



*Ministero della Pubblica Istruzione*

**X02M - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**

CORSO SPERIMENTALE

**Indirizzo:** SCIENTIFICO - TECNOLOGICO

**Tema di:** MATEMATICA

**Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.**

**PROBLEMA 1**

Si consideri la funzione integrale:

$$f(x) = \int_0^x (e^{3t} + 2e^{2t} - 3e^t) dt$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
2. Si scriva l'equazione della normale alla curva C nel punto di ascissa  $\log 2$ .
3. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva C, dall'asse delle ascisse e dalla retta di equazione  $x = \log 3$ .

4. Tenuto conto che:  $\log 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$

si calcoli un valore approssimato di  $\log 2$ , utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

**PROBLEMA 2**

Rispetto ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) si consideri il punto A(2,0).

1. Si scriva l'equazione del luogo dei punti del piano che verificano la condizione:

$$\overline{PO}^2 + 2\overline{PA}^2 = 8,$$

controllando che si tratta di una circonferenza di cui si calcolino le coordinate del centro e il raggio.

2. Si determini l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalla retta OB con la tangente alla circonferenza in B, essendo B il punto della curva avente la stessa ascissa di A e ordinata positiva.
3. Si scriva l'equazione della parabola cubica  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  che presenta, nell'origine, un flesso con tangente orizzontale e passa per B; si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C.
4. Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dal segmento OB e dall'arco OB della suddetta parabola cubica.



*Ministero della Pubblica Istruzione*

**X02M - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**

CORSO SPERIMENTALE

**Indirizzo:** SCIENTIFICO - TECNOLOGICO

**Tema di:** MATEMATICA

**QUESTIONARIO**

1. Si calcoli il volume del solido generato in una rotazione completa attorno all'asse delle x della regione finita di piano delimitata dalla curva  $y = 2/x$  e dalla retta di equazione  $y = -x + 3$ .
2. Si calcoli il valore medio della funzione  $y = \sin^3 x$ , nell'intervallo  $0 \leq x \leq \pi$ .
3. Data la funzione  $y = x^3 + kx^2 - kx + 3$ , nell'intervallo chiuso  $[1,2]$ , si determini il valore di k per il quale sia ad essa applicabile il teorema di Rolle e si trovi il punto in cui si verifica la tesi del teorema stesso.
4. Si consideri la seguente proposizione: "In ogni triangolo isoscele la somma delle distanze di un punto della base dai due lati eguali è costante". Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.
5. Si dimostri che l'equazione  $e^x - x^3 = 0$  ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.
6. Si scelga a caso un punto P all'interno di un cerchio. Si determini la probabilità che esso sia più vicino al centro che alla circonferenza del cerchio.
7. Servendosi in maniera opportuna del principio di Cavalieri nel piano, si dimostri che l'area di un'ellisse di semiassi a, b è  $S = \pi ab$ .
8. Si calcoli il limite della funzione  $\frac{x - \sin x}{x(1 - \cos x)}$ , quando x tende a 0.
9. Si verifichi che la curva di equazione  $y = x^3 + 3x^2 - 1$  è simmetrica rispetto al suo punto di flesso.
10. Si risolva la disequazione  $5 \binom{x}{3} \leq \binom{x+2}{3}$ .

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

**PROBLEMA 1**

Si consideri la funzione integrale:

$$f(x) = \int_0^x (e^{3t} + 2e^{2t} - 3e^t) dt$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
2. Si scriva l'equazione della normale alla curva C nel punto di ascissa  $\log 2$ .
3. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva C, dall'asse delle ascisse e dalla retta di equazione  $x = \log 3$ .

4. Tenuto conto che:  $\log 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$

si calcoli un valore approssimato di  $\log 2$ , utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

**Soluzione di De Rosa Nicola**

1)

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x (e^{3t} + 2e^{2t} - 3e^t) dt = \left[ \frac{1}{3} e^{3t} + e^{2t} - 3e^t \right]_0^x = \\ &= \frac{1}{3} e^{3x} + e^{2x} - 3e^x - \frac{1}{3} - 1 + 3 = \frac{e^{3x} + 3e^{2x} - 9e^x + 5}{3} \end{aligned}$$

Ora poniamo per un istante  $z = e^x$ . Si ha:

$$f(\ln z) = f(z) = \frac{z^3 + 3z^2 - 9z + 5}{3}$$

E si riconosce subito che essa si annulla per  $z = 1$ . In questo modo applicando la regola di Ruffini si ha:

$$f(\ln z) = f(z) = \frac{z^3 + 3z^2 - 9z + 5}{3} = \frac{(z-1)^2(z+5)}{3}$$

Quindi

$$f(x) = \frac{(e^x - 1)^2(e^x + 5)}{3}$$

**Studio della funzione**  $f(x) = \frac{(e^x - 1)^2(e^x + 5)}{3}$

**Dominio:**  $\forall x \in \mathbb{R}$

**Intersezione asse delle ascisse:**  $f(x) = \frac{(e^x - 1)^2(e^x + 5)}{3} = 0 \rightarrow e^x - 1 = 0, e^x + 5 = 0 \rightarrow x = 0$

**Intersezione asse delle ordinate:**  $x = 0 \rightarrow y = 0$

**Positività:**  $f(x) = \frac{(e^x - 1)^2(e^x + 5)}{3} = 0 \rightarrow e^x - 1 = 0, e^x + 5 = 0 \rightarrow x = 0$

**Asintoti verticali:** non ce ne sono visto che il dominio è tutto  $\mathbb{R}$

**Asintoti orizzontali:**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x - 1)^2(e^x + 5)}{3} = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(e^x - 1)^2(e^x + 5)}{3} = \frac{5}{3}$  quindi  $y = \frac{5}{3}$  è un

asintoto orizzontale.

**Asintoti obliqui:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x - 1)^2(e^x + 5)}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x - 1)^2(e^x + 5)}{3x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^{3x} + 6e^{2x} - 9e^x}{3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(e^x - 1)^2(e^x + 5)}{3x} = 0$$

in cui è stato applicato De L'Hopital vista la forma indeterminata: per cui non esistono asintoti obliqui.

**Crescenza e decrescenza:**

$$f'(x) = \frac{3e^{3x} + 6e^{2x} - 9e^x}{3} = e^{3x} + 2e^{2x} - 3e^x = e^x(e^x + 3)(e^x - 1) > 0 \rightarrow (e^x - 1) > 0 \rightarrow x > 0 \text{ per cui}$$

nell'intervallo  $(0, +\infty)$  la funzione è strettamente crescente.

