

ESAME DI STATO: Indirizzo **Scientifico****Sessione ordinaria 2006**

## SECONDA PROVA SCRITTA

## Tema di MATEMATICA

***Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 dei 7 quesiti in cui si articola il questionario:***

**PROBLEMA 1.**

Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali ( $Oxy$ ), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = ax^2 + \frac{b}{x},$$

dove  $a, b$  sono parametri reali.

- Fra tali curve determinare quella che passa per i punti di coordinate  $(2,3)$  e  $(-2,5)$  e indicarla con  $\gamma$ .
- Studiare la curva  $\gamma$  e disegnarne l'andamento, dopo aver trovato, in particolare, le coordinate del suo punto di minimo relativo e del suo flesso.
- Calcolare l'area della regione piana delimitata dalla curva  $\gamma$  e dalla retta  $y=5$ .
- Utilizzando il disegno di  $\gamma$ , trovare quante soluzioni ammette l'equazione  $x^3 - kx - 2 = 0$ , per  $-2 < x < 2$ , essendo  $k$  un parametro reale.

**PROBLEMA 2.**

Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali ( $Oxy$ ), è assegnata la parabola  $p'$  di equazione:

$$y = ax^2,$$

dove  $a$  è un numero reale positivo assegnato.

- Condotta una generica retta  $t$  per il fuoco  $F$  della parabola  $p'$  e chiamato  $M$  il punto medio del segmento che  $p'$  intercetta su  $t$ , trovare le funzioni  $x(k)$  ed  $y(k)$  che forniscono, nell'ordine, l'ascissa e l'ordinata di  $M$  per mezzo della pendenza della retta  $t$ .
- Considerate le equazioni  $x(k)$  e  $y(k)$  ed eliminato il parametro fra esse, si trova l'equazione di una seconda parabola  $p''$  (è chiamata luogo geometrico del punto  $M$  al variare di  $t$  nel fascio di centro  $F$ ).
- Calcolare l'area  $A$  della regione piana  $R$  delimitata dalle parabole  $p'$  e  $p''$  e dalle rette di equazioni  $x = 0$  ed  $x = 2a$ .

d) Trovare il valore di  $a$  per il quale l'area  $A$  è uguale  $\frac{13}{24}e$ , in corrispondenza di tale valore, calcolare il volume del solido generato dalla regione  $R$  quando ruota di un giro completo intorno all'asse  $y$ .

### QUESTIONARIO.

1) Calcolare la derivata, rispetto ad  $x$ , della funzione  $f(x) = \sin^2(2x)$ .

2) Si consideri la seguente proposizione:

*Condizione necessaria e sufficiente affinché due triangoli siano congruenti è che abbiano due lati congruenti e i seni degli angoli fra essi compresi uguali.*

Dire se è vera o falsa e spiegare in modo esauriente la risposta data.

3) Si indichi con  $\alpha$  l'angolo che una diagonale di un cubo forma con una faccia. La misura di  $\alpha$ , espressa in radianti:

$$[A] \text{ è } \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right); [B] \text{ è } \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right); [C] \text{ è } \arctan\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right); [D] \text{ un valore diverso.}$$

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

4) Considerata l'equazione:  $x^4 + x - 2 = 0$ , spiegare, con il metodo preferito ma in maniera esauriente, perché non può ammettere più di una soluzione *razionale*.

5) In un cono equilatero di apotema  $a$  inscrivere il cilindro circolare retto di volume massimo.

6) La funzione reale di variabile reale  $f(x)$  ammette derivata nulla in tutti i punti di un intervallo  $J$ , tranne che nel punto  $a$  di  $J$ , dove la funzione non è continua. Si può concludere che la funzione  $f(x)$  è costante in  $J$ ? Fornire una spiegazione esauriente della risposta.

7) Si consideri il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Esso è uguale a:

$$[A] e^2; [B] \frac{1}{e^2}; [C] \sqrt{e}; [D] \frac{1}{\sqrt{e}};$$

dove "e" è il numero di Nepero.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

**PROBLEMA 1.**

Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = ax^2 + \frac{b}{x},$$

dove a, b sono parametri reali.

*Punto a*

Fra tali curve determinare quella che passa per i punti di coordinate (2,3) e (-2,5) e indicarla con  $\gamma$ .

Il passaggio della curva per i punti (2,3) e (-2,5) comporta la risoluzione del sistema seguente:

$$\begin{cases} 4a + \frac{b}{2} = 3 \\ 4a - \frac{b}{2} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

Per cui la curva richiesta è  $y = x^2 - \frac{2}{x} = \frac{x^3 - 2}{x}$

*Punto b*

Studiare la curva  $\gamma$  e disegnarne l'andamento, dopo aver trovato, in particolare, le coordinate del suo punto di minimo relativo e del suo flesso.

