

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Corso sperimentale

Sessione straordinaria 2006 – Tema di Matematica

*Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.***PROBLEMA 1**

È dato il triangolo ABC in cui:

$$\overline{AB} = \frac{25}{2}, \overline{AC} = 5\sqrt{5}, \tan(\hat{A}) = 2$$

Determinare l'altezza del triangolo relativa al lato AB e tracciare la circonferenza k avente centro in C e tangente al lato AB.

Dopo aver riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali, in modo, però, che uno degli assi di riferimento sia parallelo alla retta AB:

- scrivere l'equazione della circonferenza k;
- trovare le coordinate dei vertici del triangolo e del punto D in cui la circonferenza k interseca il segmento BC;
- determinare l'equazione della parabola p, avente l'asse perpendicolare alla retta AB, tangente in D alla circonferenza k e passante per A;
- calcolare le aree delle due regioni in cui la parabola p divide il triangolo ABC;
- trovare, infine, le coordinate dei punti comuni alla circonferenza k ed alla parabola p.

PROBLEMA 2

Si considerino i polinomi di 5° grado, nella variabile x, con coefficienti reali, i cui grafici, rappresentati in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono simmetrici

rispetto all'origine O ed hanno un massimo relativo nel punto $\left(-2, \frac{64}{15}\right)$

- Trovare l'equazione $y=f(x)$ dei grafici suddetti.
- Dimostrare che tali grafici hanno tre punti in comune, in due dei quali hanno anche la stessa tangente.
- Indicare con γ il grafico avente come tangente inflessionale l'asse x e disegnarne l'andamento.
- Indicato con $P(x)$ il polinomio rappresentato da γ e chiamati u e v ($u < v$) le ascisse dei punti, distinti da O, in cui γ interseca l'asse x, calcolare:

$$\int_u^v P(x) dx$$

e) Dopo aver controllato che γ ha tre flessi allineati, determinare le ascisse dei punti in cui la retta dei flessi interseca γ .

QUESTIONARIO

1. È assegnato un pentagono regolare di lato lungo L . Recidendo opportunamente, in esso, cinque triangoli congruenti, si ottiene un decagono regolare: calcolarne la lunghezza del lato. (*Si lascino indicate le funzioni goniometriche degli angoli coinvolti*).

2. Una piramide quadrangolare regolare è tale che la sua altezza è il doppio dello spigolo di base. Calcolare il rapporto fra il volume del cubo inscritto nella piramide e il volume della piramide stessa.

3. Se le funzioni $f(x)$ e $g(x)$, entrambe tendenti a 0, quando $x \rightarrow a$, non soddisfano alle condizioni previste dal teorema di De L'Hôpital, non è possibile calcolare il limite di $\frac{f(x)}{g(x)}$ quando $x \rightarrow a$. È vero o è falso? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

4. Il limite della funzione $f(x) = x - \ln x$, per $x \rightarrow +\infty$:

[A] è 0; [B] è un valore finito diverso da 0; [C] è $+\infty$; [D] è $-\infty$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

5. Il limite della funzione $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$, per $x \rightarrow 0$, è uguale ad 1. Si chiede di calcolarlo senza ricorrere alla regola di De L'Hôpital.

6. Si ricorda la seguente definizione: «Considerata una funzione reale di variabile reale $f(x)$, definita in un intervallo I , ogni funzione $F(x)$, derivabile in I e tale che $F'(x) = f(x)$, si dice primitiva di $f(x)$ in I ». Stabilire se la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

ammette primitiva nell'intervallo $[1, 3]$.

7. Giustificare, con considerazioni analitiche o mediante un'interpretazione grafica, che la seguente equazione:

$$x^5 + x^3 + 1 = 0$$

ammette una ed una sola soluzione reale. Trovare, quindi, l'intervallo $[z, z + 1]$ al quale appartiene tale soluzione, essendo z un numero intero.

8. Descrivere un algoritmo idoneo a calcolare un valore approssimato, a meno di 10^{-3} , della soluzione reale della precedente equazione.

9. Si considerino le seguenti equazioni:

$$x' = a x - (a - 1) y + 1, y' = 2 a x + (a - 1) y + 2,$$

dove a è un parametro reale.

Determinare i valori di a per cui le equazioni rappresentano: 1) un'affinità, 2) un'affinità equivalente (si ricorda che un'affinità si dice *equivalente* se conserva le aree).

10. Una classe è formata da 28 alunni, di cui 16 femmine e 12 maschi. Fra le femmine ci sono due “Maria” e fra i maschi un solo “Antonio”. Si deve formare una delegazione formata da due femmine e due maschi. Quanto vale la probabilità che la delegazione comprenda “Antonio” e almeno una “Maria”?

PROBLEMA 1

È dato il triangolo ABC in cui:

$$\overline{AB} = \frac{25}{2}, \overline{AC} = 5\sqrt{5}, \tan(\hat{A}) = 2$$

Determinare l'altezza del triangolo relativa al lato AB e tracciare la circonferenza k avente centro in

C e tangente al lato AB.

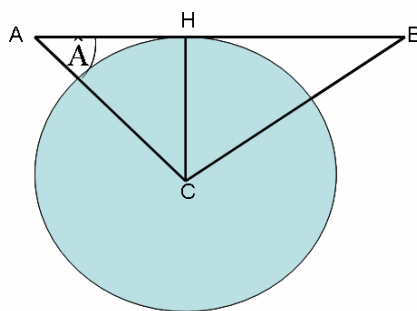
Dopo aver riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali, in

modo, però, che uno degli assi di riferimento sia parallelo alla retta AB:

Punto a

scrivere l'equazione della circonferenza k;

Consideriamo la figura seguente:



Applichiamo la teoria trigonometrica al triangolo rettangolo ACH:

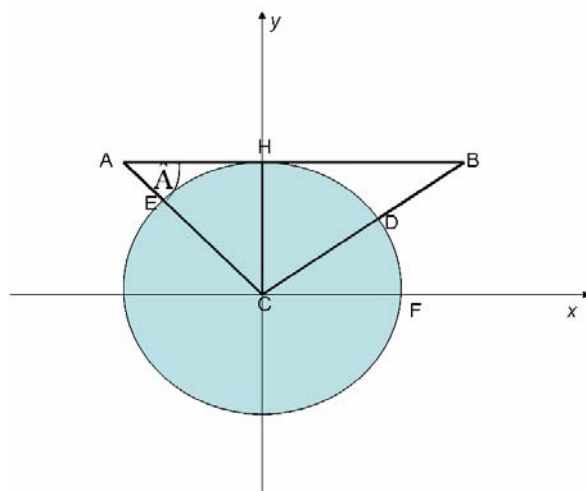
$$\overline{CH} = \overline{AH} \cdot \tan(\hat{A}) = 2\overline{AH}$$

