

**MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE****SCUOLE ITALIANE ALL'ESTERO (EUROPA)****ESAMI DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**

Sessione Ordinaria a.s. 2006/07

SECONDA PROVA SCRITTA

Tema di Matematica

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 degli 8 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1Si consideri la parabola Γ d'equazione $f(x) = x^2 + 1$

1. Sia $A(a, b)$ un punto di Γ . Si dimostri che, qualsiasi sia $a \in \mathbb{Z}$, l'ordinata b non è mai un numero divisibile per 3
2. Sia $C(h, k)$ il centro di una circonferenza tangente a Γ nel punto $(1, 2)$. Si determini l'equazione del luogo geometrico descritto da C .
3. Si tracci il grafico della funzione $\frac{1}{f(x)}$. La funzione ha punti di flesso?
4. Sia $F(t) = \int_0^t \frac{1}{f(x)} dx$. Si calcoli il limite per t tendente ad infinito di $F(t)$ e si interpreti il risultato geometricamente.

PROBLEMA 2Si consideri la funzione f così definita:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3-x^2}{2} & \text{se } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{1}{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

1. Si disegni il grafico di f ;
2. si mostri che f soddisfa le condizioni del teorema del valor medio (o *teorema di Lagrange*) sull'intervallo $[0, 2]$; si determinino i valori medi forniti dal teorema e se ne espliciti il significato geometrico;
3. il dominio piano del II quadrante delimitato dal grafico di f e dagli assi coordinati è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse y , sono tutte quadrate. Si calcoli il volume di S .

QUESTIONARIO

1. Si calcolino le radici dell'equazione: $5^x \cdot 3^{1-x} = 10$
2. Si traccino i grafici delle seguenti funzioni di \mathbb{R} in \mathbb{R} :
 $f: x \rightarrow 2^{x+1}$; $g: x \rightarrow 2^x + 1$; $h: x \rightarrow 2^{|x|}$; $k: x \rightarrow 2^{-x}$
3. Quante cifre ha il numero 7^{60} nella rappresentazione decimale? Motiva esaurientemente la risposta
4. La formula seguente:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

è dovuta a *Leonardo Eulero* (1707-1783), di cui quest'anno ricorre il terzo centenario della nascita. Per dimostrarla può essere utile ricordare che è: $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$? Si illustri il ragionamento seguito.

5. Si vuole che delle due radici reali dell'equazione: $x^2 + 2(h+1)x + m^2h^2 = 0$ una risulti doppia dell'altra. Quale relazione deve sussistere tra i parametri h e m ?
6. Il coefficiente angolare della tangente al grafico della funzione $f(x)$ è, in ogni suo punto P , uguale al doppio dell'ascissa di P . Si determini $f(x)$, sapendo che $f(0)=4$.
7. Fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una sfera di raggio r , quello di minima area laterale ha il suo vertice distante dalla superficie sferica della quantità $r\sqrt{2}$.
8. Si considerino un cubo e l'ottaedro regolare avente per vertici i centri delle sue facce. Si può calcolare il rapporto fra i volumi del cubo e dell'ottaedro? Si può calcolare il rapporto fra le aree del cubo e dell'ottaedro? In caso di risposta affermativa, effettuare il calcolo.

PROBLEMA1

Punto 1

La parabola di equazione $\Gamma: y = x^2 + 1$ ha concavità verso l'alto, non incontra mai l'asse delle ascisse ed ha vertice in $V = (0,1)$.

Dobbiamo mostrare che se $(a, b \in \Gamma)$ con $a = n \in \mathbb{Z}$, allora $b = n^2 + 1$ non è mai divisibile per 3. Dimostriamolo considerando i tre numeri consecutivi $\{n^2 - 1, n^2, n^2 + 1\}$. Sicuramente solo uno dei tre è divisibile per 3, trattandosi di 3 numeri consecutivi. Ora

1. Se n è multiplo di 3 anche n^2 lo sarà ed $(n^2 + 1)$ non è divisibile per 3;
2. Se n non è multiplo di 3, $(n^2 - 1)$ sicuramente sarà divisibile per 3 dal momento che risulta scomponibile come $(n^2 - 1) = (n+1)(n-1)$ ed uno dei tre termini consecutivi tra $\{n-1, n, n+1\}$ dovrà essere divisibile per 3; ergo anche in tal caso $(n^2 + 1)$ non è divisibile per 3.

Punto 2

L'equazione generica della circonferenza di centro $C = (a, b)$ e raggio r è $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Il passaggio per $A = (1,2)$ comporta una prima condizione $(1-a)^2 + (2-b)^2 = r^2$. Inoltre la circonferenza è tangente alla parabola nel punto $A = (1,2)$ e questo significa che in questo punto hanno la stessa tangente. L'equazione di tale tangente è $t: y = m(x-1) + 2$ con $m = f'(1) = 2$ da cui $t: 2x - y = 0$. Ora la distanza del centro $C = (a, b)$ dalla retta $t: 2x - y = 0$ non è altro che il raggio della circonferenza; per cui ricordando la distanza punto-retta si ha $r = \frac{|2a-b|}{\sqrt{5}}$, per cui si

hanno due condizioni da verificare:

$$\begin{cases} (1-a)^2 + (2-b)^2 = r^2 \\ r = \frac{|2a-b|}{\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-a)^2 + (2-b)^2 = r^2 \\ r^2 = \frac{(2a-b)^2}{5} \end{cases}$$

da cui

$$\begin{aligned}
 (1-a)^2 + (2-b)^2 &= \frac{(2a-b)^2}{5} \Rightarrow \\
 5(a^2 - 2a + 1) + 5(b^2 - 4b + 4) - (2a-b)^2 &= 0 \Rightarrow \\
 5(a^2 - 2a + 1) + 5(b^2 - 4b + 4) - (4a^2 + b^2 - 4ab) &= 0 \Rightarrow \\
 (a^2 + 4b^2 + 4ab) - 10(a + 2b) + 25 &= 0 \Rightarrow \\
 [(a + 2b) - 5]^2 = 0 &\Leftrightarrow (a + 2b) - 5 = 0 \Leftrightarrow \\
 b &= \frac{-a + 5}{2}
 \end{aligned}$$