Studiamo la funzione  $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x}$

✚ Dominio:  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;

✚ Intersezione asse delle ascisse:  $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x} = 0 \Rightarrow A(\sqrt[3]{2}, 0)$ ;

✚ Intersezioni asse delle ordinate: non ve ne sono;

✚ Eventuali simmetrie: non è una funzione nè pari nè dispari;

✚ Positività:  $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x} > 0$  la studiamo, risolvendo separatamente numeratore e denominatore:

$$\begin{cases} N(x) = x^3 - 2 > 0 \Rightarrow x > \sqrt[3]{2} \\ D(x) = x > 0 \Rightarrow x > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} > 0 \Rightarrow x < 0 \vee x > \sqrt[3]{2};$$

✚ Asintoti verticali:

$$\left\| \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - 2}{x} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - 2}{x} &= +\infty \end{aligned} \right\| \Rightarrow x = 0 \text{ è asintoto verticale;}$$

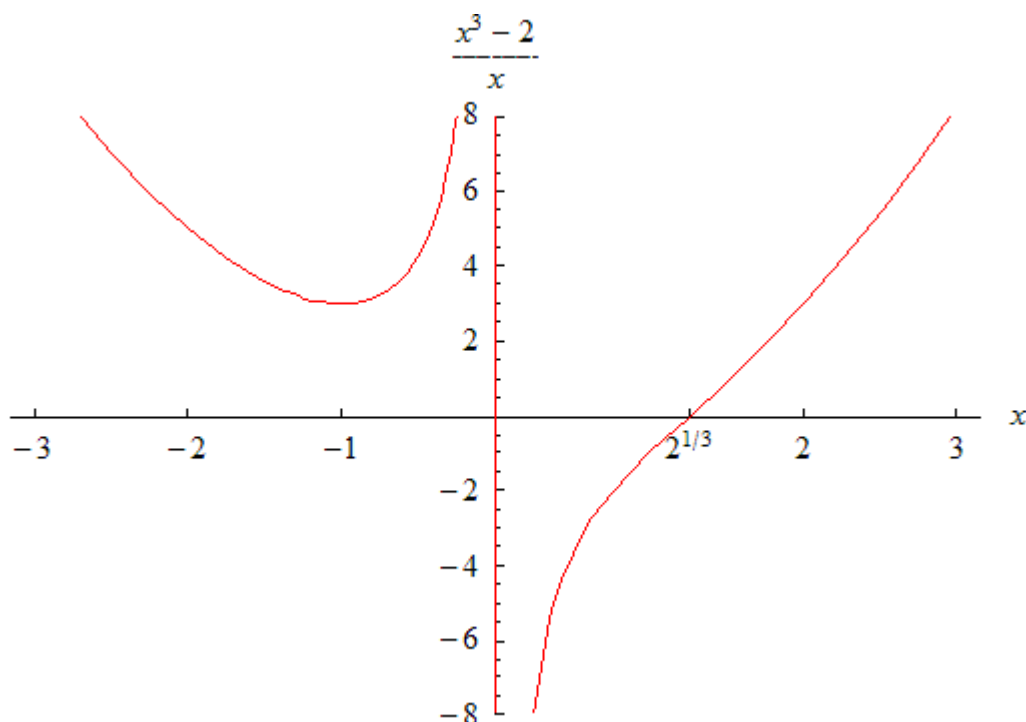
✚ *Asintoti orizzontali:*  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 2}{x} = \pm\infty$  per cui non ci sono asintoti orizzontali;

✚ *Asintoti obliqui:* non ve ne sono in quanto  $\left\| \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= -\infty \end{aligned} \right\|$ ;

✚ *Crescenza e decrescenza:* la derivata prima è  $f'(x) = \frac{2(x^3 + 1)}{x^2} > 0 \Rightarrow x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$  quindi la funzione è strettamente crescente in  $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$  e strettamente decrescente altrove.

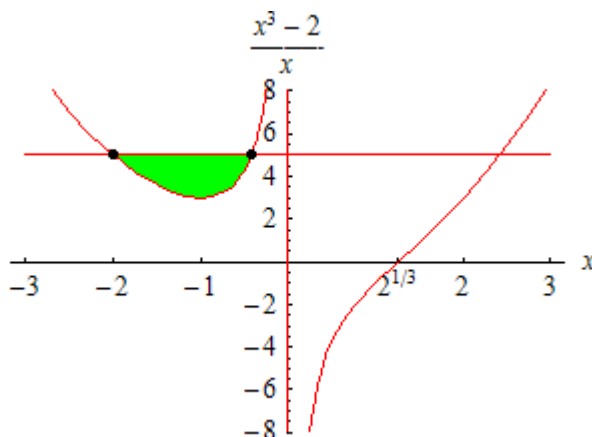
✚ *Concavità e convessità:* la derivata seconda è  $f''(x) = \frac{2(x^3 - 2)}{x^3}$ . La funzione presenta eventuali flessi a tangente obliqua nelle ascisse dei punti che annullano il numeratore  $N(x) = (x^3 - 2)$  della derivata seconda. Il numeratore  $N(x) = (x^3 - 2)$  si annulla in  $x = \sqrt[3]{2}$  in cui la funzione presenta un flesso a tangente obliqua. Inoltre  $f''(-1) = 6 > 0$  per cui  $(-1, 3)$  è un minimo relativo.