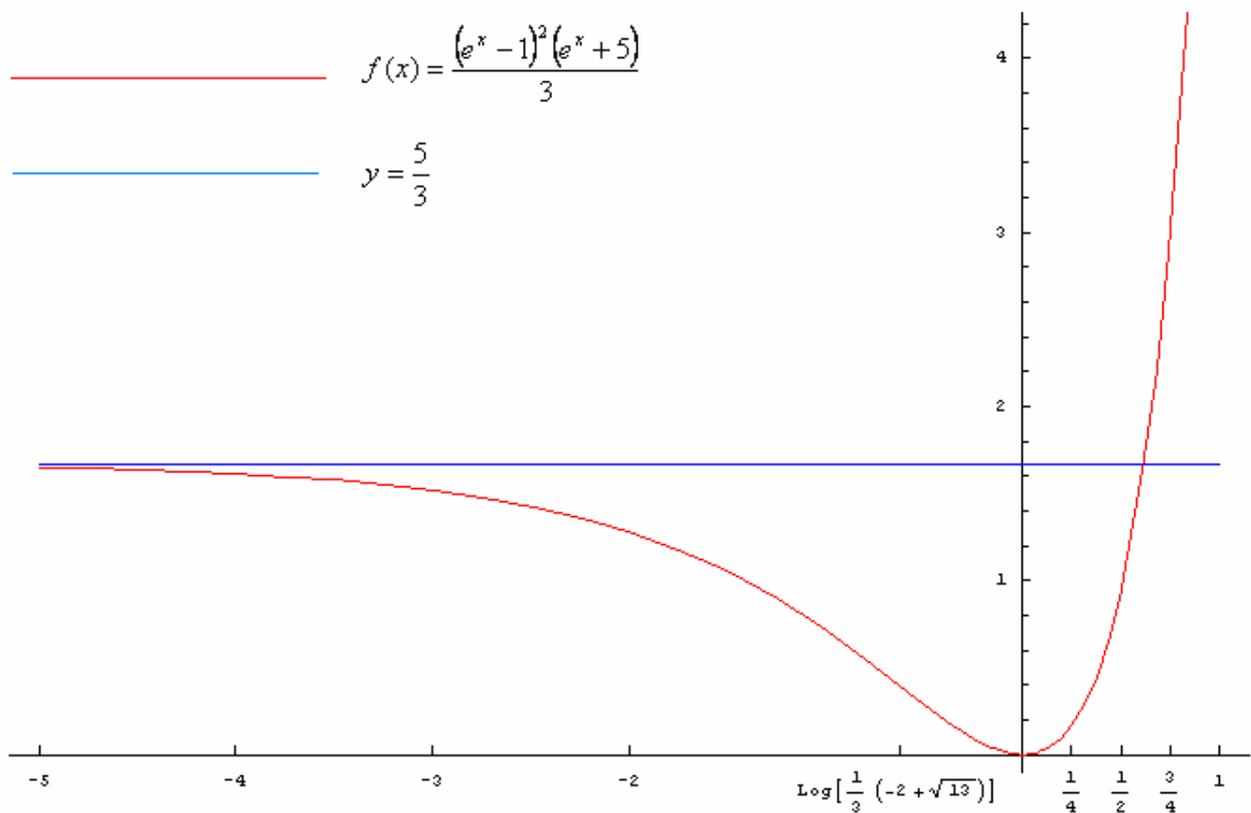
$$f''(x) = 3e^{3x} + 4e^{2x} - 3e^x = e^x(3e^{2x} + 4e^x - 3) =$$

$$3e^x \left[ e^x + \frac{(2 - \sqrt{13})}{3} \right] \left[ e^x + \frac{(2 + \sqrt{13})}{3} \right] = 0 \rightarrow e^x + \frac{(2 - \sqrt{13})}{3} = 0 \rightarrow x = \ln \left( \frac{\sqrt{13} - 2}{3} \right)$$

Inoltre  $f''(x=0) = 4 > 0$  per cui  $(0,0)$  è un minimo relativo ed

$$\left( \ln \left( \frac{\sqrt{13} - 2}{3} \right), \frac{(13 + \sqrt{13})(\sqrt{13} - 5)^2}{81} \right) \text{ è un flesso}$$

Il grafico è sotto presentato:



2)

Per definizione, la normale ad una curva in un punto, non è altro che la perpendicolare alla tangente nel punto stesso.

Il punto in questione è  $\left(\ln 2, \frac{7}{3}\right)$ . La tangente in questo punto è:

$$y - \frac{7}{3} = f'(\ln 2)(x - \ln 2)$$

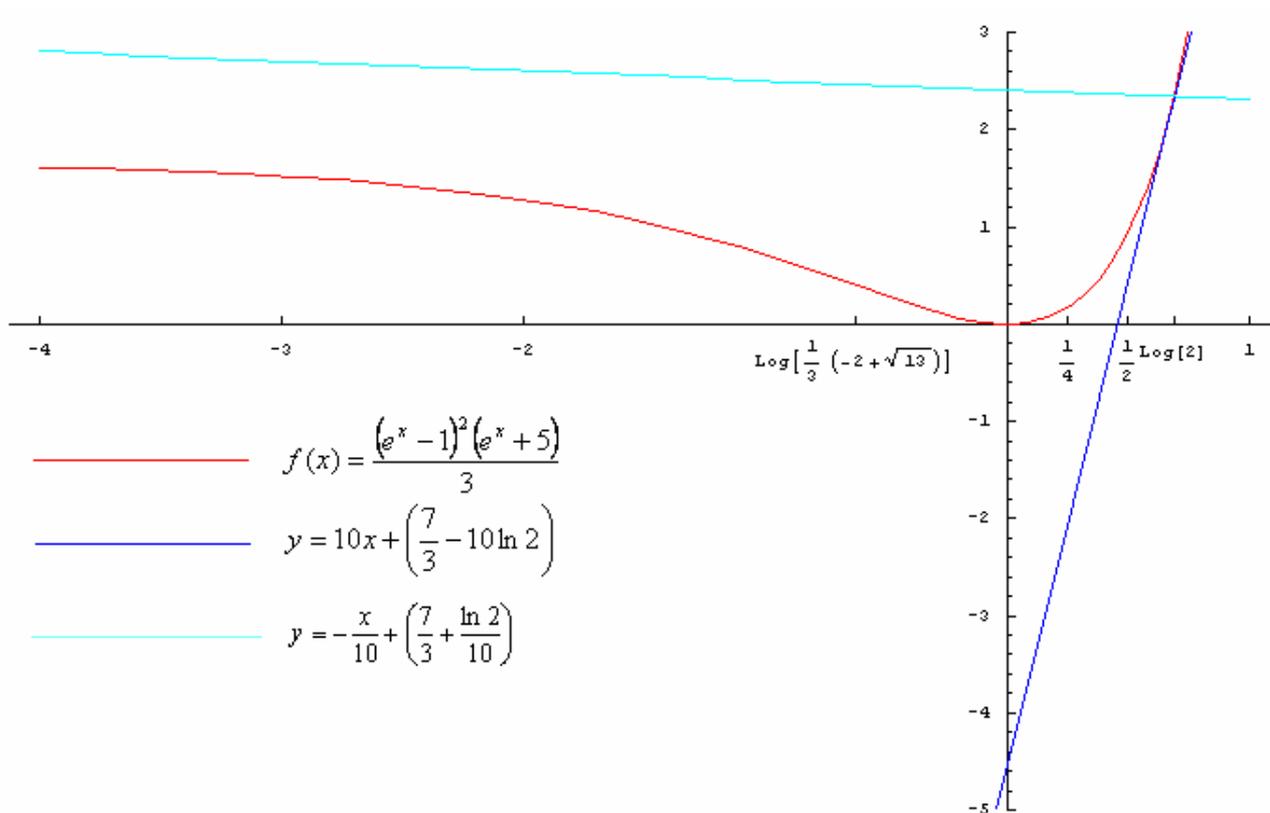
Dove  $f'(\ln 2) = 10$  per cui l'equazione è:

$$y = 10x + \left(\frac{7}{3} - 10\ln 2\right)$$

La normale avrà equazione allora:

$$y - \frac{7}{3} = -\frac{1}{10}(x - \ln 2) \rightarrow y = -\frac{x}{10} + \left(\frac{7}{3} + \frac{\ln 2}{10}\right)$$

Il tutto è sotto presentato:



3)

L'area richiesta è pari a:

$$\begin{aligned}
 AREA &= \int_0^{\ln 3} \left( \frac{e^{3x} + 3e^{2x} - 9e^x + 5}{3} \right) dx = \left[ \frac{e^{3x}}{9} + \frac{e^{2x}}{2} - 3e^x + \frac{5x}{3} \right]_0^{\ln 3} = \\
 &= \left[ \frac{e^{\ln 27}}{9} + \frac{e^{\ln 9}}{2} - 3e^{\ln 3} + \frac{5 \ln 3}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{2} + 3 \right] = \left[ 3 + \frac{9}{2} - 9 + \frac{5 \ln 3}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{2} + 3 \right] = \frac{8}{9} + \frac{5 \ln 3}{3}
 \end{aligned}$$

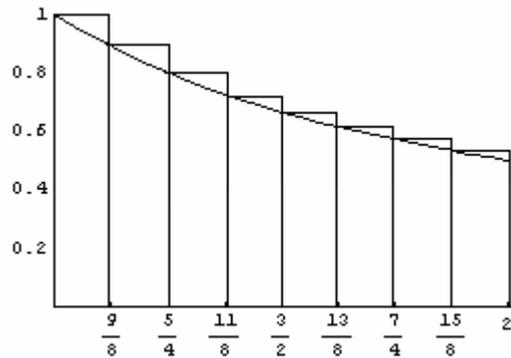
4)

La traccia per questo quesito ci fornisce un grande aiuto: ci dice che il valore è ottenibile da quell'integrale. Ricordando cosa sia geometricamente un integrale, e cioè l'area sottesa, possiamo applicare il metodo dei rettangoli per calcolare approssimativamente l'area e quindi il valore  $\ln 2$ .

L'approssimazione per rettangoli, si traduce in:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{n} [f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})]$$

Nel nostro caso utilizzeremo  $n=8$  rettangoli con intervalli uguali come evidenza la figura sottostante:



Il valore approssimato è allora:

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \cong \frac{1}{8} \left[ 1 + \frac{8}{9} + \frac{4}{5} + \frac{8}{11} + \frac{2}{3} + \frac{8}{13} + \frac{4}{7} + \frac{8}{15} \right] \cong \frac{1}{8} \left( \frac{52279}{9009} \right) \cong 0.725$$

valor che si avvicina sempre piu' al valore effettivo al crescere degli intervalli considerati.

**PROBLEMA 2**

Rispetto ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) si consideri il punto A(2,0).

1. Si scriva l'equazione del luogo dei punti del piano che verificano la condizione:

$$\overline{PO}^2 + 2\overline{PA}^2 = 8,$$

controllando che si tratta di una circonferenza di cui si calcolino le coordinate del centro e il raggio.

2. Si determini l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalla retta OB con la tangente alla circonferenza in B, essendo B il punto della curva avente la stessa ascissa di A e ordinata positiva.
3. Si scriva l'equazione della parabola cubica  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  che presenta, nell'origine, un flesso con tangente orizzontale e passa per B; si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C.
4. Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dal segmento OB e dall'arco OB della suddetta parabola cubica.

**Soluzione di De Rosa Nicola**

1)

Un punto generico ha coordinate  $(x, y)$  per cui si ha:

$$PO^2 = x^2 + y^2$$

$$PA^2 = (x-2)^2 + y^2$$

Per cui

$$PO^2 + 2PA^2 = 8 \rightarrow x^2 + y^2 + 2[(x-2)^2 + y^2] = 8 \rightarrow$$

$$3x^2 + 3y^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{8}{3}x = 0$$

Le coordinate del centro sono allora  $C = \left(\frac{4}{3}, 0\right)$  ed il raggio, visto che la circonferenza passa per

$O=(0,0)$ , è  $R = \frac{4}{3}$ .