Quindi il luogo geometrico, posto

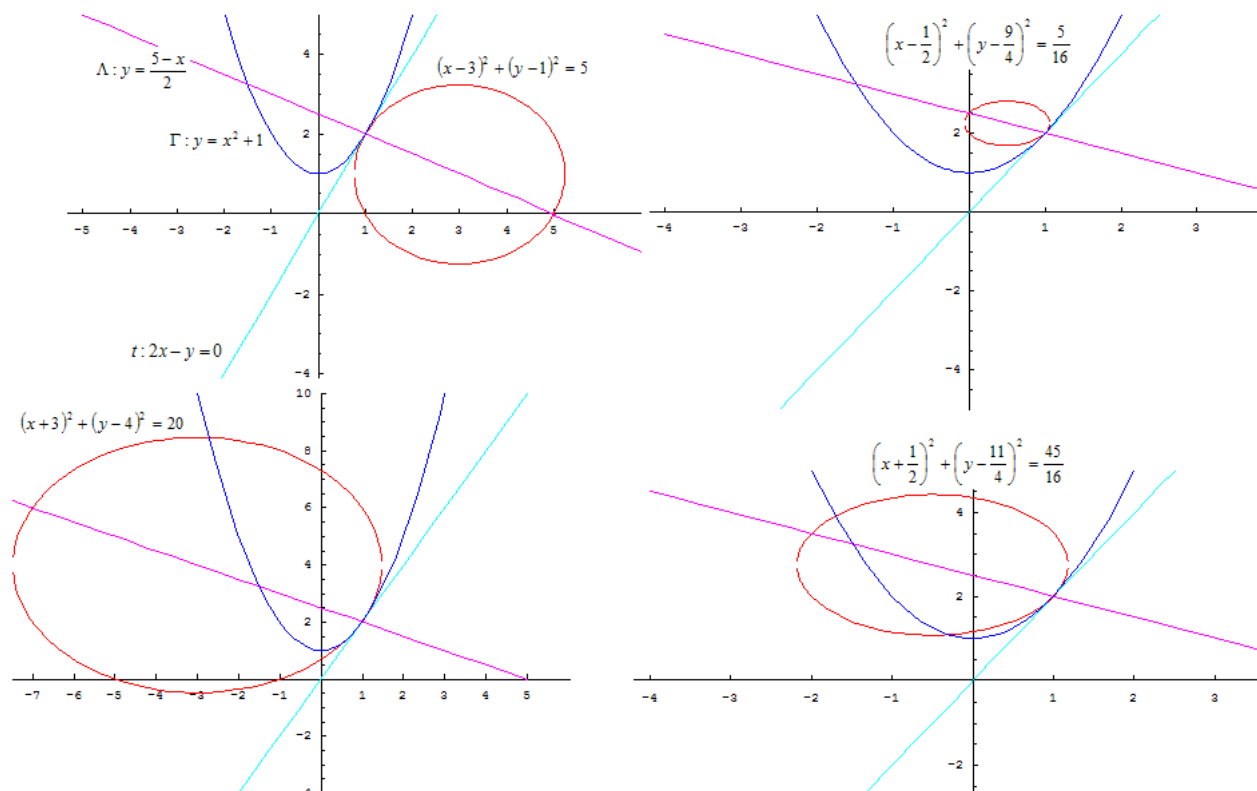
$$\begin{cases} a = x \\ b = y \end{cases}$$

sarà:

$$\Lambda : y = \frac{5-x}{2}$$

Ovviamente il punto $A = (1,2)$ non dovrà appartenere al luogo $\Lambda : y = \frac{5-x}{2}$ altrimenti il punto di tangenza corrisponderebbe col centro e si avrebbe una circonferenza degenera con raggio nullo.

Il grafico sottostante rappresenta quattro situazioni corrispondenti a 4 centri differenti della circonferenza; in ognuno dei grafici è rappresentata la parabola, la circonferenza, la retta tangente in $A = (1,2)$ di equazione $t : 2x - y = 0$ ed il luogo $\Lambda : y = \frac{5-x}{2}$.



Punto 3

Studiamo la funzione $g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1+x^2}$

✚ Dominio: \mathbb{R} ;

✚ Intersezione asse delle ascisse: non ce ne sono;

✚ Intersezioni asse delle ordinate: $x = 0 \rightarrow y = 1$;

✚ Eventuali simmetrie: è una funzione pari, infatti $g(-x) = \frac{1}{1+(-x)^2} = \frac{1}{1+x^2} = g(x)$;

✚ Positività: $g(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$;