Il grafico è presentato di seguito:



**Punto c**

**Calcolare l'area della regione piana delimitata dalla curva  $\gamma$  e dalla retta  $y=5$ .**



Le intersezioni della curva con la retta di equazione  $y=5$  si ricavano risolvendo l'equazione

$f(x) = \frac{x^3 - 2}{x} = 5 \Rightarrow x^3 - 5x - 2 = 0$  e ricordando che per ipotesi la curva passa per  $(-2, 5)$ , un

divisore di  $(x^3 - 5x - 2)$  è certamente  $(x + 2)$ . Il polinomio di terzo grado si scompone come

$(x^3 - 5x - 2) = (x + 2)(x^2 - 2x - 1)$  per cui

$(x^3 - 5x - 2) = (x + 2)(x^2 - 2x - 1) = 0 \Rightarrow x = -2, x = 1 \pm \sqrt{2}$ . L'area da calcolare vale

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{1-\sqrt{2}} \left( 5 - \frac{x^3 - 2}{x} \right) dx = \int_{-2}^{1-\sqrt{2}} \left( 5 - x^2 + \frac{2}{x} \right) dx = \left[ 5x - \frac{x^3}{3} + 2 \ln|x| \right]_{-2}^{1-\sqrt{2}} = \\ &= \left[ 5 - 5\sqrt{2} - \frac{(1-\sqrt{2})^3}{3} + 2 \ln(\sqrt{2} - 1) \right] - \left[ -10 + \frac{8}{3} + 2 \ln 2 \right] = \\ &= \left[ 5 - 5\sqrt{2} - \frac{(7-5\sqrt{2})}{3} + 2 \ln(\sqrt{2} - 1) \right] - \left[ -\frac{22}{3} + 2 \ln 2 \right] = \\ &= \left[ \frac{8}{3} - \frac{10\sqrt{2}}{3} + 2 \ln(\sqrt{2} - 1) \right] + \left[ \frac{22}{3} - 2 \ln 2 \right] = 10 - \frac{10\sqrt{2}}{3} + 2 \ln \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

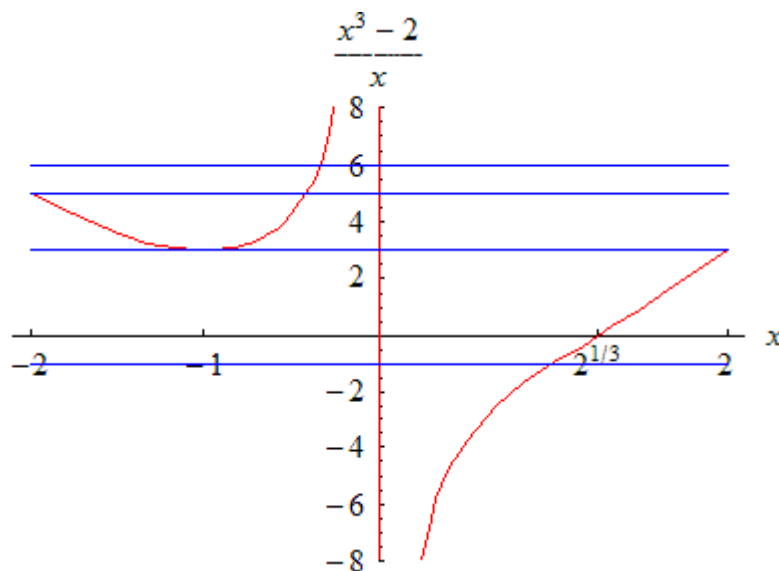
**Punto d**

**Utilizzando il disegno di  $\gamma$ , trovare quante soluzioni ammette l'equazione  $x^3 - kx - 2 = 0$ , per  $-2 < x < 2$ , essendo  $k$  un parametro reale.**

Trovare le soluzioni dell'equazione  $x^3 - kx - 2 = 0$  per  $-2 < x < 2$  equivale a trovare le soluzioni

del sistema  $\begin{cases} y = \frac{x^3 - 2}{x} \\ y = k \\ -2 < x < 2 \end{cases}$ . Consideriamo a tal riguardo il grafico sottostante in cui viene

rappresentata la curva  $\gamma$  con le rette  $y = -1, y = 3, y = 5, y = 6$  per  $-2 < x < 2$ .



Il grafico soprastante evidenzia le seguenti soluzioni:

- ✚ 1 soluzione positiva per  $k < 3$ ;
- ✚ 2 soluzioni coincidenti e pari a  $x = -1$  per  $k = 3$ : la soluzione  $x = 2 \notin (-2, 2)$  va scartata;
- ✚ 2 soluzioni negative per  $3 < k < 5$ ;
- ✚ 1 soluzione negativa per  $k = 5$ : la soluzione  $x = -2 \notin (-2, 2)$  va scartata;
- ✚ 1 soluzione negativa per  $k > 5$ .