Ora essendo il triangolo ACH rettangolo per il teorema di Pitagora si ha:

$$\overline{AH}^2 + \overline{CH}^2 = \overline{AC}^2 \rightarrow \frac{\overline{CH}^2}{4} + \overline{CH}^2 = 125 \rightarrow \overline{CH}^2 = 100 \rightarrow \overline{CH} = 10 \rightarrow \overline{AH} = 5$$

Il sistema di riferimento più immediato e conveniente consiste nel prendere C come origine, per cui la circonferenza con centro nell'origine C e raggio $\overline{CH} = 10$ ha equazione

$$k : x^2 + y^2 = r^2 = 100$$



Punto b

trovare le coordinate dei vertici del triangolo e del punto D in cui la circonferenza k interseca il segmento BC;

Calcolo del punto D: lo ricaviamo dall'intersezione della retta CB con la circonferenza.

Calcoliamo la retta BC: essa passante per il centro (0,0) ha equazione

$$y = mx,$$

$$m = \frac{\overline{CH}}{\overline{HB}} = \frac{10}{\frac{25}{2} - 5} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$

Quindi:

$$D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases} \rightarrow x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 100 \rightarrow \frac{25}{9}x^2 = 100 \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = \pm 6 \rightarrow y = \pm 8$$

per cui si ha $D = (6,8)$. Inoltre nel sistema di riferimento scelto B ha coordinate $B = \left(\frac{15}{2}, 10\right)$ ed A ha coordinate $A = (-5, 10)$

Punto c

determinare l'equazione della parabola p, avente l'asse perpendicolare alla retta AB, tangente in D alla circonferenza k e passante per A;

Equazione della parabola: $y = ax^2 + bx + c$

Il passaggio per $A = (-5, 10)$ impone: $25a - 5b + c = 10$

Il passaggio per $D = (6, 8)$ impone: $36a + 6b + c = 8$

Il coefficiente angolare della tangente in $D = (6,8)$ alla parabola è :

$$m = y'(x=6) = (2ax + b)_{x=6} = 12a + b$$

Ma tale tangente è certamente perpendicolare alla retta BC, per cui il suo coefficiente angolare sarà

$$m = -\frac{1}{\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4} \text{ per cui la condizione sulla tangenza impone } 12a + b = -\frac{3}{4}.$$

Bisogna allora risolvere il sistema di tre equazioni in tre incognite seguente:

$$\begin{cases} 25a - 5b + c = 10 \\ 36a + 6b + c = 8 \\ 12a + b = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni, sottraendo una dall'altra, eliminiamo la dipendenza da c ottenendo

$$11a + 11b = -2$$

E ricavando il parametro b dalla terza equazione si ha:

$$11a + 11\left(-12a - \frac{3}{4}\right) = -2 \rightarrow 11a - 132a - \frac{33}{4} = -2 \rightarrow -121a = \frac{25}{4} \rightarrow a = -\frac{25}{484}$$

da cui

$$b = -12a - \frac{3}{4} = \frac{300}{484} - \frac{3}{4} = -\frac{63}{484}$$

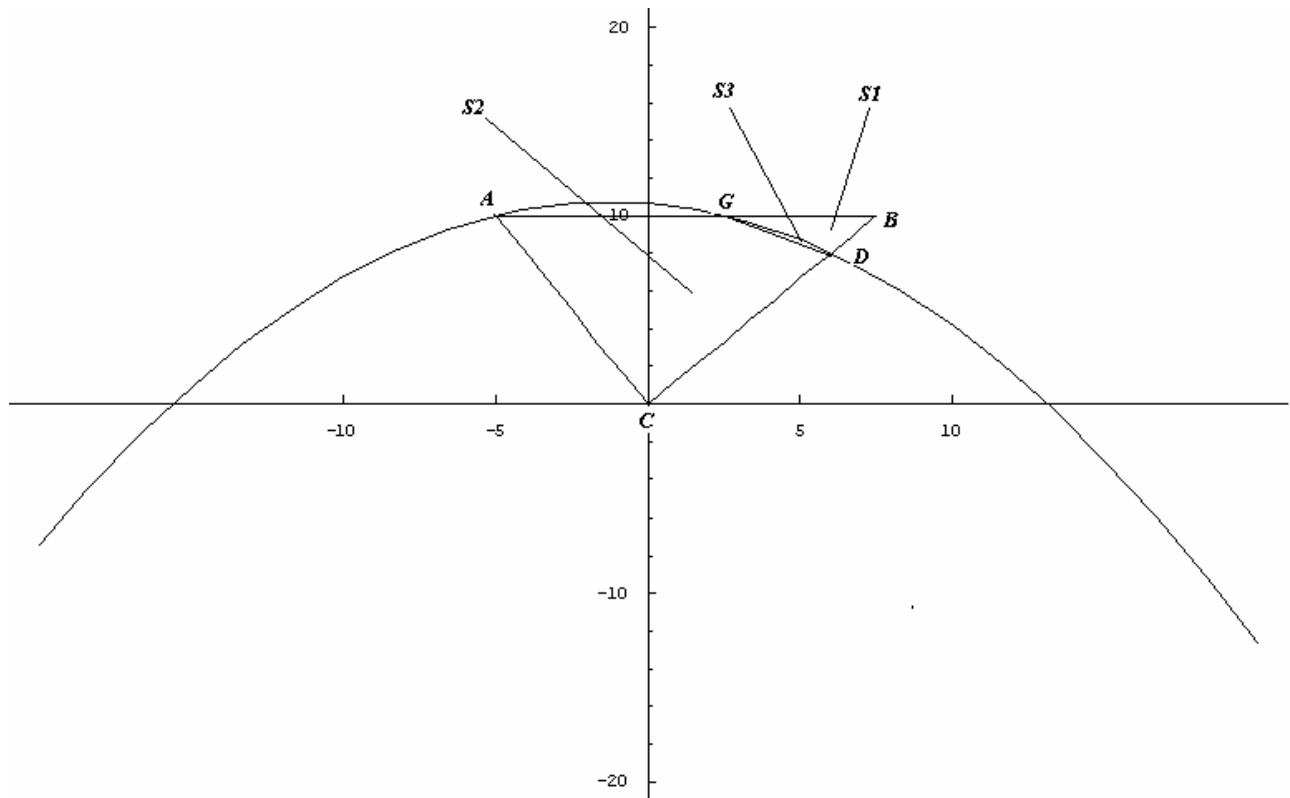
$$c = 10 + 5b - 25a = 10 - \frac{315}{484} + \frac{625}{484} = \frac{5150}{484}$$

$$\text{Per cui l'equazione della parabola è: } y = -\frac{25}{484}x^2 - \frac{63}{484}x + \frac{5150}{484}$$