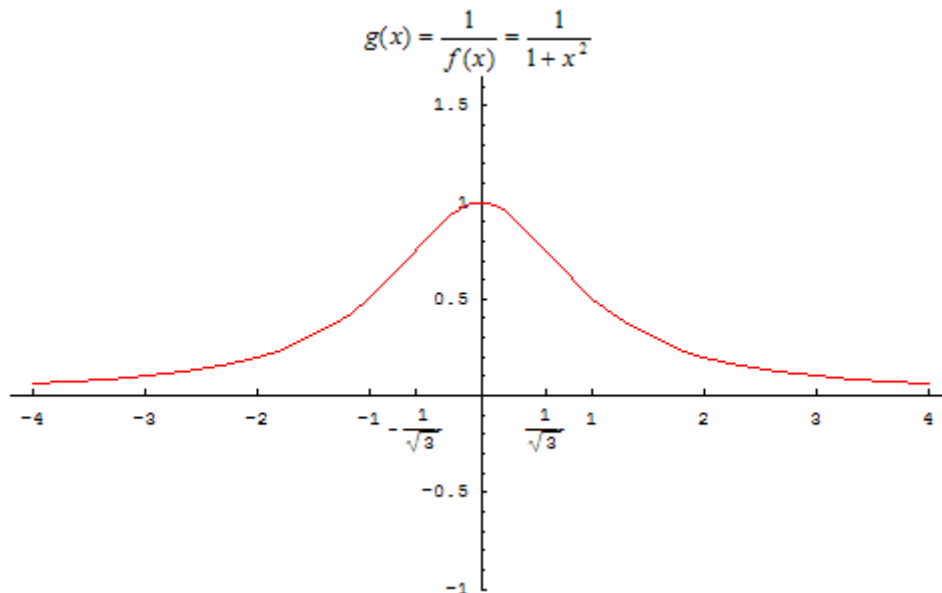
✚ Asintoti verticali: non ce ne sono visto che il dominio è tutto \mathbb{R} ;

✚ Asintoti orizzontali: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$ per cui la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale;

✚ Asintoti obliqui: essendo $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ una funzione razionale fratta, la presenza degli asintoti orizzontali esclude la presenza di asintoti obliqui (e viceversa);

✚ Crescenza e decrescenza: la derivata prima è $g'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0)$ per cui la funzione è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$ e strettamente decrescente in $(0, +\infty)$;

la derivata seconda è $g''(x) = \frac{2(-1+3x^2)}{(1+x^2)^3} = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ per cui $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)$ sono due flessi a tangente obliqua; inoltre $g''(0) = -2 < 0$ per cui $(0,1)$ è un massimo relativo ed assoluto. Il grafico è sotto presentato:



Punto 4

$$F(t) = \int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan(x)]_0^t = \arctan(t)$$

Quindi $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$ che geometricamente rappresenta l'area sottesa dalla curva

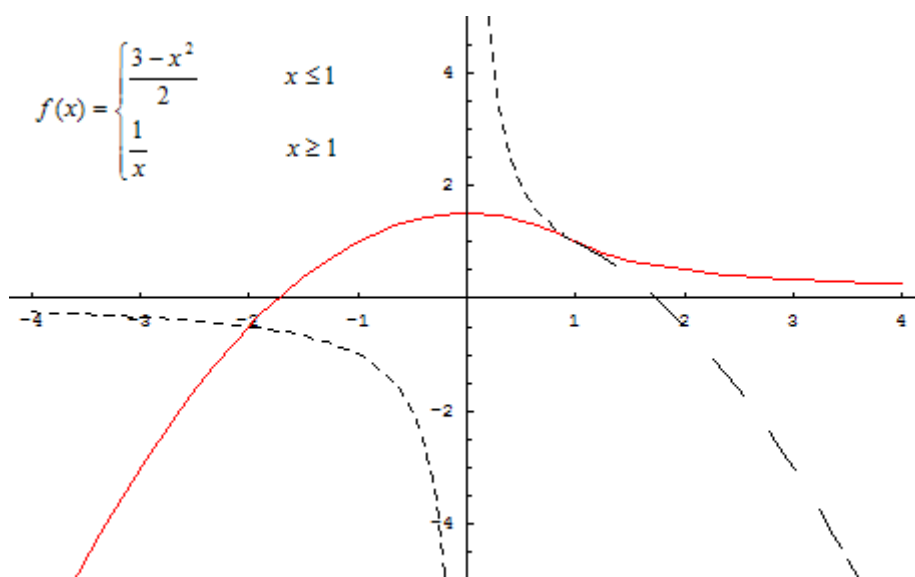
$$g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1+x^2} \text{ nel primo quadrante.}$$

PROBLEMA2*Punto 1*

Il grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & x \geq 1 \end{cases}$$

è l'unione di due grafici; il primo nell'intervallo $]-\infty, 1]$ è il grafico di una parabola con concavità verso il basso, vertice in $V = \left(0, \frac{3}{2}\right)$ e che interseca l'asse delle ascisse in $(-\sqrt{3}, 0)$, mentre il secondo è il ramo nel primo quadrante di iperbole equilatera di equazione $xy = 1$. Il grafico della funzione richiesta è rappresentato nella figura seguente:



Nella figura soprastante sono stati rappresentati entrambi i grafici delle due funzioni componenti la funzione $f(x)$; in particolare la parte tratteggiata sottilmente rappresenta la parte di grafico di iperbole equilatera da non considerare in quanto non facente parte dell'intervallo $[1, +\infty[$, mentre la parte di grafico tratteggiata meno sottilmente rappresenta la parte di grafico della parabola da non considerare in quanto non facente parte dell'intervallo $]-\infty, 1]$. Il grafico in rosso è quello che rappresenta la funzione richiesta.

Punto 2

Il teorema di Lagrange (o del valor medio) afferma che se una funzione reale di variabile reale è continua in un intervallo $[a; b]$ e derivabile in $(a; b)$, esiste almeno un punto interno all'intervallo in

cui la tangente al grafico della funzione è parallela alla retta che congiunge i punti del grafico corrispondenti agli estremi dell'intervallo $[a,b]$. Questa è l'interpretazione geometrica del teorema di Lagrange.