2)

Calcolo punto B:

$$x = 2 \rightarrow 4 + y^2 - \frac{16}{3} = 0 \rightarrow y = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Per cui  $B = \left(2, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

La tangente alla circonferenza nel punto  $B = \left(2, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$  avrà equazione

$$y = m(x-2) + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Ora per il calcolo del coefficiente angolare si possono seguire due strade, che mostreremo entrambe. La prima si basa sulla risoluzione del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{8}{3}x = 0 \\ y = m(x-2) + \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

E sulla successiva imposizione della condizione di tangenza, cioè discriminante nullo. Risolvendo si ha:

$$\begin{aligned} x^2 + \left[m(x-2) + \frac{2}{\sqrt{3}}\right]^2 - \frac{8}{3}x = 0 &\rightarrow x^2 + m^2(x^2 - 4x + 4) + \frac{4}{3} + \frac{4}{\sqrt{3}}m(x-2) - \frac{8}{3}x = 0 \rightarrow \\ x^2(m^2 + 1) + x\left(-4m^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}m - \frac{8}{3}\right) + \left(4m^2 - \frac{8m}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Ora imponendo  $\Delta = 0$  si ha:

$$\begin{aligned} \left(-4m^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}m - \frac{8}{3}\right)^2 - 4(m^2 + 1)\left(4m^2 - \frac{8m}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3}\right) &= 0 \rightarrow \\ \left(16m^4 - \frac{32m^3}{\sqrt{3}} + \frac{80m^2}{3} - \frac{64m}{3\sqrt{3}} + \frac{64}{9}\right) - 4\left(4m^4 - \frac{8m^3}{\sqrt{3}} + \frac{16m^2}{3} - \frac{8m}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3}\right) &= 0 \rightarrow \\ \frac{16m^2}{3} - \frac{64m}{3\sqrt{3}} + \frac{64}{9} - \frac{16}{3} + \frac{32m}{\sqrt{3}} &= 0 \rightarrow 48\sqrt{3}m^2 + 96m + 16\sqrt{3} = 0 \rightarrow \\ 3\sqrt{3}m^2 + 6m + \sqrt{3} = 0 &\rightarrow 3m^2 + 2\sqrt{3}m + 1 = 0 \rightarrow (m\sqrt{3} + 1)^2 = 0 \rightarrow m = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

L'altro modo di procedere, più semplice ed intuitivo, è di utilizzare le derivate, ricordando che il coefficiente angolare della tangente è il valore della derivata nell'ascissa del punto di tangenza. In tal caso però va esplicitata prima la circonferenza come una normale funzione, cioè dobbiamo esprimerla come  $y = f(x)$ . Risulta chiaro che in tal caso si ha:

$$y = \pm \sqrt{\frac{8x}{3} - x^2}$$

In tal caso, dovendo calcolare la tangente in un punto che si trova nel primo quadrante, allora va considerata la semicirconferenza che si trova nel primo quadrante di equazione  $y = \sqrt{\frac{8x}{3} - x^2}$  la cui derivata è

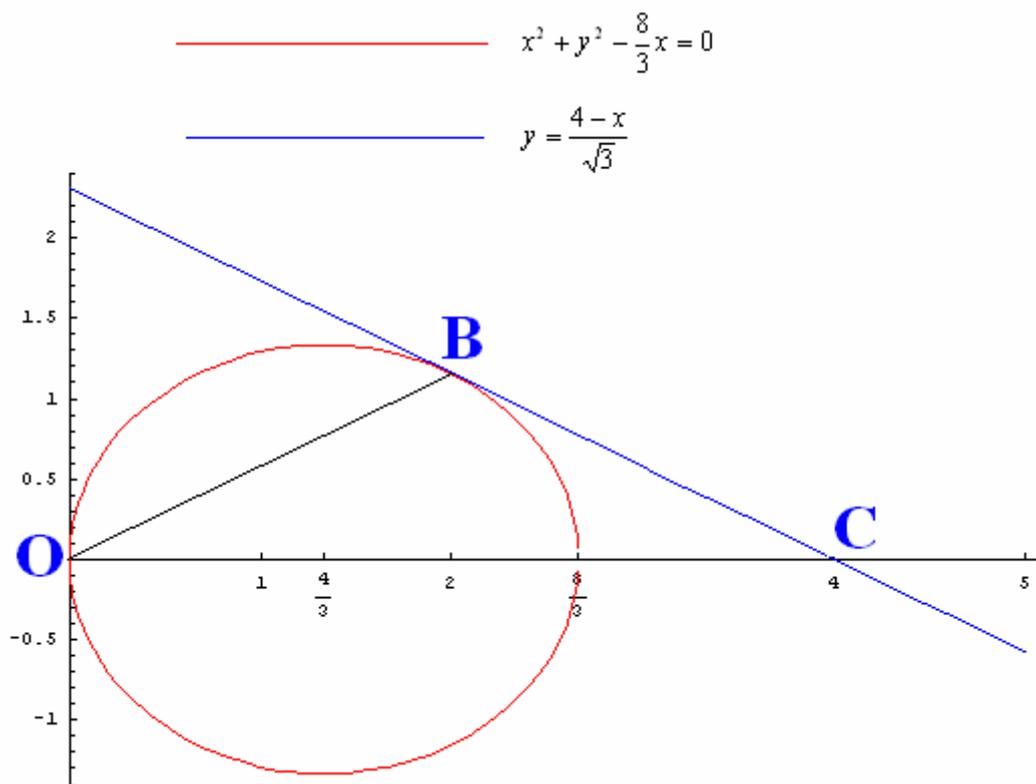
$$y' = \frac{\frac{4}{3} - x}{\sqrt{\frac{8x}{3} - x^2}}, \text{ per cui il coefficiente angolare sar\`a } m = f'(x=2) = \frac{\frac{4}{3} - 2}{\sqrt{\frac{16}{3} - 4}} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Il risultato trovato è identico al precedente, ma privo di tanti calcoli.  
L'equazione della tangente sarà allora:

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-2) + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4-x}{\sqrt{3}}$$

2)

Consideriamo la figura sottostante:



A noi interessa calcolare l'angolo  $\widehat{OBC}$ .

Innanzitutto in tal caso osserviamo che il triangolo OBC è isoscele.