Punto d

calcolare le aree delle due regioni in cui la parabola p divide il triangolo ABC;

Consideriamola figura sottostante:



Iniziamo a calcolare il punto G di intersezione tra la parabola e la retta di equazione $y=10$: bisogna risolvere l'equazione

$$-\frac{25}{484}x^2 - \frac{63}{484}x + \frac{5150}{484} = 10 \rightarrow 25x^2 + 63x - 310 = 0 \rightarrow x = \frac{-63 \pm 187}{50} \rightarrow x_1 = -5, x_2 = \frac{62}{25}$$

per cui $G = \left(\frac{62}{25}, 10\right)$

Calcoliamo ora l'equazione della retta GD:

$$GD: \frac{y-10}{8-10} = \frac{x-\frac{62}{25}}{6-\frac{62}{25}} \rightarrow y = 10 - \frac{25}{44} \left(x - \frac{62}{25}\right) = -\frac{25}{44}x + \frac{251}{22}$$

Ora l'area

$$S_1 = A_{BGD} - S_3$$

$$S_2 = A_{ABC} - S_1$$

Quindi:

$$A_{BGD} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$b = \frac{15}{2} - \frac{62}{25} = \frac{251}{50}$$

$$h = 10 - 8 = 2$$

Per cui $A_{BGD} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{251}{50}$

$$S_3 = \int_{\frac{62}{25}}^6 \left[\left(-\frac{25}{484}x^2 - \frac{63}{484}x + \frac{5150}{484} \right) - \left(-\frac{25}{44}x + \frac{251}{22} \right) \right] dx =$$

$$\int_{\frac{62}{25}}^6 \left[\left(-\frac{25}{484}x^2 + \frac{212}{484}x - \frac{372}{484} \right) \right] dx = \frac{1}{484} \left[-\frac{25}{3}x^3 + 106x^2 - 372x \right]_{\frac{62}{25}}^6 =$$

$$= \frac{1}{484} \left[-1800 + 3816 - 2232 + \frac{238328}{1875} - \frac{407464}{625} + \frac{23064}{625} \right] =$$

$$= \frac{1}{484} \left[-216 + \frac{745736}{1875} \right] = \frac{704}{1875}$$

Da cui

$$S_1 = A_{BGD} - S_3 = \frac{251}{50} - \frac{704}{1875} = \frac{17417}{3750}$$

$$S_2 = A_{ABC} - S_1 = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2} - S_1 = \frac{\frac{25}{2} \cdot 10}{2} - \frac{17417}{3750} = \frac{125}{2} - \frac{17417}{3750} = \frac{108479}{1875}$$

Punto e

trovare, infine, le coordinate dei punti comuni alla circonferenza k ed alla parabola p.

Il calcolo dei punti di intersezione lo si risolve attraverso il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ y = -\frac{25}{484}x^2 - \frac{63}{484}x + \frac{5150}{484} \end{cases}$$

da cui

$$x^2 + \left(-\frac{25}{484}x^2 - \frac{63}{484}x + \frac{5150}{484} \right)^2 - 100 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 625x^4 + 3150x^3 - 19275x^2 - 648900x + 3096900 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow (x-6)^2(25x^2 + 426x + 3441) = 0 \rightarrow x_1 = 6, x_{2,3} = \frac{-213 \pm 44i\sqrt{23}}{25}$$

per cui l'unico punto di intersezione è $D = (6,8)$.

PROBLEMA 2

Si considerino i polinomi di 5° grado, nella variabile x , con coefficienti reali, i cui grafici, rappresentati in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono simmetrici rispetto all'origine O ed hanno un massimo relativo nel punto $\left(-2, \frac{64}{15}\right)$

Punto a

Trovare l'equazione $y=f(x)$ dei grafici suddetti.

Un polinomio di 5° grado ha equazione:

$$y = g(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

Ora dire che la curva è simmetrica rispetto all'origine significa che

$$g(x) = -g(-x) \rightarrow ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = -(-ax^5 + bx^4 - cx^3 + dx^2 - ex + f) \rightarrow \\ \rightarrow bx^4 + dx^2 + f = 0 \rightarrow y = ax^5 + cx^3 + ex$$

$$\text{Il passaggio per } \left(-2, \frac{64}{15}\right) \rightarrow -32a - 8c - 2e = \frac{64}{15} \rightarrow e + 4c + 16a = -\frac{32}{15}$$

Il massimo relativo in $\left(-2, \frac{64}{15}\right)$ comporta :

$$y'(-2) = 0 \rightarrow [5ax^4 + 3cx^2 + e]_{x=-2} = 80a + 12c + e = 0$$

$$y''(-2) = [20ax^3 + 6cx]_{x=-2} = -160a - 12c < 0$$

Bisogna allora risolvere il sistema seguente:

$$\begin{cases} e + 4c + 16a = -\frac{32}{15} \\ 80a + 12c + e = 0 \end{cases}$$

Ora sottraendo una delle equazioni dall'altra ricaviamo:

$$\begin{cases} c = \frac{4}{15} - 8a \\ e = 16a - \frac{16}{5} \end{cases}$$

per cui

$$y = ax^5 + cx^3 + ex = ax^5 + \left(\frac{4}{15} - 8a\right)x^3 + \left(16a - \frac{16}{5}\right)x = a(x^5 - 8x^3 + 16x) + \frac{4}{15}x^3 - \frac{16}{5}x$$

con la condizione $-160a - 12\left(\frac{4}{15} - 8a\right) = -64a - \frac{16}{5} < 0 \rightarrow a > -\frac{1}{20}$ per avere un massimo relativo nel punto $\left(-2, \frac{64}{15}\right)$.