In modo più formale:

- Sia $f : [a,b] \rightarrow R$
- continua in $[a, b]$
- derivabile in (a, b)

allora in queste ipotesi $\exists c \in (a,b): f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Dopo aver enunciato il teorema di Lagrange ed averlo interpretato geometricamente, mostriamo come esso sia applicabile alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & x \geq 1 \end{cases}$$

La funzione è continua in $x = 1$; infatti

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3-x^2}{2} = 1 \end{aligned}$$

Inoltre la derivata della funzione è

$$f'(x) = \begin{cases} -x & x \leq 1 \\ -\frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases}$$

per cui

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x) = -1 \end{aligned}$$

da cui si ricava la derivabilità in $x = 1$. Quindi la funzione $f(x)$ è continua e derivabile nell'intervallo chiuso e limitato $[0,2]$; ergo ad essa è applicabile il teorema di Lagrange.

Per ricavare i valori medi forniti dal teorema suddetto, suddividiamo l'intervallo $[0,2]$ in due sottointervalli la cui unione fornisce l'intervallo $[0,2]$, cioè $[0,2] = [0,1] \cup [1,2]$ e separatamente ricaviamo i valori medi nei due sottointervalli.

- Consideriamo l'intervallo $[0,1]$: applicando il teorema di Lagrange si ha:

$$-c = f(1) - f(0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

che risulta accettabile in quanto $c = \frac{1}{2}$ è incluso in $[0,1]$.

Ora la retta passante per i punti estremi dell'intervallo $[0,1]$ e cioè per i punti $\left(0, \frac{3}{2}\right), (1,1)$ ha

equazione $y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$, mentre la retta tangente alla parabola nel punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{8}\right)$ ha equazione

$$y = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{11}{8} \Rightarrow y = -\frac{x}{2} + \frac{13}{8};$$

da ciò si nota che le due rette, quella passante per i punti $\left(0, \frac{3}{2}\right), (1,1)$, e quella tangente alla parabola nel punto medio ricavato col teorema di Lagrange

sono parallele;

- Consideriamo l'intervallo $[1,2]$: applicando il teorema di Lagrange si ha:

$$-\frac{1}{c^2} = f(2) - f(1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow c^2 = 2 \Rightarrow c = \pm\sqrt{2}$$

di cui l'unico accettabile è $c = \sqrt{2}$ in quanto incluso in $[1,2]$.

Ora la retta passante per i punti estremi dell'intervallo $[1,2]$ e cioè per i punti $(1,1), \left(2, \frac{1}{2}\right)$ ha

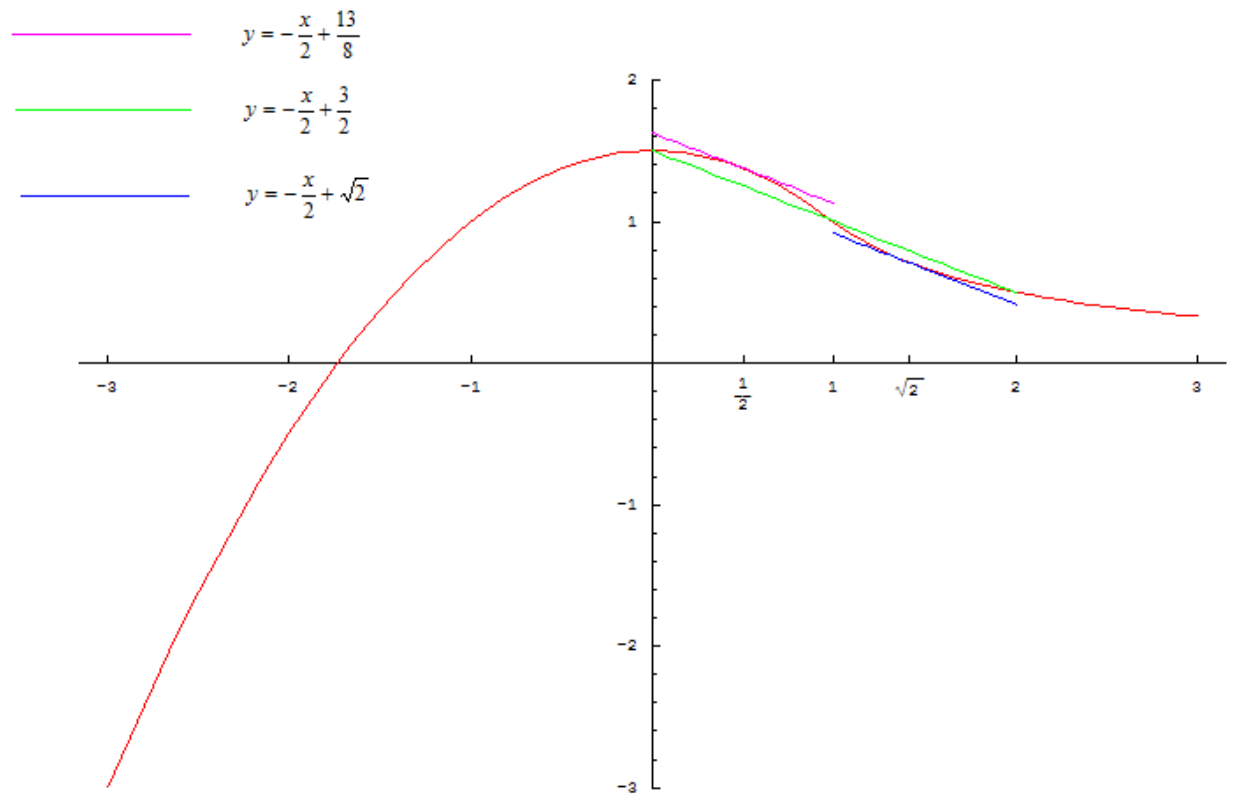
equazione $y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$, mentre la retta tangente alla parabola nel punto $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ha equazione

$$y = -\frac{1}{2}(x - \sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = -\frac{x}{2} + \sqrt{2};$$

da ciò si nota che le due rette, quella passante per i punti $(1,1), \left(2, \frac{1}{2}\right)$, e quella tangente alla parabola nel punto medio ricavato col teorema di

Lagrange sono parallele.