Infatti  $OB = BC = \sqrt{4 + \frac{4}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ , per cui  $\widehat{OBC} = \pi - 2\widehat{BOC}$

Ma la retta OB ha equazione  $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$  per cui  $B\hat{O}C = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$  per cui

$$O\hat{B}C = \pi - 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ. \text{ Per cui l'angolo acuto richiesto sar\`a } (180^\circ - 120^\circ) = 60^\circ$$

3)

La cubica di equazione  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  passa per l'origine  $O=(0,0)$  e questo implica  $d = 0$

Inoltre passa per  $B = \left(2, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$  e questo comporta  $8a + 4b + 2c = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 4a + 2b + c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

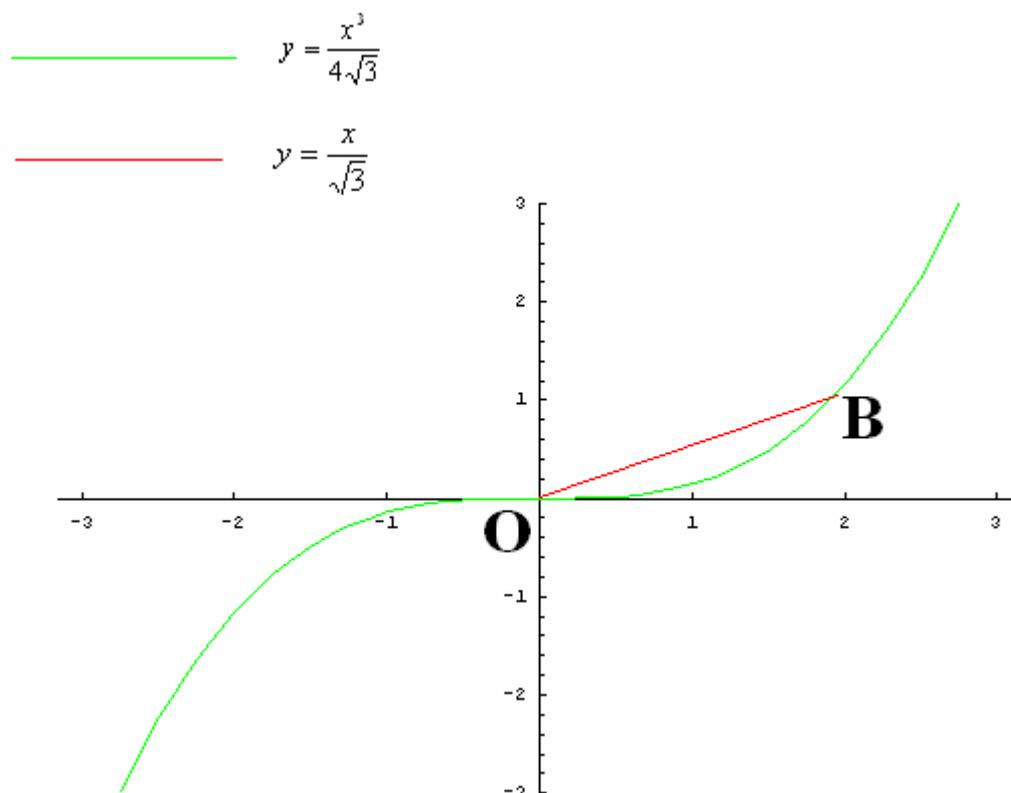
La presenza del flesso a tangente orizzontale in  $(0,0)$  comporta altre due condizioni:

$$\begin{aligned} f'(0) &= (3ax^2 + 2bx + c)_{x=0} = c = 0 \\ f''(0) &= (6ax + 2b)_{x=0} = 2b = 0 \rightarrow b = 0 \end{aligned}$$

Quindi la cubica avr\`a equazione  $y = ax^3 = \frac{x^3}{4\sqrt{3}}$

Questa funzione \`e definita in tutto  $\mathbb{R}$ , incontra l'asse delle ascisse e delle ordinate nel suo flesso  $(0,0)$ , \`e positiva in  $(0, +\infty)$ , \`e crescente in  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ .

Il suo grafico \`e il seguente:



**4)**

L'area richiesta è pertanto:

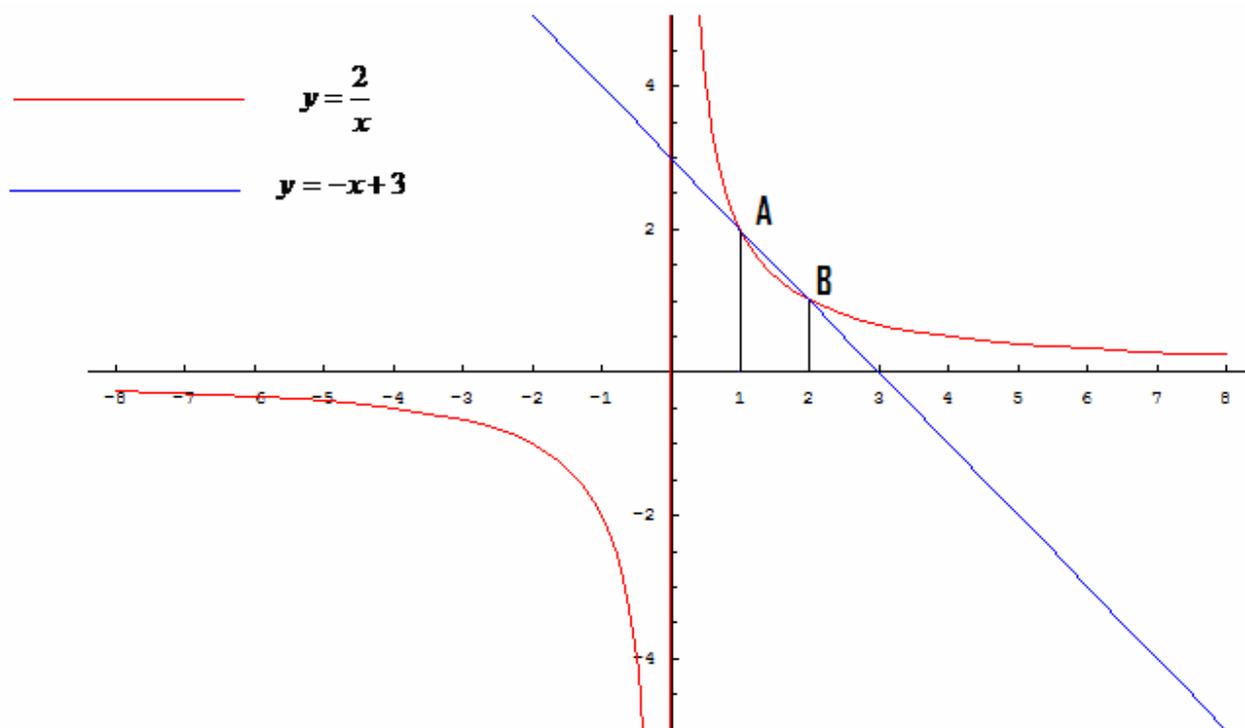
$$AREA = \int_0^2 \left( \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{x^3}{4\sqrt{3}} \right) dx = \left[ \frac{x^2}{2\sqrt{3}} - \frac{x^4}{16\sqrt{3}} \right]_0^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

## QUESTIONARIO MATURITA' SUPPLETIVA 2007

1. Si calcoli il volume del solido generato in una rotazione completa attorno all'asse delle  $x$  della regione finita di piano delimitata dalla curva  $y = 2/x$  e dalla retta di equazione  $y = -x + 3$ .

