$h'(x) = \frac{1}{x} - 2ax = \frac{1 - 2ax^2}{x}$$

$$h'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2a}}\right)$$

$$h''(x) = -\frac{1}{x^2} - 2a, \quad h''\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right) = -4a < 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2a}}, \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right) - 0.5\right) \text{ è un massimo}$$

Inoltre poichè per ipotesi $a > \frac{1}{2e} > 0$, allora $h''(x) < 0 \forall x \in D = (0, +\infty) \Rightarrow$ non ci sono flessi

Il grafico è questo:



Se scegliamo ad esempio $a=1/2$, allora il massimo è $(1, -0.5)$.

Al crescere del valore a , l'ascissa del massimo si sposta e tende a diventare sempre più piccola

SOLUZIONI DI De Rosa Nicola*QUESTIONARIO*

1. Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64^a casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.

Soluzione

Il numero N dei chicchi di grano è:

$$N = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} = \sum_{n=0}^{63} 2^n$$

Siamo quindi in presenza di una serie geometrica di ragione 2.

Ricordando che una serie geometrica di ragione q ha somma $\sum_{n=0}^M q^n = \frac{q^{M+1} - 1}{q - 1}$, in tal caso si ha

$$N = \sum_{n=0}^{63} 2^n = \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1$$

Quindi il peso degli $N = 2^{64} - 1$ è

$$P = \frac{(2^{64} - 1)}{1000} * 38 \text{ grammi} = \frac{(2^{64} - 1)}{1000} * 38 * 10^{-6} \text{ tonnellate} = \frac{(2^{64} - 1)}{10^9} * 38 \text{ tonnellate}$$

2. I poliedri regolari – noti anche come *solidi platonici* – sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?

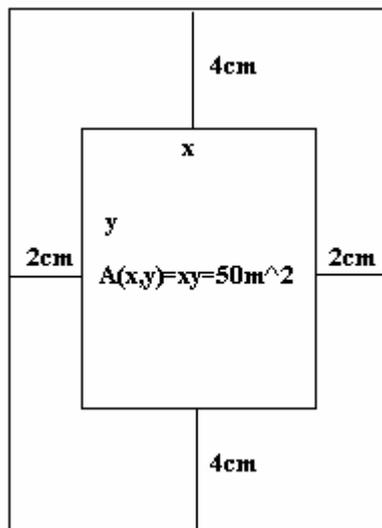
Soluzione

Un poliedro si dice regolare se le sue facce sono poligoni regolari congruenti e i suoi angoloidi sono congruenti tra loro. La somma degli angoli di una faccia dell'angoloide è minore di un angolo giro. e le facce sono triangoli equilateri si possono avere tre tipi di poliedri: infatti $3 * 60^\circ = 180^\circ$, $4 * 60^\circ = 240^\circ$, $5 * 60^\circ = 300^\circ$; se le facce sono quadrati si può avere un solo poliedro perché $3 * 90^\circ = 270^\circ$; se sono pentagoni si può avere un solo poliedro perché $3 * 108^\circ = 324^\circ$.

Si dimostra che tali poliedri esistono.

3. Un foglio di carta deve contenere: un'area di stampa di 50 cm^2 , margini superiore e inferiore di 4 cm e margini laterali di 2 cm . Quali sono le dimensioni del foglio di carta di area minima che si può utilizzare?

Soluzione



L'area del foglio, considerando la figura soprastante è:

$$S(x, y) = (y + 8)(x + 4) = xy + 4y + 8x + 32, x \geq 0, y \geq 0$$

Per ipotesi si sa che $xy = 50 \rightarrow y = \frac{50}{x}$ e sostituendo in $S(x, y)$ si ha:

$$S\left(x, \frac{50}{x}\right) = xy + 4y + 8x + 32 = 50 + \frac{200}{x} + 8x + 32$$