In conclusione si ha:

- ✚ 1 soluzione per  $k < 3 \vee k \geq 5$ ;
- ✚ 2 soluzioni per  $3 \leq k < 5$ .

**PROBLEMA 2.**

Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali ( $Oxy$ ), è assegnata la parabola  $p'$  di equazione:

$$y = ax^2,$$

dove  $a$  è un numero reale positivo assegnato.

*Punto a*

Condotta una generica retta  $t$  per il fuoco  $F$  della parabola  $p'$  e chiamato  $M$  il punto medio del segmento che  $p'$  intercetta su  $t$ , trovare le funzioni  $x(k)$  ed  $y(k)$  che forniscono, nell'ordine, l'ascissa e l'ordinata di  $M$  per mezzo della pendenza della retta  $t$ .

La parabola in questione, di equazione  $y = ax^2$  passa per l'origine degli assi, ha come vertice l'origine degli assi  $(0,0)$  e presenta come fuoco il punto  $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ .

Una retta generica passante per il fuoco  $F$  ha equazione:

$$t: y = kx + \frac{1}{4a}$$

Ora si calcolano le intersezioni tra la retta  $t$  e la parabola  $p'$ : va risolta l'equazione seguente:

$$ax^2 = kx + \frac{1}{4a} \rightarrow 4a^2x^2 - 4akx - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{2ak \pm 2a\sqrt{k^2 + 1}}{4a^2} = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 1}}{2a}$$

Per cui i punti di intersezione saranno:

$$A = \left( \frac{k + \sqrt{k^2 + 1}}{2a}, k \left( \frac{k + \sqrt{k^2 + 1}}{2a} \right) + \frac{1}{4a} \right)$$

$$B = \left( \frac{k - \sqrt{k^2 + 1}}{2a}, k \left( \frac{k - \sqrt{k^2 + 1}}{2a} \right) + \frac{1}{4a} \right)$$

Il punto medio  $M$  avrà coordinate:

$$M = \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left( \frac{k}{2a}, \frac{k^2}{2a} + \frac{1}{4a} \right) = (x(k), y(k))$$

*Punto b*

Considerate le equazioni  $x(k)$  e  $y(k)$  ed eliminato il parametro fra esse, si trova l'equazione di una seconda parabola  $p''$  (è chiamata luogo geometrico del punto  $M$  al variare di  $t$  nel fascio di centro  $F$ ).

Ora posto:

$$\begin{cases} x = \frac{k}{2a} \\ y = \frac{k^2}{2a} + \frac{1}{4a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2ax \\ y = \frac{k^2}{2a} + \frac{1}{4a} \end{cases}$$

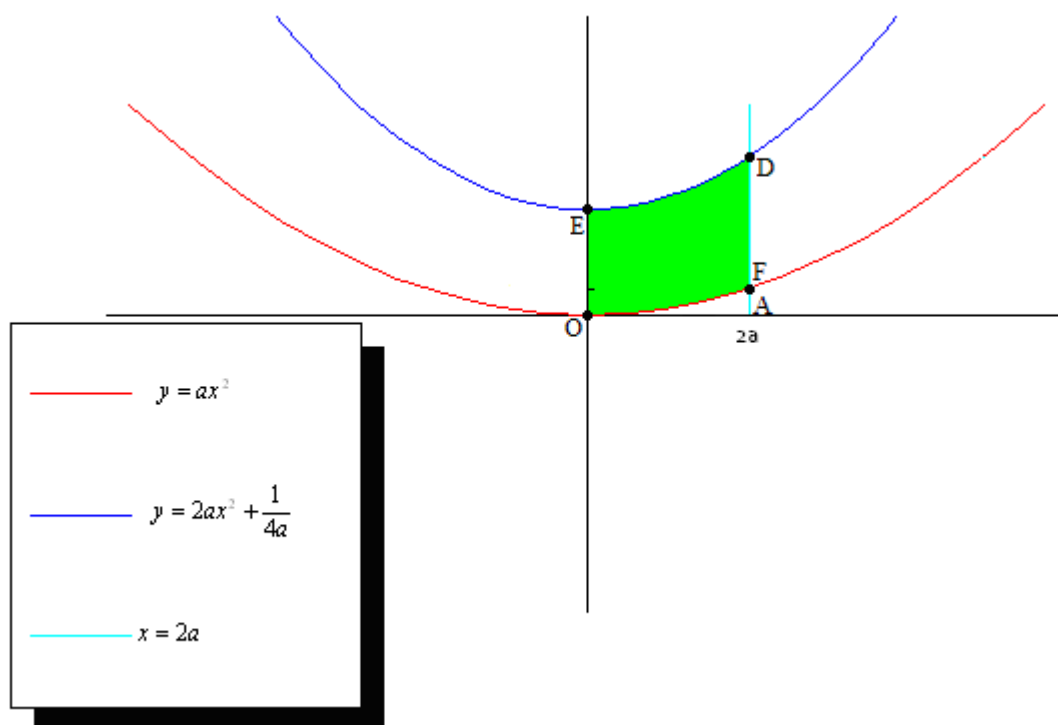
si ricava l'equazione della parabola p'':