### Soluzione di De Rosa Nicola

Consideriamo la figura sottostante in cui vengono rappresentate nello stesso sistema di riferimento la curva di equazione  $y = \frac{2}{x}$  e la retta  $y = -x + 3$ :



I punti di intersezione tra la retta e la curva sono dati dalla risoluzione dell'equazione seguente:

$$\frac{2}{x} = -3 + x \rightarrow x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = 0 \rightarrow x = 1, x = 2$$

Cioè i punti di intersezione sono  $A = (1, 2), B = (2, 1)$

Per il teorema di Guldino il volume del solido generato da una rotazione completa attorno all'asse

delle ascisse è  $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$  e nel nostro caso

$$V = \pi \int_1^2 \left[ (-x+3)^2 - \left(\frac{2}{x}\right)^2 \right] dx = \pi \left[ -\frac{(-x+3)^3}{3} + \frac{4}{x} \right]_1^2 = \pi \left[ -\frac{1}{3} + 2 + \frac{8}{3} - 4 \right] = \frac{\pi}{3}$$

2. Si calcoli il valore medio della funzione  $y = \sin^3 x$ , nell'intervallo  $0 \leq x \leq \pi$ .

**Soluzione di De Rosa Nicola**

Il valore medio di una funzione  $y = f(x)$  in un intervallo  $[a, b]$  è per definizione

$$V_M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Nel nostro caso

$$\begin{aligned} V_M &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^3(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x)(1 - \cos^2(x)) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(x) - \sin(x)\cos^2(x)] dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ -\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left[ 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right] = \frac{4}{3\pi} \end{aligned}$$

3. Data la funzione  $y = x^3 + kx^2 - kx + 3$ , nell'intervallo chiuso  $[1, 2]$ , si determini il valore di  $k$  per il quale sia ad essa applicabile il teorema di Rolle e si trovi il punto in cui si verifica la tesi del teorema stesso.

**Soluzione di De Rosa Nicola**

Enunciamo innanzitutto il teorema di Rolle: sia  $f : x \in [a, b] \rightarrow R$ .

Se

- $f(x)$  continua in  $[a, b]$ ;
- $f(x)$  derivabile in  $(a, b)$ ;
- $f(a) = f(b)$

Allora  $\exists c \in (a, b): f'(c) = 0$ .

Geometricamente questo teorema si interpreta col fatto che se una funzione è derivabile, e quindi ammette tangente, e se assume agli estremi valori uguali, allora essa ammetterà massimo o minimo cioè ammetterà una tangente orizzontale.

Nel nostro caso la derivabilità e continuità sono banalmente verificate, trattandosi di una cubica. Deve essere solo imposta l'uguaglianza nei valori estremi cioè

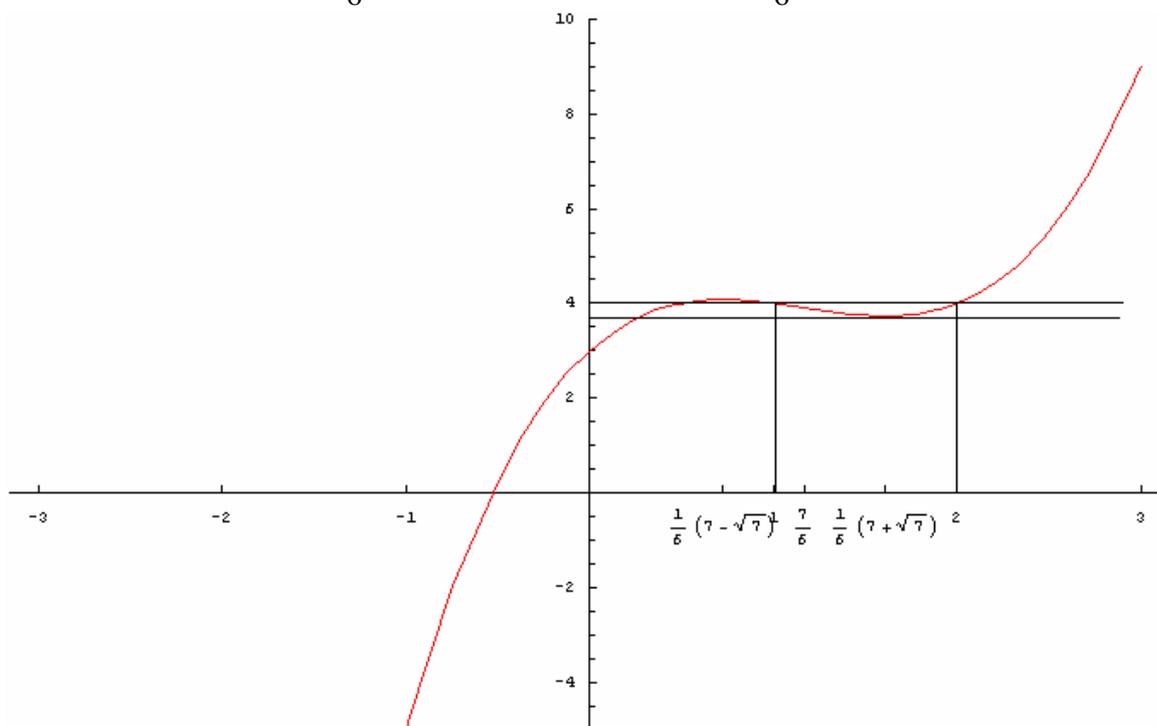
$$f(1) = f(2) \rightarrow 4 = 11 + 2k \rightarrow k = -\frac{7}{2}$$

Per cui la cubica diventa  $y = x^3 - \frac{7x^2}{2} + \frac{7x}{2} + 3$  la cui derivata è  $y' = 3x^2 - 7x + \frac{7}{2} = \frac{6x^2 - 14x + 7}{2}$ .

Ora  $y' = 0 \rightarrow 6x^2 - 14x + 7 = 0 \rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{7}}{6}$  e tra i due quello che rientra nell'intervallo  $[1, 2]$  è

$$x = \frac{7 + \sqrt{7}}{6}.$$

La funzione  $y = x^3 - \frac{7x^2}{2} + \frac{7x}{2} + 3$  è ovunque continua e derivabile, non ha asintoti e crescente negli intervalli  $\left(\frac{7+\sqrt{7}}{6}, +\infty\right) \cup \left(-\infty, \frac{7-\sqrt{7}}{6}\right)$  e presenta un massimo all'ascissa  $x = \frac{7-\sqrt{7}}{6}$ , un minimo all'ascissa  $x = \frac{7+\sqrt{7}}{6}$  ed un flesso all'ascissa  $x = \frac{7}{6}$ .