Punto b

Dimostrare che tali grafici hanno tre punti in comune, in due dei quali hanno anche la stessa tangente.

Calcolo punti in comune: partendo dall'equazione $y = a(x^5 - 8x^3 + 16x) + \frac{4}{15}x^3 - \frac{16}{5}x$

I punti in comune si ricavano imponendo tale sistema:

$$\begin{cases} (x^5 - 8x^3 + 16x) = x(x^2 - 4)^2 = 0 \\ y = \frac{4}{15}x^3 - \frac{16}{5}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = -2 \rightarrow y = \frac{64}{15} \\ x = +2 \rightarrow y = -\frac{64}{15} \end{cases}$$

I punti sono allora $(0,0), \left(-2, \frac{64}{15}\right), \left(2, -\frac{64}{15}\right)$ e come si nota il secondo ed il terzo sono effettivamente simmetrici rispetto all'origine.

Ora le tre tangenti sono

$$\text{Tangente in } (0,0) \rightarrow y = mx, m = \left[5ax^4 + 3\left(\frac{4}{15} - 8a\right)x^2 + \left(16a - \frac{16}{5}\right) \right]_{x=0} = \left(16a - \frac{16}{5}\right) \rightarrow y = \left(16a - \frac{16}{5}\right)x,$$

$$\text{Tangente in } \left(2, -\frac{64}{15}\right) \rightarrow +\frac{64}{15} = m(x-2), m = \left[5ax^4 + 3\left(\frac{4}{15} - 8a\right)x^2 + \left(16a - \frac{16}{5}\right) \right]_{x=2} = 0 \rightarrow y = -\frac{64}{15},$$

$$\text{Tangente in } \left(-2, \frac{64}{15}\right) \rightarrow y - \frac{64}{15} = m(x+2), m = \left[5ax^4 + 3\left(\frac{4}{15} - 8a\right)x^2 + \left(16a - \frac{16}{5}\right) \right]_{x=-2} = 0 \rightarrow y = \frac{64}{15},$$

Le tangenti nei punti $\left(-2, \frac{64}{15}\right), \left(2, -\frac{64}{15}\right)$ sono retti parallele all'asse delle ascisse e questo è una conferma dei calcoli effettuati perché per ipotesi il punto c è un massimo per cui la tangente in esso non è altro che una retta parallela all'asse delle ascisse. Lo stesso dicasi per il punto $\left(2, -\frac{64}{15}\right)$ che essendo simmetrico al punto $\left(-2, \frac{64}{15}\right)$ rispetto all'origine degli assi sarà un minimo e la tangente esso è sempre parallelo all'asse delle ascisse.

Le tre tangenti sono differenti per cui la traccia presenta un errore.

Punto c

Indicare con γ il grafico avente come tangente inflessionale l'asse x e disegnarne l'andamento.

Calcolo dei flessi:

$$y''(x) = 20ax^3 + 6cx = 2x(10ax^2 + 3c) = 0 \rightarrow x = 0, x = \pm \sqrt{\frac{3c}{10a}} \text{ se } ac < 0$$

Affinché la tangente inflessionale sia l'asse delle ascisse allora tale tangente deve avere equazione $y = 0$ e questo, visti i punti di flesso, accade se e solo se la tangente inflessionale nel flesso $(0,0)$, che ha equazione $y = mx$, ha coefficiente angolare nullo.

Il coefficiente angolare della tangente in $(0,0)$ è stato già calcolato prima ed è

$$m = \left[5ax^4 + 3\left(\frac{4}{15} - 8a\right)x^2 + \left(16a - \frac{16}{5}\right) \right]_{x=0} = \left(16a - \frac{16}{5}\right)$$

Per cui imponendo che il coefficiente angolare sia nullo ricaviamo:

$$\left(16a - \frac{16}{5}\right) = 0 \rightarrow a = \frac{1}{5}$$

e questo valore soddisfa la condizione $a > -\frac{1}{20}$ per cui il massimo è $\left(-2, \frac{64}{15}\right)$.

Quindi la curva diventa:

$$y = \frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3$$

Studiamo questa curva:

Dominio : \mathbb{R}

$$\text{Intersezione asse } x: y = 0 \rightarrow \frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 = 0 \rightarrow \frac{x^3}{15}(3x^2 - 20) = 0 \rightarrow x = 0, x = \pm 2\sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$\text{Intersezione asse } y: x = 0 \rightarrow y = 0$$

Asintoti verticali, orizzontali ed obliqui : non ce ne sono. In particolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 = -\infty$$

$$\text{Crescenza e decrescenza : } y'(x) = x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) = 0 \rightarrow x = 0, x = \pm 2$$

$$y''(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2) = 0 \rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{2}$$