Il grafico sottostante evidenzia l'interpretazione geometrica del teorema di Lagrange:



Punto 3

La funzione $g(x) = \frac{3-x^2}{2}$ può essere espressa in forma implicita nel modo seguente:

$x = \pm\sqrt{3-2y}$ e la determinazione negativa è quella che a noi interessa in quanto facente parte del secondo quadrante.

La sezione piana del solido è il quadrato di lato $l(y) = -\sqrt{3-2y}$ con $0 \leq y \leq \frac{3}{2}$ e la cui area è

$A(y) = (-\sqrt{3-2y})^2 = (3-2y)$ con $0 \leq y \leq \frac{3}{2}$, per cui il volume del solido richiesto è:

$$V = \int_0^{\frac{3}{2}} (3-2y) dy = \left[3y - y^2 \right]_0^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$$

QUESTIONARIO

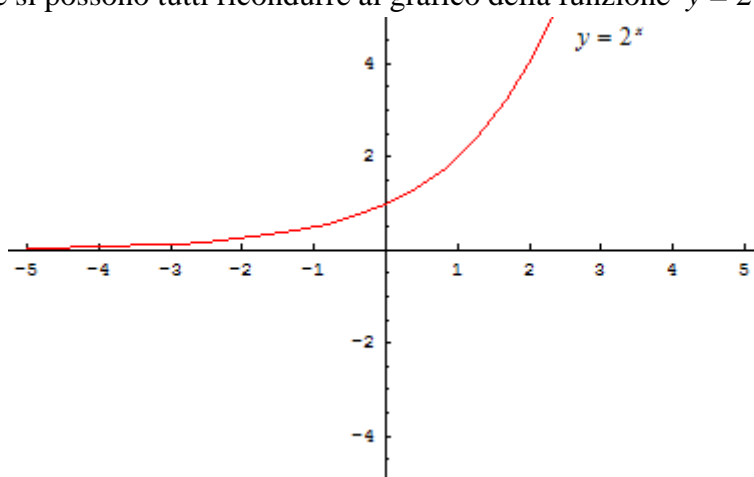
Quesito 1

L'equazione da risolvere è $5^x \cdot 3^{1-x} = 10$. Essa può essere riscritta e risolta nel modo seguente:

$$5^x \cdot 3^{-x} \cdot 3 = 10 \Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{10}{3} \Rightarrow x = \log_{\frac{5}{3}}\left(\frac{10}{3}\right) = \log_{\frac{5}{3}}\left(\frac{5}{3}\right) + \log_{\frac{5}{3}}(2) = 1 + \log_{\frac{5}{3}}(2).$$

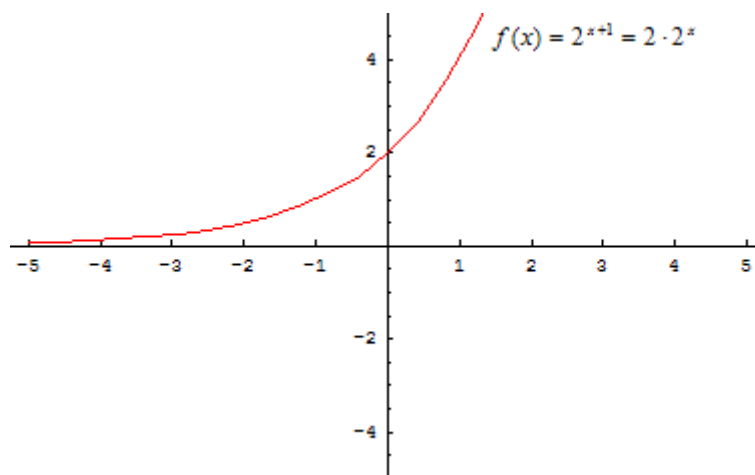
Quesito 2

I grafici da disegnare si possono tutti ricondurre al grafico della funzione $y = 2^x$ sotto presentato:

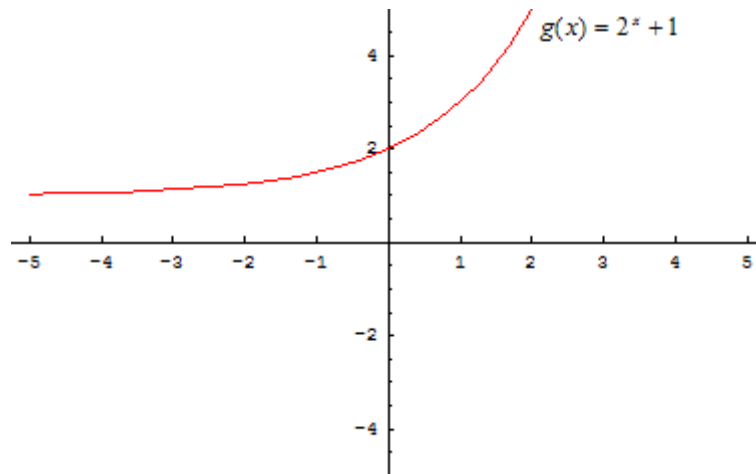


Studiamo i 4 grafici.