$$y = \frac{(2ax)^2}{2a} + \frac{1}{4a} = 2ax^2 + \frac{1}{4a}$$

### Punto c

**Calcolare l'area A della regione piana R delimitata dalle parabole p' e p'' e dalle rette di equazioni  $x = 0$  ed  $x = 2a$ .**

Per il calcolo dell'area si consideri la figura seguente:



L'area sarà:

$$S = \int_0^{2a} \left[ \left( 2ax^2 + \frac{1}{4a} \right) - (ax^2) \right] dx = \int_0^{2a} \left[ ax^2 + \frac{1}{4a} \right] dx = \left[ \frac{ax^3}{3} + \frac{x}{4a} \right]_0^{2a} = \frac{8a^4}{3} + \frac{1}{2}$$

*Punto d*

Trovare il valore di  $a$  per il quale l'area  $A$  è uguale  $\frac{13}{24}$  e, in corrispondenza di tale valore, calcolare il volume del solido generato dalla regione  $R$  quando ruota di un giro completo intorno all'asse  $y$ .

Per calcolare il valore di  $a$  dobbiamo imporre l'equazione:

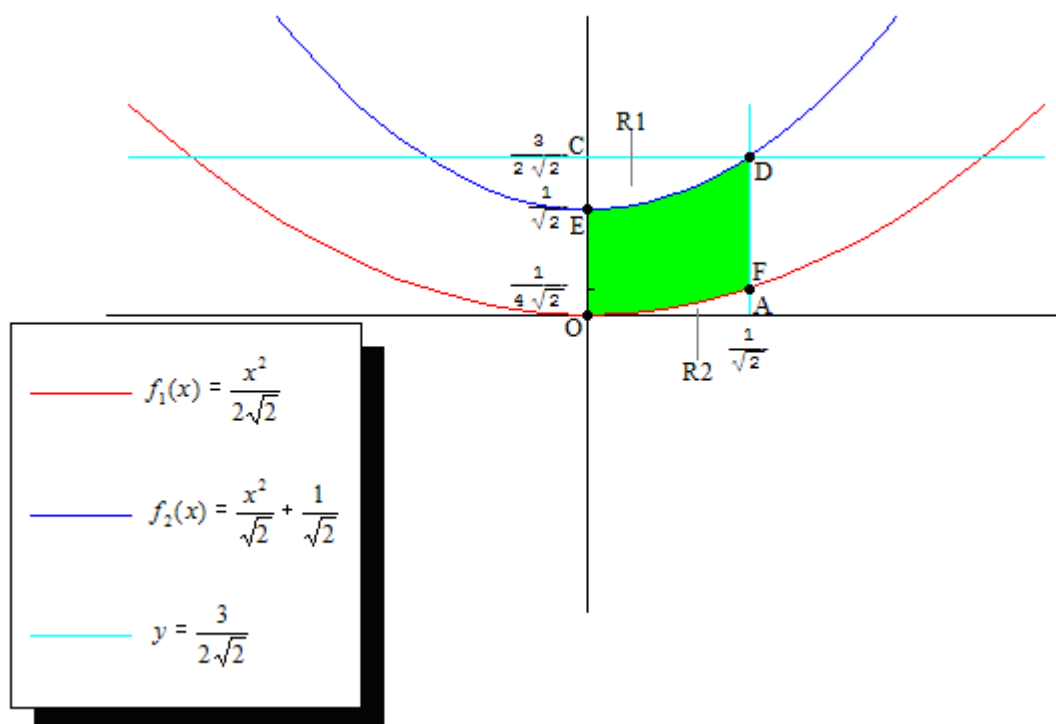
$$\frac{8a^4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{13}{24} \rightarrow \frac{8a^4}{3} = \frac{1}{24} \rightarrow a^4 = \frac{1}{64} \rightarrow \left(a^2 - \frac{1}{8}\right)\left(a^2 + \frac{1}{8}\right) = 0 \rightarrow a = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

ed essendo  $a$  un valore positivo si ha che la soluzione accettabile è  $a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ . In tal modo le due parabole avranno equazione:

$$f_1(x) = \frac{x^2}{2\sqrt{2}}$$

$$f_2(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Per il calcolo del volume consideriamo la figura seguente:



I punti  $A, F, D, E, C$  hanno le seguenti coordinate:

$$A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{4\sqrt{2}}\right), D\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2\sqrt{2}}\right), E\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), C\left(0, \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$$

Prima di calcolare il volume colorato in verde esprimiamo gli archi del primo quadrante delle parabole suddette come funzioni  $x = g(y)$ :

$$f_1(x) = \frac{x^2}{2\sqrt{2}} \rightarrow x = \sqrt{2\sqrt{2}y}$$

$$f_2(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow x = \sqrt{\sqrt{2}y - 1}$$

Questo è possibile farlo in quanto nel primo quadrante l'invertibilità delle due parabole è garantita.