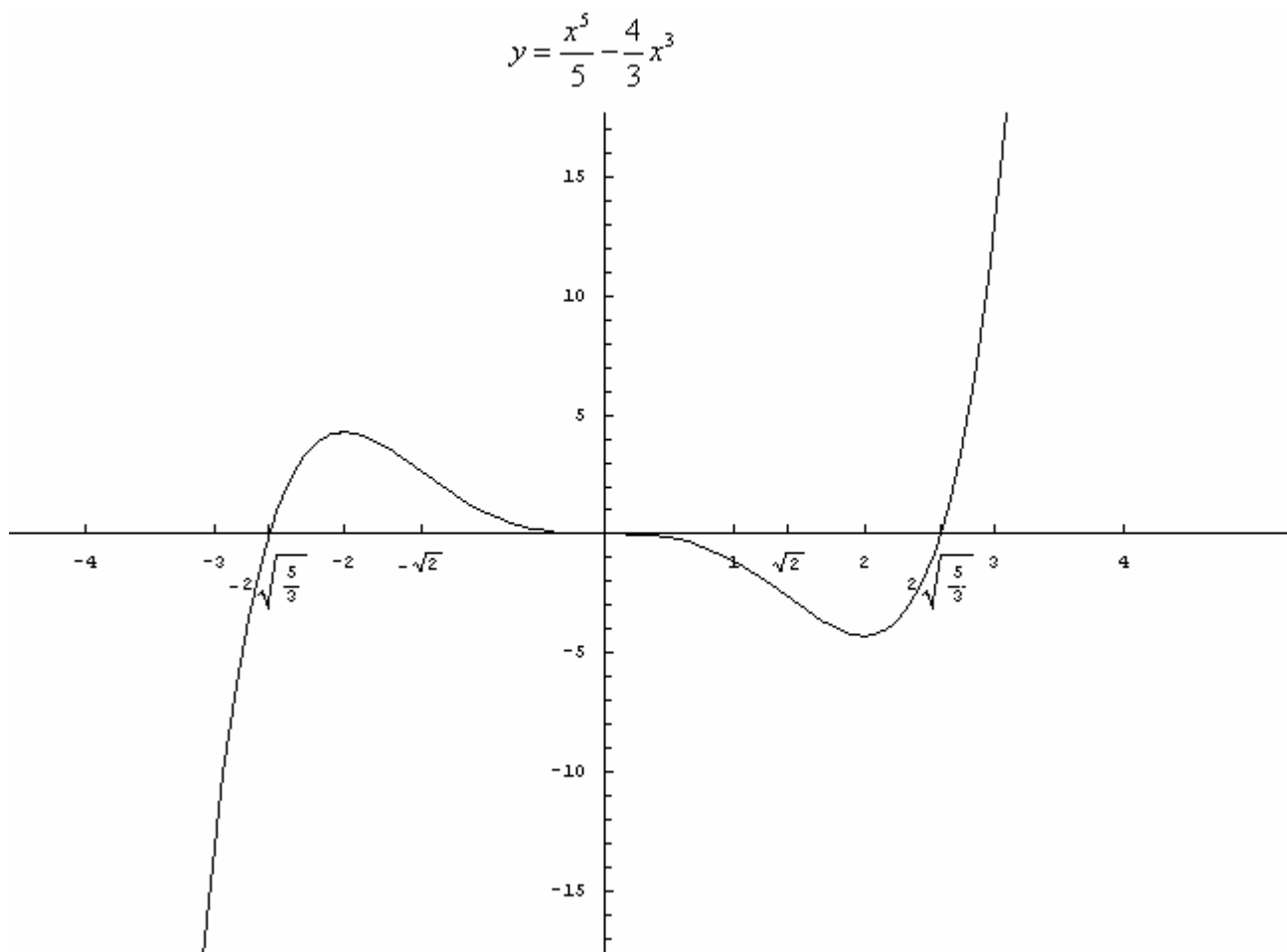
$$y'''(0) = 0, y'''(0) = -8 \rightarrow (0,0) \text{ è un flesso}$$

$y'''(\pm\sqrt{2}) \neq 0 \rightarrow \left(\sqrt{2}, -\frac{28\sqrt{2}}{15}\right), \left(-\sqrt{2}, \frac{28\sqrt{2}}{15}\right)$ sono altrettanti flessi

$y''(2) = 16 > 0 \rightarrow \left(2, -\frac{64}{15}\right)$ è un minimo come ci aspettavamo

$y''(-2) = -16 < 0 \rightarrow \left(-2, \frac{64}{15}\right)$ è un massimo come ci aspettavamo dalla traccia

Ecco il grafico:



Punto d

Indicato con $P(x)$ il polinomio rappresentato da γ e chiamati u e v ($u < v$) le ascisse dei punti, distinti da O , in cui γ interseca l'asse x , calcolare:

$$\int_u^v P(x) dx$$

Le ascisse dei punti di intersezione con l'asse delle x distinte da $x=0$ le abbiamo già trovate e sono

$$x = u = -2\sqrt{\frac{5}{3}}, x = v = 2\sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Per cui l'integrale da calcolare è:

$$\int_{-2\sqrt{\frac{5}{3}}}^{+2\sqrt{\frac{5}{3}}} \left(\frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 \right) dx$$

Per calcolare questo integrale basta ricordare che l'integrale di una funzione dispari in un intervallo simmetrico rispetto all'origine è sempre nullo. In altro modo, interpretando geometricamente l'integrale come area sottesa, le due aree da calcolare si annullano a vicenda.

Per verificare ciò integriamo normalmente e verifichiamo che il risultato dell'integrale definito è nullo:

$$\int_{-2\sqrt{\frac{5}{3}}}^{+2\sqrt{\frac{5}{3}}} \left(\frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 \right) dx = \left[\frac{x^6}{30} - \frac{x^4}{3} \right]_{-2\sqrt{\frac{5}{3}}}^{+2\sqrt{\frac{5}{3}}} = \left(\frac{8000}{810} - \frac{400}{27} \right) - \left(\frac{8000}{810} - \frac{400}{27} \right) = 0$$

Punto e

Dopo aver controllato che γ ha tre flessi allineati, determinare le ascisse dei punti in cui la retta dei flessi interseca γ .

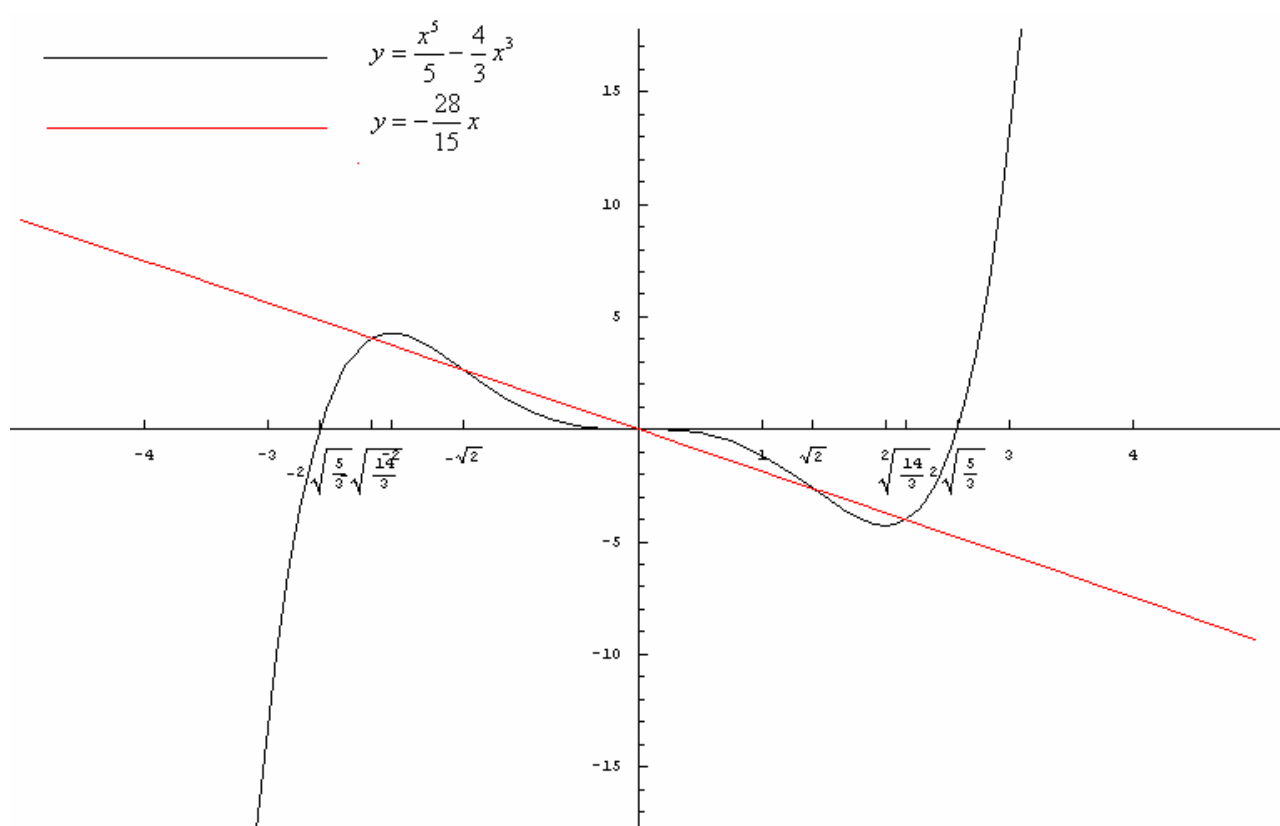
I flessi sono stati già calcolati e sono $A = (0,0)$, $B = \left(\sqrt{2}, -\frac{28\sqrt{2}}{15} \right)$, $C = \left(-\sqrt{2}, \frac{28\sqrt{2}}{15} \right)$