Ora se ne calcola la derivata ottenendo:

$$S'(x) = -\frac{200}{x^2} + 8 = \frac{8(x^2 - 25)}{x^2}$$

$$S''(x) = \frac{400}{x^3}$$

Ora per studiare il segno della derivata prima, poiché $x^2 > 0 \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$, basta studiare il segno del fattore $(x^2 - 25)$, per cui

$$S'(x) = \frac{8(x^2 - 25)}{x^2} > 0 \rightarrow (x^2 - 25) > 0 \rightarrow x < -5 \cup x > 5 \text{ e poichè deve aversi } x \geq 0 \text{ si ha}$$

$$S'(x) > 0 \rightarrow x > 5.$$

$$\text{Inoltre } S''(x = 5) = \frac{400}{125} = \frac{16}{3} > 0 \rightarrow x = 5 \text{ garantisce l'area minima}$$

$$\text{in corrispondenza della quale si ha } y = \frac{50}{5} = 10$$

Per cui le dimensioni del foglio che garantiscono l'area minima sono

$$(10 + 8)cm = 18cm \text{ e } (5 + 4)cm = 9cm$$

4. La capacità di un serbatoio è pari a quella del cubo inscritto in una sfera di un metro di diametro. Quanti sono, approssimativamente, i litri di liquido che può contenere il serbatoio?

Soluzione

Un cubo inscritto in una sfera ha come diagonale il diametro della sfera. Ricordando la relazione tra diagonale e lato di un cubo si ha che il lato è:

$$lato = l = \frac{diagonale}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}m$$

Per cui il volume del cubo è $V = l^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}}m^3 = \frac{1000}{3\sqrt{3}}dm^3$

5. Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a + b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione

Ricordiamo la formula del binomio di Newton:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

E ponendo in essa $a=b=1$ si ricava:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

6. L'equazione risolvente un dato problema è: $k \cos 2x - 5k + 2 = 0$ dove k è un parametro reale e x ha le seguenti limitazioni: $15^\circ < x < 45^\circ$. Si discuta per quali valori di k le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.

Soluzione

Riscriviamo l'equazione risolvente in questo modo:

$$\cos(2x) = \frac{5k - 2}{k}$$

Ora, dire $15^\circ < x < 45^\circ$ è equivalente a dire $30^\circ < 2x < 90^\circ$, e poiché il coseno è una funzione decrescente nell'intervallo $30^\circ < 2x < 90^\circ$, allora vale la seguente:

$$30^\circ < 2x < 90^\circ \rightarrow \cos(90^\circ) < \cos(2x) = \frac{5k-2}{k} < \cos(30^\circ) \rightarrow 0 < \frac{5k-2}{k} < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Quindi va risolto il sistema seguente:

$$\begin{cases} \frac{5k-2}{k} > 0 \\ \frac{5k-2}{k} < \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5k-2}{k} > 0 \\ \frac{k(10-\sqrt{3})-4}{2k} < 0 \end{cases}$$

Le due disequazioni si risolvono ognuna col classico metodo del falso sistema e le soluzioni sono:

$$\begin{cases} \frac{5k-2}{k} > 0 \\ \frac{k(10-\sqrt{3})-4}{2k} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k < 0 \cup k > \frac{2}{5} \\ 0 < k < \frac{4}{10-\sqrt{3}} \end{cases}$$

E prendendo le soluzioni comuni, il sistema è soddisfatto per $\frac{2}{5} < k < \frac{4}{10-\sqrt{3}}$ come evidenzia la figura sotto



7. La funzione $f(x) = x^3 - 2x^2$ soddisfa le condizioni del teorema di Lagrange nell'intervallo $[0,1]$? Se sì, trova il punto ξ che compare nella formula

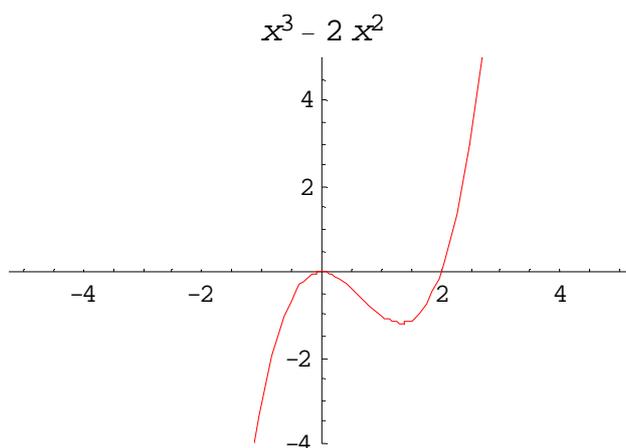
$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

Soluzione

La funzione

$f(x) = x^3 - 2x^2$ è una funzione continua e derivabile su tutto \mathbb{R} , che presenta un massimo in $(0,0)$,

un minimo in $\left(\frac{4}{3}, -\frac{32}{27}\right)$ ed un flesso in $\left(\frac{2}{3}, -\frac{16}{27}\right)$. Quindi soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange.