Il volume lo si ricava partendo dal volume del cilindro ottenuto dalla rotazione del rettangolo OCDA cui va sottratto i volumi ottenuti dalla rotazione intorno all'asse delle ordinate delle regioni di piano R1 ed R2, cioè:

$$V = \pi \frac{3}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \pi \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{3}{2\sqrt{2}}} \left[ \left(\sqrt{\sqrt{2}y - 1}\right)^2 \right] dy - \pi \int_0^{\frac{1}{4\sqrt{2}}} \left[ \left(\sqrt{2\sqrt{2}y}\right)^2 \right] dy =$$

$$\pi \left\{ \frac{3}{4\sqrt{2}} - \left[ \frac{y^2\sqrt{2}}{2} - y \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{3}{2\sqrt{2}}} - \left[ y^2\sqrt{2} \right]_0^{\frac{1}{4\sqrt{2}}} \right\} =$$

$$= \pi \left\{ \frac{3}{4\sqrt{2}} - \left[ \frac{9\sqrt{2}}{16} - \frac{3}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right] - \frac{\sqrt{2}}{32} \right\} =$$

$$= \pi \left( \frac{3}{4\sqrt{2}} - \frac{5\sqrt{2}}{16} + \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{32} \right) = \frac{9\sqrt{2}\pi}{32}$$

**QUESTIONARIO.***Quesito 1*

**Calcolare la derivata, rispetto ad  $x$ , della funzione  $f(x) = \sin^2(2x)$ .**

La derivata di  $f(x) = \sin^2(2x)$  è

$$f'(x) = 2 \cdot \sin(2x) \cdot \frac{d(\sin(2x))}{dx} = 2 \cdot \sin(2x) \cdot 2 \cdot \cos(2x) = 2 \cdot \underbrace{(2 \sin(2x) \cos(2x))}_{\sin(4x)} = 2 \sin(4x)$$

In altro modo ricordando che  $f(x) = \sin^2(2x) = \frac{1 - \cos(4x)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(4x)$  la derivata è

$$f'(x) = -\frac{1}{2} [-4 \cdot \sin(4x)] = 2 \sin(4x).$$
*Quesito 2*

**Si consideri la seguente proposizione:**

*Condizione necessaria e sufficiente affinché due triangoli siano congruenti è che abbiano due lati congruenti e i seni degli angoli fra essi compresi uguali.*

**Dire se è vera o falsa e spiegare in modo esauriente la risposta data.**

La proposizione è falsa in quanto

*Condizione necessaria e sufficiente affinché due triangoli siano congruenti è che abbiano due lati congruenti e gli angoli fra essi compresi uguali.*

Cioè i due triangoli devono avere uguali gli angoli compresi tra i due lati congruenti e non devono avere uguali i seni degli angoli in quanto, detti  $\alpha, \beta$  due angoli, da  $\sin \alpha = \sin \beta$  si ricava sia  $\alpha = \beta$  che  $\alpha = 180^\circ - \beta$ , cioè due angoli che hanno seni uguali o sono uguali o supplementari; ecco per cui la proposizione è falsa.

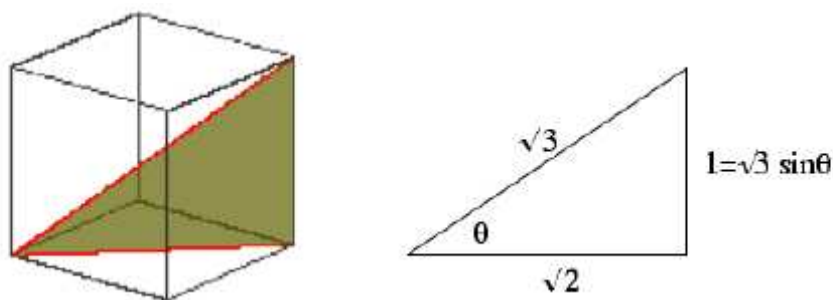
*Quesito 3*

**Si indichi con  $\alpha$  l'angolo che una diagonale di un cubo forma con una faccia. La misura di  $\alpha$ , espressa in radianti:**

$$[A] \text{ è } \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right); [B] \text{ è } \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right); [C] \text{ è } \arctan\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right); [D] \text{ un valore diverso.}$$

**Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.**

Consideriamo la figura seguente:



L'angolo che una diagonale di un cubo forma con una faccia è l'angolo che la diagonale del cubo forma con la diagonale della faccia. La diagonale del cubo di lato  $l$  misura  $d_c = l\sqrt{3}$  mentre la diagonale della faccia misura  $d_f = l\sqrt{2}$ . Il lato che si oppone all'angolo da determinare misura  $l$ .