Per vedere se questi flessi sono allineati calcoliamo la retta BC:

$$BC: \frac{y + \frac{28\sqrt{2}}{15}}{\frac{28\sqrt{2}}{15} + \frac{28\sqrt{2}}{15}} = \frac{x - \sqrt{2}}{-\sqrt{2} - \sqrt{2}} \rightarrow \frac{y + \frac{28\sqrt{2}}{15}}{\frac{56\sqrt{2}}{15}} = \frac{-x + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \rightarrow y + \frac{28\sqrt{2}}{15} = \frac{28}{15}(-x + \sqrt{2}) \rightarrow y = -\frac{28}{15}x$$

e questa retta passa anche per $A = (0,0)$, quindi i tre flessi sono allineati sulla retta $y = -\frac{28}{15}x$ come

rappresentato dalla figura sottostante:



Calcoliamo i punti di intersezione tra la retta su cui i flessi sono allineati e la curva:

$$\begin{cases} y = \frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 \\ y = -\frac{28}{15}x \end{cases} \rightarrow \frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 + \frac{28}{15}x = 0 \rightarrow$$

$$3x^5 - 20x^3 + 28x = x(3x^4 - 20x^2 + 28) = x(3x^2 - 6)\left(x^2 - \frac{14}{3}\right) = 0 \rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{2}, x = \pm\sqrt{\frac{14}{3}}$$

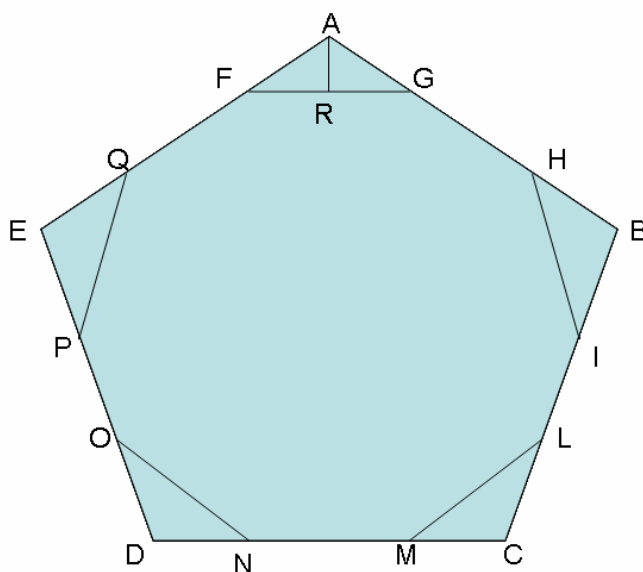
QUESTIONARIO

Quesito 1

È assegnato un pentagono regolare di lato lungo L . Recidendo opportunamente, in esso, cinque triangoli congruenti, si ottiene un decagono regolare: calcolarne la lunghezza del lato.

(Si lascino indicate le funzioni goniometriche degli angoli coinvolti).

Si consideri la figura sottostante, in cui sono stati recisi nel pentagono 5 triangoli isosceli congruenti:



In accordo soprastante si ha:

$$\overline{FA} = \overline{AG} = \overline{HB} = \overline{BI} = \overline{LC} = \overline{CM} = \overline{ND} = \overline{DO} = \overline{PE} = \overline{EQ} = x,$$

$$\overline{QP} = \overline{PO} = \overline{ON} = \overline{NM} = \overline{ML} = \overline{LI} = \overline{IH} = \overline{HG} = \overline{GF} = y$$

In ogni poligono di n lati l'angolo al vertice è pari a $\alpha = \frac{n-2}{n}\pi$ e nel caso del pentagono in esame

$$\text{si ha: } \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = \hat{E} = \alpha = \frac{n-2}{n}\pi = \frac{3\pi}{5}.$$

$$\text{Ora } y = \overline{FG} = 2\overline{RG} = 2AG \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) = 2x \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) = 2x \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \Rightarrow x = \frac{y}{2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{y}{2\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)}$$

Ora ricordando che

$$L = 2x + y = 2 \frac{y}{2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)} + y = y \left[1 + \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)} \right] \Rightarrow y = \frac{L}{\left[1 + \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)} \right]} = \frac{L \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{L \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)}{1 + \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)}$$

Se ci fosse stato richiesto di trovare una relazione che non coinvolgesse gli angoli, bastava notare