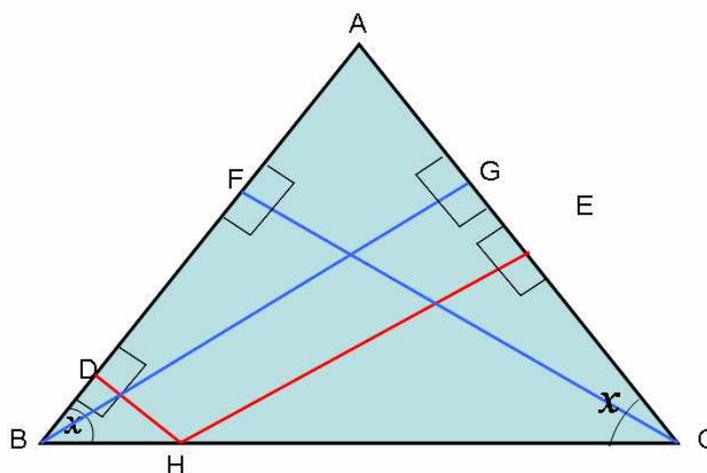


e come si nota anche dal grafico nell'intervallo  $[1,2]$  sono rispettate tutte le ipotesi del teorema di Rolle.

4. Si consideri la seguente proposizione: "In ogni triangolo isoscele la somma delle distanze di un punto della base dai due lati eguali è costante". Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

**Soluzione di De Rosa Nicola**

Si consideri la figura sottostante:



La tesi da argomentare è  $DH + HE = k$  con  $k$  costante.  
 Supponiamo  $AB = AC = l$

Per il teorema sui triangoli rettangoli si ha:

$$DH = BH \sin(x),$$

$$HE = HC \sin(x)$$

Per cui  $DH + HE = BH \sin(x) + HC \sin(x) = (BH + HC) \sin(x) = BC \sin(x)$

Inoltre per il teorema dei seni si ha

$$\frac{BC}{\sin(\pi - 2x)} = \frac{AB}{\sin(x)} = \frac{AC}{\sin(x)} \rightarrow BC \sin(x) = AB \sin(2x) = AC \sin(2x) = l \sin(2x)$$

Ma sempre per il teorema sui triangoli rettangoli si ha:

$$BG = BC \sin(x) = AB \sin(2x) = l \sin(2x) = FC$$

Per cui in conclusione  $DH + HE = BG = FC = l \sin(2x)$  cioè in un triangolo isoscele la somma delle distanze di un punto della base dai due lati uguali è pari all'altezza relativa ai lati uguali, ed in tal senso la suddetta somma può ritenersi costante. Ovviamente al variare dell'angolo alla base tale somma varierà, ma geometricamente sarà sempre pari all'altezza relativa ai lati uguali.

5. Si dimostri che l'equazione  $e^x - x^3 = 0$  ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.

### Soluzione di De Rosa Nicola

Il quesito è mal posto, nel senso che la traccia presenta un errore di fondo. Infatti suppone che la radice reale sia unica: in realtà le radici reali dell'equazione richiesta sono 2. Basta considerare i due intervalli chiusi e limitati  $[1,2]$  e  $[4,5]$  per notare quanto detto.

Infatti agli estremi dell'intervallo  $[1,2]$  la funzione  $y = e^x - x^3$  assume valori opposti, dal momento che  $y(1) = e - 1 > 0$ ,  $y(2) = e^2 - 8 < 0$  per cui per il teorema degli zeri esiste un punto interno all'intervallo stesso in cui la funzione si annulla. Analoghe considerazioni valgono se ci mettiamo nell'intervallo  $[4,5]$

Probabilmente l'estensore del testo voleva dire che l'equazione  $e^x + x^3 = 0$  ha un'unica radice reale, e questo è vero.

Infatti in tal caso  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + x^3) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x^3) = +\infty$ . Inoltre la funzione  $y = e^x + x^3$  è sempre crescente visto che la sua derivata è  $y' = e^x + 3x^2 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ , per cui esisterà un unico punto in cui si annullerà. In ogni caso siamo nell'ambito delle presupposizioni.

Tuttavia vogliamo mostrare in equal modo, un metodo per calcolare una radice reale. Lo applicheremo alla funzione  $y = e^x - x^3$  nell'intervallo  $[1,2]$ , in cui come già evidenziato si annulla.

Si presenterà in metodo di bisezione:

$$I_0 = [1,2] \rightarrow x = \frac{3}{2} \rightarrow y\left(\frac{3}{2}\right) > 0$$

$$I_1 = \left[\frac{3}{2}, 2\right] \rightarrow x = \frac{7}{4} \rightarrow y\left(\frac{7}{4}\right) > 0$$

$$I_2 = \left[\frac{7}{4}, 2\right] \rightarrow x = \frac{15}{8} \rightarrow y\left(\frac{15}{8}\right) < 0$$

$$I_3 = \left[\frac{7}{4}, \frac{15}{8}\right] \rightarrow x = \frac{29}{16} \rightarrow y\left(\frac{29}{16}\right) > 0$$

$$I_4 = \left[\frac{29}{16}, \frac{15}{8}\right] \rightarrow x = \frac{59}{32} \rightarrow y\left(\frac{59}{32}\right) > 0$$

$$I_5 = \left[\frac{59}{32}, \frac{15}{8}\right] \rightarrow x = \frac{119}{64} \rightarrow y\left(\frac{119}{64}\right) < 0 \rightarrow \text{la soluzione è interna all'intervallo } I_6 = \left[\frac{59}{32}, \frac{119}{64}\right]$$

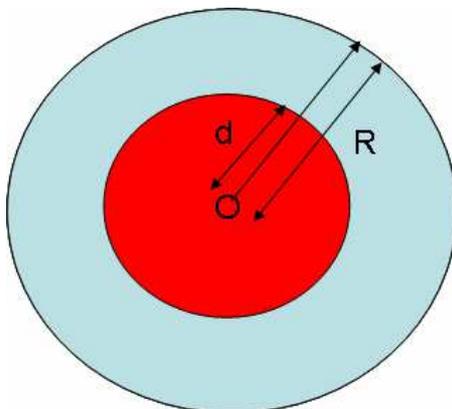
Per cui una soluzione approssimata è il valore medio dell'intervallo  $I_6 = \left[\frac{59}{32}, \frac{119}{64}\right]$  cioè

$$x \cong \frac{237}{128} \approx 1.85.$$

6. Si scelga a caso un punto P all'interno di un cerchio. Si determini la probabilità che esso sia più vicino al centro che alla circonferenza del cerchio.