Applicando il teorema dei seni si ha  $\sqrt{3} \sin(\theta) = 1$  da cui  $\theta = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$  per cui la risposta corretta è la A.

#### **Quesito 4**

**Considerata l'equazione:  $x^4 + x - 2 = 0$ , spiegare, con il metodo preferito ma in maniera esauriente, perché non può ammettere più di una soluzione razionale.**

Ricordiamo il teorema seguente:

se un polinomio  $p(x)$  a coefficienti interi è tale per cui il numero razionale  $\frac{a}{b}$  è un suo zero, cioè

$p\left(\frac{a}{b}\right) = 0$ , allora valgono le seguenti:

1. il numeratore  $a$  divide il termine noto;
2. il denominatore  $b$  divide il coefficiente di grado massimo del polinomio.

Quindi la nostra concentrazione va posta sul coefficiente di grado massimo del polinomio, che è unitario, e sul termine noto, pari a  $(-2)$ . Ora gli unici divisori di 1 e  $(-2)$  (e cioè del coefficiente di grado massimo e del termine noto) sono 1 e -1. Quindi le possibili soluzioni razionali potrebbero essere 1 e -1. Ma  $p(1) = 0$ ,  $p(-1) = -2$ , per cui l'unica soluzione razionale è  $x = 1$ .

In maniera alternativa possiamo trovare esplicitamente le radici reali dell'equazione  $x^4 + x - 2 = 0$  e stabilire quante di esse sono razionali. Sicuramente  $x = 1$  è soluzione in quanto sostituendo in  $x^4 + x - 2 = 0$  otteniamo l'identità  $0 = 0$ . Applicando allora la regola di Ruffini si ha

$$x^4 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^3 + x^2 + x + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (x^3 + x^2 + x + 2) = 0 \end{cases}$$

Troviamo le radici dell'equazione cubica  $(x^3 + x^2 + x + 2) = 0$  o equivalentemente gli zeri della funzione  $f(x) = (x^3 + x^2 + x + 2)$ . Innanzitutto  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 + x^2 + x + 2) = \pm\infty$ ; inoltre la derivata prima della funzione  $f(x) = (x^3 + x^2 + x + 2)$  è  $f'(x) = (3x^2 + 2x + 1)$  da cui deduciamo la stretta crescita della cubica  $f(x) = (x^3 + x^2 + x + 2)$  in tutto  $\mathbb{R}$ . Quindi a norma del primo teorema degli zeri esiste un unico zero della funzione  $f(x) = (x^3 + x^2 + x + 2)$  in  $(-\infty, +\infty)$ . In particolare, essendo  $f(-2) = -4 < 0$ ,  $f(-1) = 1 > 0$  l'unico zero di  $f(x) = (x^3 + x^2 + x + 2)$  si trova in  $(-2, -1)$ . Per trovare lo zero cercato applichiamo il metodo delle tangenti con punto iniziale  $x_0 = -2$ , tramite formula di ricorrenza  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$  con un errore inferiore a  $10^{-3}$ . Sviluppando il metodo si ha:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & x_0 = -2; \\
 2. \quad & x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -2 - \left[ \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{3x^2 + 2x + 1} \right]_{x=x_0} = -\frac{14}{9} \approx -1.55556 \\
 3. \quad & x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -1.55556 - \left[ \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{3x^2 + 2x + 1} \right]_{x=x_1} \approx -1.38076 \\
 4. \quad & x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -1.38076 - \left[ \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{3x^2 + 2x + 1} \right]_{x=x_2} \approx -1.35381 \\
 5. \quad & x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = -1.35381 - \left[ \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{3x^2 + 2x + 1} \right]_{x=x_3} \approx -1.35321
 \end{aligned}$$

Poiché  $|x_4 - x_3| \approx 0.0006 < \frac{1}{1000}$  allora  $\alpha \cong -1.353$  è lo zero trovato.

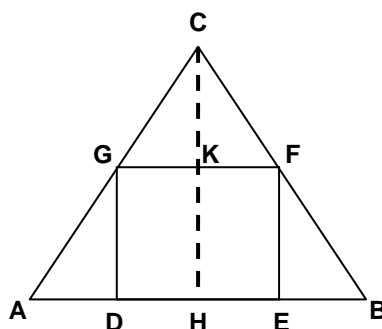
In conclusione gli zeri reali dell'equazione  $x^4 + x - 2 = 0$  sono due e pari a  $x = 1, x = -1.353$  dei quali solo  $x = 1$  è razionale.

In ultima analisi, piuttosto che applicare il metodo delle tangenti, avremmo potuto applicare il metodo di Cardano per le equazioni di terzo grado ed avremmo ottenuto i medesimi risultati.