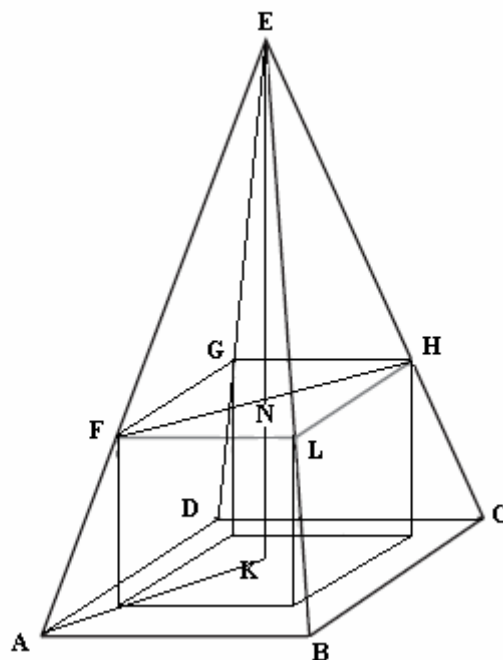
che $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos(36^\circ) = 1 - 2\sin^2(18^\circ) = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ per cui

$$y = L \frac{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)} = L \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}{1 + \frac{1+\sqrt{5}}{4}} = L \frac{1+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = L \frac{(1+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{20} = L \frac{4\sqrt{5}}{20} = L \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{L}{\sqrt{5}}$$

Quesito 2

Una piramide quadrangolare regolare è tale che la sua altezza è il doppio dello spigolo di base. Calcolare il rapporto fra il volume del cubo inscritto nella piramide e il volume della piramide stessa.

Si consideri la figura sottostante che rappresenta la geometria del problema:



L'altezza della piramide è $\overline{KE} = 2\overline{AB} = 2l$ dove $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = l$.

Il volume della piramide è allora $V_p = \frac{1}{3} \overline{AB}^2 \overline{EK} = \frac{2}{3} \overline{AB}^3 = \frac{2}{3} l^3$.

I triangoli ENF ed EKA sono simili. Per cui posto $\overline{FL} = x$ si ha $\overline{FN} = \frac{\overline{FH}}{2} = x \frac{\sqrt{2}}{2}$, si ha :

$$\overline{AK} : \overline{KE} = \overline{FN} : \overline{NE} \Rightarrow \overline{AK} : \overline{KE} = \overline{FN} : (\overline{EK} - \overline{NK}) \Rightarrow$$

$$l \frac{\sqrt{2}}{2} : 2l = x \frac{\sqrt{2}}{2} : (2l - x) \Rightarrow 2x = 2l - x \Rightarrow x = \frac{2}{3} l$$

per cui $V_c = \left(\frac{2}{3} l\right)^3 = \frac{8}{27} l^3$ per cui $\frac{V_c}{V_p} = \frac{\frac{8}{27} l^3}{\frac{2}{3} l^3} = \frac{4}{9}$.

Quesito 3

Se le funzioni $f(x)$ e $g(x)$, entrambe tendenti a 0, quando $x \rightarrow a$, non soddisfano alle condizioni previste dal teorema di De L'Hôpital, non è possibile calcolare il limite di $\frac{f(x)}{g(x)}$ quando $x \rightarrow a$. È vero o è falso? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

La risposta è evidentemente falsa. Per giustificare questa nostra affermazione prendiamo due funzioni, $f(x), g(x)$ che non soddisfano al teorema di De l'Hospital, cioè tali che

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0, g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \text{ e il limite } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ non esiste, ma per le quali esiste il limite } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Un esempio è fornito dalle due funzioni seguenti:

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right), g(x) = \sin(x) \text{ quando } x \rightarrow 0. \text{ Infatti } f(x) = x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \text{ e questo lo si}$$

dimostra utilizzando il teorema dei carabinieri per cui, essendo $-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq x^2$, dal

confronto anche $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Inoltre banalmente $g(x) = \sin(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Tuttavia non esiste $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Infatti $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \pi \cos\left(\frac{1}{x}\right), g'(x) = \cos x$ per cui

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \pi \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[2x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \pi \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right]. \text{ Ora sempre attraverso il teorema dei}$$

carabinieri si ha $f(x) = 2x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, mentre l'addendo $-\pi \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ non presenta limite essendo la funzione coseno una funzione limitata ed oscillante.

Tuttavia il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{\sin(x)} \right] x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$ avendo sfruttato il limite fondamentale $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{\sin(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(x)}{x} \right]^{-1} = 1^{-1} = 1$. Un altro modo per mostrare quanto detto è effettuare la sostituzione $t = \frac{1}{x}$ per cui $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin(\pi t)}{t} = 0$ ricordando l'andamento della funzione seno cardinale in un intorno di $\pm \infty$.

Quesito 4

Il limite della funzione $f(x) = x - \ln x$, per $x \rightarrow +\infty$:

[A] è 0; [B] è un valore finito diverso da 0; [C] è $+\infty$; [D] è $-\infty$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right)$$

Ora sfruttando de l'Hospital $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ per cui

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

per cui l'alternativa corretta è la C.

Quesito 5

Il limite della funzione $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$, per $x \rightarrow 0$, è uguale ad 1. Si chiede di calcolarlo senza ricorrere alla regola di De L'Hôpital.

Effettuiamo la sostituzione $e^x - 1 = y \rightarrow x = \ln(1 + y)$. Il limite diventa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1 + y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1 + y)}{y} \right]^{-1} = \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + y)}{y} \right]^{-1}. \text{ Il limite } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + y)}{y} \text{ è un limite}$$

notevole e vale 1: infatti

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \ln \left[(1+y)^{\frac{1}{y}} \right] \stackrel{t=\frac{1}{y}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \left[\left(1 + \frac{1}{t} \right)^t \right] = \ln \left[\overbrace{\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t}^{=e} \right] = \ln e = 1; \quad \text{quindi}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} \right]^{-1} = (1)^{-1} = 1.$$

Quesito 6

Si ricorda la seguente definizione: «Considerata una funzione reale di variabile reale $f(x)$, definita in un intervallo I , ogni funzione $F(x)$, derivabile in I e tale che $F'(x)=f(x)$, si dice primitiva di $f(x)$ in I ». Stabilire se la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

ammette primitiva nell'intervallo $[1,3]$.

La funzione $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$ non ammette primitiva nell'intervallo $[1,3]$ in quanto, una

eventuale primitiva $F(x)$ non sarebbe derivabile in $x=2$ in quanto $F'(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

per cui in $x=2$ la derivata della primitiva presenta un salto di discontinuità.

Quesito 7

Giustificare, con considerazioni analitiche o mediante un'interpretazione grafica, che la seguente equazione:

$$x^5 + x^3 + 1 = 0$$

ammette una ed una sola soluzione reale. Trovare, quindi, l'intervallo $[z, z+1]$ al quale appartiene tale soluzione, essendo z un numero intero.