1. $f(x) = 2^{x+1} = 2 \cdot 2^x = 2y$ per cui il grafico lo si ricava dal grafico di $y = 2^x$ moltiplicando ogni ordinata per 2 :

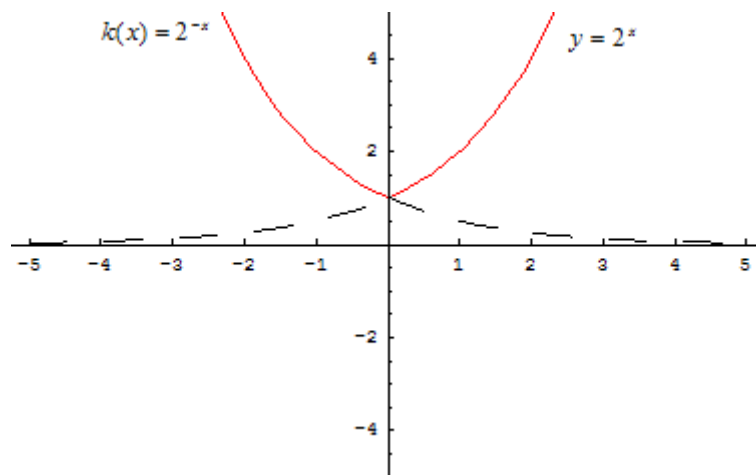


2. $g(x) = 2^x + 1 = y + 1$ per cui il grafico lo si ricava dal grafico di $y = 2^x$ traslandolo rigidamente verso l'alto di una unità, cioè aggiungendo una unità ad ogni ordinata del grafico di $y = 2^x$:

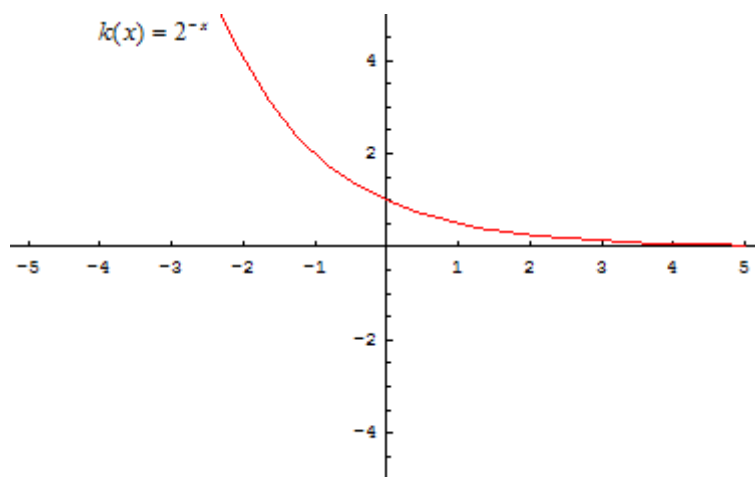


3. $h(x) = 2^{|x|} = \begin{cases} 2^x & x \geq 0 \\ 2^{-x} & x < 0 \end{cases}$. Ora la funzione $k(x) = 2^{-x}$ non è altro che la funzione pari

della funzione $y = 2^x$, per cui il grafico di $k(x) = 2^{-x}$ lo si ricava da quello di $y = 2^x$ rendendolo simmetrico rispetto all'asse delle ordinate come sotto presentato:



4. $k(x) = 2^{-x}$: come detto nel punto 3 tale grafico lo si ricava da quello di $y = 2^x$ rendendolo simmetrico rispetto all'asse delle ordinate:



Quesito 3

In generale il numero di cifre K di un numero N nella rappresentazione in base M è pari a $K = \{1 + \text{int}[\log_M(N)]\}$ dove la funzione $\text{int}(\cdot)$ è la funzione parte intera di un numero. Nel caso di $N = 7^{60}$, $M = 10$ si ha $K = \{1 + \text{int}[\log_{10}(7^{60})]\} = \{1 + \text{int}[60 \cdot \log_{10}(7)]\} = \{1 + \text{int}[50.7]\} = 1 + 50 = 51$.

Quesito 4

Per dimostrare quanto richiesto, ricordiamo la formula del teorema binomiale o del binomio di Newton. Tale formula si scrive nel seguente modo:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Sfruttando tale formula, ed applicandola alla successione $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ si ha:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \frac{1}{n^3} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + \frac{n!}{1!(n-1)!n} + \frac{n!}{2!(n-2)!n \cdot n} + \frac{n!}{3!(n-3)!n \cdot n \cdot n} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{n!}{n^n} = \\ &= 1 + \frac{n!}{1!n!} + \frac{1}{2!} \frac{n \cdot (n-1)}{n \cdot n} + \frac{1}{3!} \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{n \cdot n \cdot n} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 2 \cdot 1}{n^n} = \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \frac{(n-1)}{n} + \frac{1}{3!} \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{n \cdot n} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{(n-1) \cdot (n-2) \dots 2 \cdot 1}{n^{n-1}} = \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

Se ora applichiamo il limite ad ambo i membri si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Ora, sapendo per ipotesi che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ si ricava:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \right] = \\ = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare.

Quesito 5

Indichiamo con $\{x_1, x_2 = 2x_1\}$ le due radici dell'equazione $x^2 + 2(h+1)x + m^2h^2 = 0$. Innanzitutto dobbiamo imporre che le due radici siano reali altrimenti non avrebbe senso la relazione d'ordine richiesta dalla traccia, per cui va imposto che il delta sia strettamente positivo:

$$\frac{\Delta}{4} = (h+1)^2 - m^2h^2 > 0 \Leftrightarrow m^2 < \frac{(h+1)^2}{h^2} \Rightarrow -\frac{(h+1)}{h} < m < \frac{(h+1)}{h}.$$

Per avere una radice doppia dell'altra va imposto che:

1. $h \neq 0$ altrimenti avremo due soluzioni $x = 0, x = -2$ non accettabili;
2. $m \neq 0$ altrimenti avremo due soluzioni $x = 0, x = -2(h+1)$ non accettabili;
3. $h \neq -1$ altrimenti avremo due soluzioni complesse coniugate $x = \pm m \cdot i$

Inoltre ricordando che in un'equazione di secondo grado $x^2 + sx + p = 0$ la somma delle soluzioni cambiata di segno è pari al coefficiente di grado unitario ($-s$) e il prodotto è pari al coefficiente di grado nullo (p), bisogna risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(h+1) \\ x_1 \cdot x_2 = m^2h^2 \\ x_2 = 2x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 = -2(h+1) \\ 2x_1^2 = m^2h^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \left[\frac{-2(h+1)}{3} \right]^2 = m^2h^2 \Leftrightarrow \frac{8(h+1)^2}{9} = m^2h^2 \Leftrightarrow m^2 = \frac{8(h+1)^2}{9h^2} \Leftrightarrow m = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{h+1}{h} \right)$$

Ed entrambe le soluzioni sono accettabili in quanto rispettano la condizione $-\frac{(h+1)}{h} < m < \frac{(h+1)}{h}$.