### *Quesito 5*

**In un cono equilatero di apotema  $a$  inscrivere il cilindro circolare retto di volume massimo.**

Si consideri la figura sottostante raffigurante in sezione il cono circoscritto al cilindro.



Poiché il cono è equilatero si ha  $\overline{HB} = \frac{a}{2}$  per cui  $\overline{CH} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Poniamo  $\overline{KH} = x$  con  $0 < x < \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . I triangoli CHB e CKF sono simili per cui

$\overline{CH} : \overline{HB} = \overline{CK} : \overline{KF}$  e cioè  $\frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a}{2} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - x\right) : \overline{KF}$  da cui  $\overline{KF} = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - x\right)$ . Il volume del

cilindro è  $V_{Cilindro}(x) = (\pi \cdot \overline{KF}^2) \cdot \overline{KH} = \frac{\pi}{3} \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - x\right)^2 \cdot x = \frac{\pi}{3} \left(x^3 - a\sqrt{3}x^2 + \frac{3a^2}{4}x\right)$ . La

minimizzazione del volume la effettuiamo tramite derivazione. La derivata prima del volume è:

$$V'_{Cilindro}(x) = \frac{\pi}{12} [12x^2 - 8a\sqrt{3}x + 3a^2] = \frac{\pi}{12} (2x - a\sqrt{3})(6x - a\sqrt{3}) \text{ per cui}$$

$$V'_{Cilindro}(x) > 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow V_{Cilindro}(x) \text{ strettamente crescente in } \left(0, \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$V'_{Cilindro}(x) < 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V_{Cilindro}(x) \text{ strettamente decrescente in } \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$V'_{Cilindro}(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{2} \vee x = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{6} \text{ ascissa di massimo relativo proprio}$$

Quindi il volume massimo lo si ha per  $x = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ , cioè quando l'altezza del cilindro è  $\frac{1}{3}$  di quella

$$\text{del cono, e vale } V_{Cilindro}\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{\pi}{3} \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{a^3 \sqrt{3} \pi}{54}.$$

### Quesito 6

**La funzione reale di variabile reale  $f(x)$  ammette derivata nulla in tutti i punti di un intervallo  $J$ , tranne che nel punto  $a$  di  $J$ , dove la funzione non è continua. Si può concludere che la funzione  $f(x)$  è costante in  $J$ ? Fornire una spiegazione esauriente della risposta.**

Per un corollario del teorema di Lagrange si ha:

*Sia  $f$  una funzione definita in un intervallo  $J$  della retta reale ed in esso continua. La  $f$  sia inoltre derivabile in tutti i punti interni al tale intervallo e sia  $f'(x) \equiv 0$ . Allora la funzione  $f$  è costante in tutto  $J$ .*

Nel caso in esame tale teorema non è applicabile a tutto l'intervallo  $J$  in quanto la funzione non è continua in un punto  $a$  dell'intervallo  $J$ . Tuttavia il corollario è applicabile ai due sotto intervalli destro e sinistro non contenenti  $a$ , per cui la funzione sarà costante a tratti negli intervalli di esistenza.

Quindi se la funzione reale di variabile reale  $f(x)$  ammette derivata nulla in tutti i punti di un intervallo  $J$ , tranne che nel punto  $a$  di  $J$ , dove la funzione non è continua si può concludere che la funzione è costante a tratti negli intervalli di esistenza, cioè in  $J \setminus \{a\}$ , ma non si può concludere che sia completamente costante in  $J$ .

Ad esempio la funzione  $y = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$  è definita per  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . La derivata prima è:

$$y' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Essendo la derivata prima nulla, la funzione è costante negli intervalli di esistenza  $(-\infty, 0)$  e  $(0, +\infty)$ , e il valore della costante può essere trovato valutando la funzione in un punto qualsiasi dei due intervalli  $(-\infty, 0)$  e  $(0, +\infty)$ , ad esempio in  $\sqrt{3} \in (0, +\infty)$  e  $-\sqrt{3} \in (-\infty, 0)$ . In questo caso

$$y(\sqrt{3}) = \arctan(\sqrt{3}) + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

$$y(-\sqrt{3}) = -\arctan(\sqrt{3}) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$$

In conclusione la funzione è costante a tratti e vale  $y = \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } x \in (0, +\infty) \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$ .

*Quesito 7*

**Si consideri il seguente limite:**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

**Esso è uguale a:**

$$[A] e^2; [B] \frac{1}{e^2}; [C] \sqrt{e}; [D] \frac{1}{\sqrt{e}};$$

**dove “e” è il numero di Nepero.**

**Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.**

Operiamo la sostituzione  $t = \frac{2}{x}$ . In tal modo  $x \rightarrow 0^+ \Rightarrow t \rightarrow +\infty$ . Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{(-t)}\right)^{(-t)} \right]^{-\frac{1}{2}} = \underbrace{\left\{ \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{(-t)}\right)^{(-t)} \right] \right\}}_{=e}^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \quad \text{per cui la soluzione}$$

corretta è la D.