Ora possiamo applicare il teorema:

$$f(1) = -1, f(0) = 0, f'(x = \xi) = (3x^2 - 4x)_{x=\xi} = 3\xi^2 - 4\xi$$

Per cui l'equazione della traccia comporta:

$$3\xi^2 - 4\xi = \frac{-1}{1} = -1 \rightarrow 3\xi^2 - 4\xi + 1 = 0 \rightarrow (3\xi - 1)(\xi - 1) = 0 \rightarrow \xi = \frac{1}{3}, \xi = 1$$

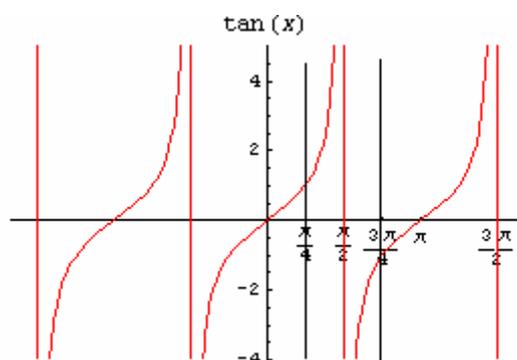
Ed il valore accettabile, che ricade nell'intervallo $(0,1)$ è $\xi = \frac{1}{3}$.

8. La funzione $f(x) = \operatorname{tg}x$ assume valori di segno opposto negli estremi dell'intervallo

$$I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right], \text{ eppure non esiste alcun } x \in I \text{ tale che } f(x) = 0. \text{ È così? Perché?}$$

Soluzione

Rappresentiamo innanzitutto la funzione $y = \operatorname{tg}(x)$:



Effettivamente, come si evince dal grafico, nell'intervallo $I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$ la funzione non si annulla

mai, eppure la funzione assume agli estremi valori unitari e discordi. Quindi il teorema degli zeri prevederebbe un valore interno all'intervallo in cui la funzione si annullerebbe. In questo caso però

il suddetto teorema non è applicabile dal momento che la funzione nell'intervallo $I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$ non è continua, avendo una discontinuità di terza specie in $x = \frac{\pi}{2} \in I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$.

9. Della funzione $f(x)$ si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che: $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. Puoi determinare $f(x)$?

Soluzione

La funzione può essere determinata, ed è tra l'altro anche unica. Infatti il problema proposto non è altro che il classico problema di Cauchy

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

che sotto alcune ipotesi, si dimostra fornire un'unica soluzione.

Per calcolarla basta ricordare le equazioni differenziali a variabili separabili: infatti l'equazione differenziale $f'(x) = f(x)$, supponendo $f(x) \neq 0$ si può riscrivere come:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1$$

Ed integrando ambo i membri in dx si ricava:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int dx \text{ cioè } \ln|f(x)| = x + k$$

Quindi il problema iniziale diventa:

$$\begin{cases} \ln|f(x)| = x + k \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Dalla prima, per $x=0$, si ricava $\ln|f(0)| = k$ e ricordando che la condizione iniziale impone $f(0) = 1$, allora si ricava $k = \ln 1 = 0$, per cui infine si ricava:

$$\ln|f(x)| = x \rightarrow |f(x)| = e^x \rightarrow f(x) = \pm e^x$$

In cui va scartata la soluzione $f(x) = -e^x$ perché non soddisfa la condizione iniziale.

In conclusione la soluzione esiste, è unica ed è l'autofunzione $f(x) = e^x$

10. La funzione $f(x) = a \sin x + b \cos x$ ha un estremo relativo per $x = \frac{4\pi}{3}$ ed è $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1$.
Si trovino a e b e si dica quale è il periodo di $f(x)$.

Soluzione

$f'(x) = a \cos(x) - b \sin(x)$ per cui imponendo le due condizioni bisogna risolvere il sistema seguente:

$$\begin{cases} a \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + b \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 \\ a \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - b \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{b}{2} = 1 \\ -\frac{a}{2} + \frac{b\sqrt{3}}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\sqrt{3} - b = 2 \\ a = b\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = 1 \end{cases}$$

Da cui si ricava :

$$f(x) = \sqrt{3} \sin(x) + \cos(x) \text{ il cui periodo è } T = 2\pi$$