In conclusione il legame tra i coefficienti m ed h è $m = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{h+1}{h} \right)$ con $h \neq 0, h \neq -1, m \neq 0$. Ad

esempio per $h = 2$ si ha $m = \pm\sqrt{2}$ e l'equazione è $x^2 + 6x + 8 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -3 \pm 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -4 \end{cases}$

Quesito 6

Ricordiamo che il coefficiente angolare della retta tangente ad una funzione $f(x)$ nel punto

generico $P = (x, f(x))$ è $f'(x)$, per cui la risoluzione del quesito comporta la risoluzione del seguente problema di Cauchy:

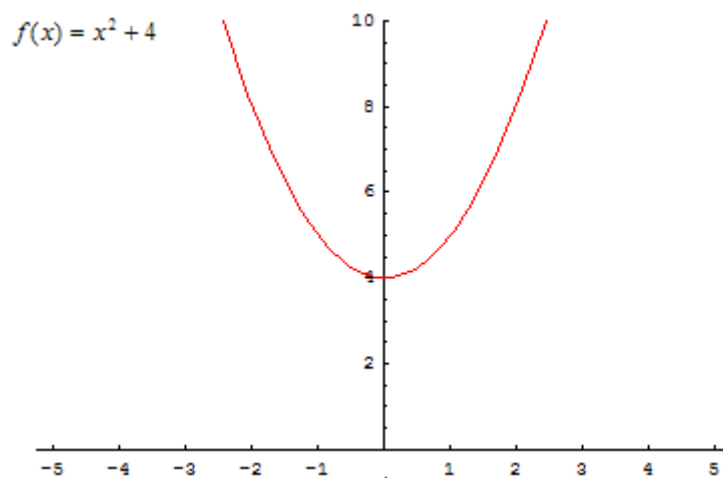
$$\begin{cases} f'(x) = 2x \\ f(0) = 4 \end{cases}$$

Ora l'equazione differenziale del primo ordine $f'(x) = 2x$ è risolubile facilmente; infatti

$f'(x) = 2x \Rightarrow f(x) = \int 2x \, dx = x^2 + k$, per cui il problema di Cauchy diventa:

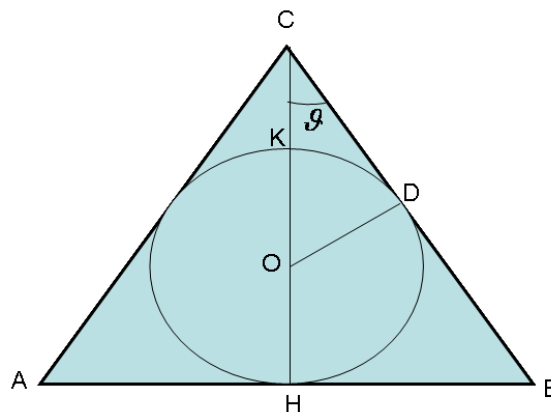
$$\begin{cases} f(x) = x^2 + k \\ f(0) = 4 \end{cases} \Rightarrow k = 4 \Rightarrow f(x) = x^2 + 4$$

La soluzione del problema di Cauchy è la parabola di equazione $f(x) = x^2 + 4$ sotto presentata:



Quesito 7

Si consideri la figura sottostante:



L'area laterale del cono è

$$A_l = \pi \cdot (\overline{CB} \cdot \overline{HB})$$

con

$$\overline{CB} = \frac{\overline{CH}}{\cos(\vartheta)}$$

$$\overline{CH} = \overline{CO} + \overline{OH}$$

$$\overline{OH} = r$$

$$\overline{CO} = \frac{\overline{OD}}{\sin(\vartheta)} = \frac{r}{\sin(\vartheta)}$$

$$\text{per cui } \overline{CH} = \overline{CO} + \overline{OH} = r \left(\frac{1 + \sin(\vartheta)}{\sin(\vartheta)} \right)$$

Ora

$$\overline{HB} = \overline{CH} \tan(\vartheta) = r \left(\frac{1 + \sin(\vartheta)}{\sin(\vartheta)} \right) \tan(\vartheta) = r \left(\frac{1 + \sin(\vartheta)}{\cos(\vartheta)} \right)$$

$$\overline{CB} = \frac{\overline{CH}}{\cos(\vartheta)} = r \left(\frac{1 + \sin(\vartheta)}{\sin(\vartheta) \cos(\vartheta)} \right)$$

per cui

$$A_l(\vartheta) = \pi(\overline{CB} \cdot \overline{HB}) = \pi r \left(\frac{1 + \sin(\vartheta)}{\cos(\vartheta)} \right) r \left(\frac{1 + \sin(\vartheta)}{\sin(\vartheta) \cos(\vartheta)} \right) = \pi r^2 \left[\frac{(1 + \sin(\vartheta))^2}{\sin(\vartheta) \cos^2(\vartheta)} \right] = \pi r^2 \left[\frac{(1 + \sin(\vartheta))}{\sin(\vartheta)(1 - \sin(\vartheta))} \right]$$