La funzione $y = x^5 + x^3 + 1$ è continua e derivabile in tutto \mathbb{R} ; inoltre $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 + x^3 + 1) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 + x^3 + 1) = -\infty$. D'altronde la funzione è crescente in $\mathbb{R} - \{0\}$ dal momento che $y' = 5x^4 + 3x^2$. Quindi il comportamento a $\pm\infty$ e la crescita in $\mathbb{R} - \{0\}$ comporta che $\exists! \bar{x} : y(\bar{x}) = 0$.

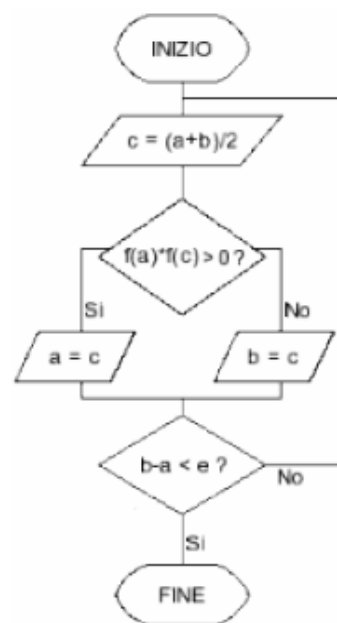
Ora $y(0) = 1 > 0$, $y(-1) = -1 < 0$, per cui per il teorema degli zeri nell'intervallo $[-1,0]$ la funzione presenterà l'unico zero previsto, cioè in tale intervallo sarà presente l'unica soluzione reale dell'equazione $x^5 + x^3 + 1 = 0$. Quindi $z = -1$.

Quesito 8

Descrivere un algoritmo idoneo a calcolare un valore approssimato, a meno di 10^{-3} , della soluzione reale della precedente equazione.

Uno dei metodi numerici studiati ed utilizzati per determinare una radice approssimata di un'equazione con un'approssimazione voluta è il metodo di bisezione. Supponiamo di voler trovare la suddetta radice nell'intervallo (a,b) in cui $f(a) \cdot f(b) < 0$ e supponiamo per ipotesi che $f(a) < 0, f(b) > 0$ e di voler trovare la radice con un'approssimazione $e > 0$. L'algoritmo in pseudocodice è il seguente:

- Inizio programma calcolo radice approssimata
- Definire la variabile approssimazione $e > 0$
- Definire ed inizializzare la variabile a col valore dell'estremo sinistro dell'intervallo in cui ricade la radice
- Definire ed inizializzare la variabile b col valore dell'estremo destro dell'intervallo in cui ricade la radice
- Definire ed inizializzare la variabile $R_1 = f(a)$
 - Iniziare il ciclo di iterazione (While)
 - Definire e calcolare la variabile valor medio $c = \frac{a+b}{2}$
 - Definire e inizializzare la variabile $R_M = 0$
 - Calcolare la variabile $R_M = f(c)$
 - Ciclo di selezione (If-Then-Else): Se $R_1 \cdot R_M > 0$
 - Allora $a = c, R_1 = R_M$
 - Altrimenti $b = c$
 - Sino a quando $b - a < e$
- Stampare c
- Fine programma calcolo radice approssimata



Quesito 9

Si considerino le seguenti equazioni:

$$x' = a x - (a - 1) y + 1, y' = 2 a x + (a - 1) y + 2,$$

dove a è un parametro reale.

Determinare i valori di a per cui le equazioni rappresentano: 1) un'affinità, 2) un'affinità equivalente (si ricorda che un'affinità si dice *equivalente* se conserva le aree).

Una trasformazione del tipo $\begin{cases} x' = bx + cy + d \\ y' = b'x + c'y + d' \end{cases}$ è un'affinità se $\det \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = b \cdot c' - b' \cdot c \neq 0$. Nel

nostro caso la trasformazione $\begin{cases} x' = ax - (a-1)y + 1 \\ y' = 2ax + (a-1)y + 2 \end{cases}$ è un'affinità se

$$a(a-1) + 2a(a-1) = 3a(a-1) \neq 0 \Rightarrow a \neq 0 \wedge a \neq 1.$$

In ogni affinità il rapporto tra le aree delle figure trasformate è costante e vale $R = \left| \det \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \right|$ e

l'affinità diventa equivalenza se tale rapporto è unitario cioè se $R = \left| \det \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \right| = 1$ e quindi se

$$|3a(a-1)| = 1 \Rightarrow 3a^2 - 3a = \pm 1 \rightarrow \begin{cases} 3a^2 - 3a - 1 = 0 & \text{se } a \leq 0 \vee a \geq 1 \\ 3a^2 - 3a + 1 = 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{6} \\ a = \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

In conclusione si ha un'affinità equivalente se $a = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{6}$.

Quesito 10

Una classe è formata da 28 alunni, di cui 16 femmine e 12 maschi. Fra le femmine ci sono due “Maria” e fra i maschi un solo “Antonio”. Si deve formare una delegazione formata da due femmine e due maschi. Quanto vale la probabilità che la delegazione comprenda “Antonio” e almeno una “Maria”?

Il numero di delegazioni formate da due donne è $\binom{16}{2} = \frac{15 \cdot 16}{2} = 120$ mentre il numero di

delegazioni formate da due maschi è $\binom{12}{2} = \frac{11 \cdot 12}{2} = 66$ per cui il numero totale di delegazioni

formate da due donne e due maschi è $120 \cdot 66 = 7920$.

Il numero di delegazioni di due maschi con Antonio è 11 in quanto si tratta di far ruotare gli 11 maschi eccetto Antonio. Il numero di delegazioni con 2 Maria è 1 in quanto tra le donne ve ne sono solo 2 con nome Maria; invece, il numero di delegazioni con 1 Maria è pari a 28 in quanto bisogna abbinare per ogni Maria una delle altre 14 donne rimaste. Quindi la probabilità che la delegazione comprenda “Antonio” e almeno una “Maria” è

$$p = P\{1 \text{ Antonio e } 1 \text{ Maria}\} + P\{1 \text{ Antonio e } 2 \text{ Maria}\} = \frac{11 \cdot 1}{7920} + \frac{11 \cdot 28}{7920} = \frac{11 \cdot 29}{7920} = \frac{29}{720}.$$