Calcoliamo ora la derivata:

$$A_l'(\vartheta) = \pi r^2 \left[\frac{\cos(\vartheta)(\sin(\vartheta)(1 - \sin(\vartheta))) - (1 + \sin(\vartheta))(\cos(\vartheta) - 2 \cos(\vartheta) \sin(\vartheta))}{(\sin(\vartheta)(1 - \sin(\vartheta)))^2} \right] =$$

$$\pi r^2 \left[\frac{\cos(\vartheta)(\sin^2(\vartheta) + 2 \sin(\vartheta) - 1)}{(\sin(\vartheta)(1 - \sin(\vartheta)))^2} \right]$$

Ora ricordiamo che la limitazione da imporre è $\vartheta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, per cui in tal caso il fattore della

derivata $\pi r^2 \left[\frac{\cos(\vartheta)}{(\sin(\vartheta)(1 - \sin(\vartheta)))^2} \right]$ risulta essere sempre positivo per cui

$$A_l'(\vartheta) > 0 \Rightarrow (\sin^2(\vartheta) + 2 \sin(\vartheta) - 1) > 0 \Rightarrow \sin(\vartheta) < -1 - \sqrt{2} \vee \sin(\vartheta) > -1 + \sqrt{2}$$

Delle due la condizione $\sin(\vartheta) < -1 - \sqrt{2}$ non è mai verificata, mentre la condizione $\sin(\vartheta) > -1 + \sqrt{2}$ nell'intervallo $\vartheta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ è verificata per $\alpha < \vartheta < \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \arcsin(-1 + \sqrt{2})$.

Quindi tenendo conto delle considerazioni fatte si ha che

$$A_l'(\vartheta) > 0 \Rightarrow 0 < \vartheta < \alpha$$

Calcoliamo la derivata seconda: dopo molte semplificazioni si ha:

$$A_l''(\vartheta) = \pi r^2 \left[\frac{5 \sin^3(\vartheta) + 4 \sin^2(\vartheta) - 2 \sin(\vartheta) + 1}{(1 - \sin(\vartheta))^2} \right]$$

$$A_l''(\vartheta = \arcsin(-1 + \sqrt{2})) = \pi r^2 \left[\frac{5(-1 + \sqrt{2})^3 + 4(-1 + \sqrt{2})^2 - 2(-1 + \sqrt{2}) + 1}{(2 - \sqrt{2})^2} \right] = \pi r^2 \left[\frac{15\sqrt{2} - 20}{6 - 4\sqrt{2}} \right] > 0$$

Per cui per $\vartheta = \alpha = \arcsin(-1 + \sqrt{2})$ si ha la minima area laterale.

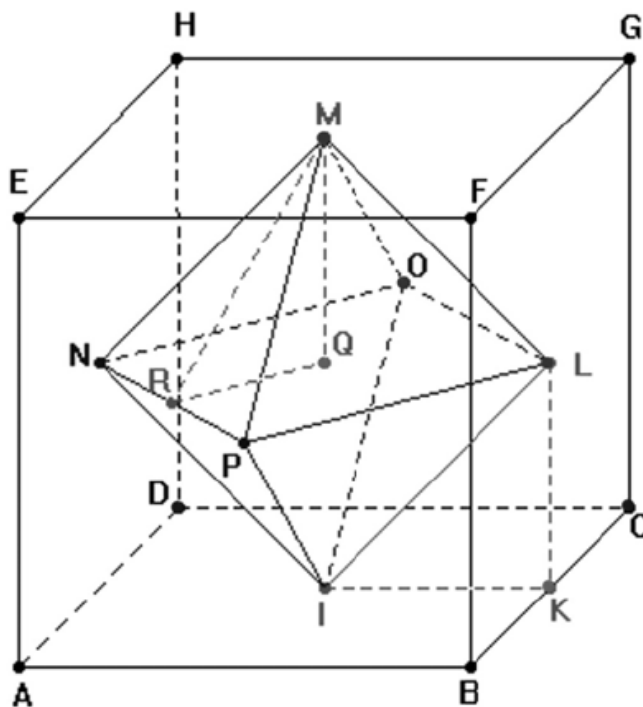
In queste condizioni

$$\begin{aligned} \overline{CK} &= \overline{CO} - \overline{OK} = \left[\frac{r}{\sin(\vartheta)} - r \right]_{r=\arcsin(\sqrt{2}-1)} = r \left[\frac{1}{\sqrt{2}-1} - 1 \right] = r \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \\ &= r(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1) = r\sqrt{2} \end{aligned}$$

come volevamo dimostrare.

Quesito 8

Si consideri la figura seguente che mostra la geometria del problema:



Lo spigolo IL dell'ottaedro lo si può ricavare applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo isoscele IKL. Infatti indicato con $\overline{AB} = l$ la lunghezza dello spigolo del cubo, si ha

$\overline{IK} = \overline{KL} = \frac{l}{2}$ per cui $\overline{IL} = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{l}{\sqrt{2}}$ ed essendo l'ottaedro regolare, tutti gli spigoli

dell'ottaedro saranno congruenti. Per quanto riguarda il volume dell'ottaedro, basta notare che esso

è formato da due piramidi aventi il quadrato NOLP come base per cui

$$V_{ottaedro} = 2 \frac{A_{NOLP} \cdot \overline{MQ}}{3} = 2 \frac{\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{l}{2}}{3} = \frac{l^3}{6}$$

mentre $V_{cubo} = l^3$ per cui $\frac{V_{cubo}}{V_{ottaedro}} = \frac{l^3}{\frac{l^3}{6}} = 6$

La superficie totale del cubo è $S_{cubo} = 6l^2$, mentre quella dell'ottaedro regolare è

$$S_{ottaedro} = 2 \left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2 \sqrt{3} = l^2 \sqrt{3} \text{ per cui } \frac{S_{cubo}}{S_{ottaedro}} = \frac{6l^2}{l^2 \sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$