### Soluzione di De Rosa Nicola

Si consideri la geometria del quesito come di seguito riportata:



Affinché un punto generico P si trovi più vicino al centro rispetto alla circonferenza, si deve verificare che la sua distanza  $d$  dal centro O del cerchio di raggio  $R$  sia  $d < \frac{R}{2}$ . In tal caso la probabilità richiesta è data dal rapporto tra le aree dei due cerchi: il più piccolo di raggio  $d$  e quello più grande di raggio  $R$ , cioè

$$\Pr\{\text{punto P più vicino al centro}\} = \frac{\pi d^2}{\pi R^2} = \frac{d^2}{R^2} \quad \text{con } d < \frac{R}{2}$$

7. Servendosi in maniera opportuna del principio di Cavalieri nel piano, si dimostri che l'area di un'ellisse di semiassi  $a$ ,  $b$  è  $S=\pi ab$ .

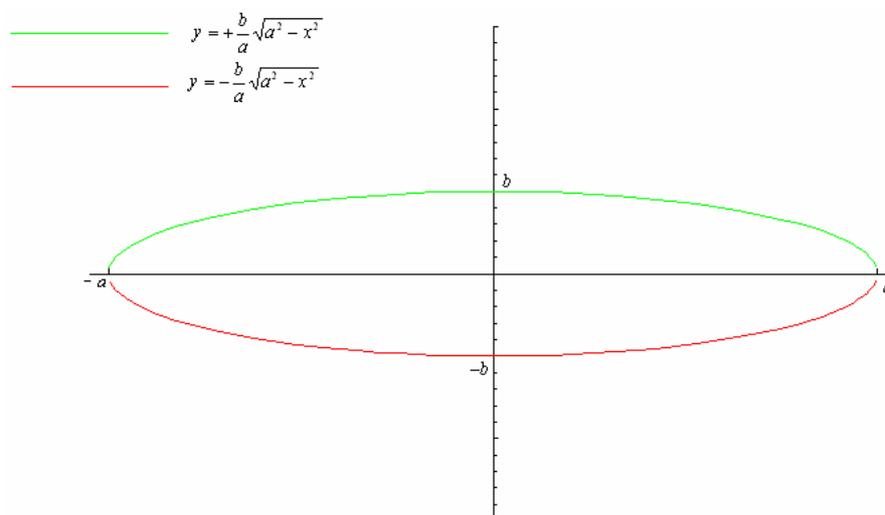
### Soluzione di De Rosa Nicola

L'ellisse è un luogo geometrico di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

che degenera in una circonferenza di centro  $(0,0)$  e raggio  $R=a=b$  se i due semiassi sono uguali.

Il grafico dell'ellisse non è altro che l'unione dei grafici delle due funzioni  $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$  come di seguito rappresentato:



Per il calcolo dell'area la traccia ci richiede l'uso del principio di Cavalieri.

A Cavalieri va innanzitutto il merito di aver introdotto la cosiddetta “*geometria degli indivisibili*” e di conseguenza “*metodo degli indivisibili*” per il calcolo di aree di figure piane e di volumi di solidi. Tale metodo degli indivisibili lo si deriva dal principio che prende il nome dell'autore stesso: il principio di Cavalieri:

*"Se due solidi hanno uguale altezza e se le sezioni tagliate da piani paralleli alle basi e ugualmente distanti da queste stanno sempre in un dato rapporto, anche i volumi dei solidi staranno in questo rapporto."*

In sostanza Cavalieri considera una superficie piana come la totalità delle corde aventi una comune direzione (una tela con ordito di fili paralleli) e un solido come la totalità delle sezioni piane aventi una comune giacitura (un libro formato da molti fogli). Queste corde e queste sezioni (foglietti) sono gli indivisibili con cui si compone una figura piana o solida. L'importanza del teorema appena enunciato sta nel fatto che da esso Cavalieri *dimostrò un teorema* che, utilizzando la notazione del calcolo infinitesimale, è equivalente alla formula moderna:

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

che in realtà lui provò e verificò essere valida solo per  $n$  interi.

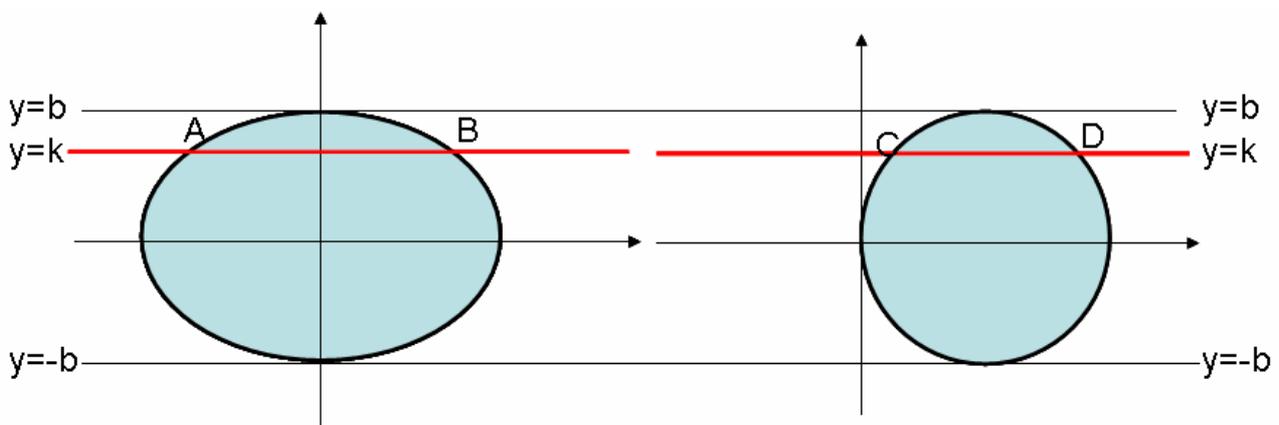
Quindi il teorema di Cavalieri, riportato nel piano può essere riformulato in questo modo:

*“se tagliando con un fascio di rette parallele due figure piane, comprese tra due altrettanti rette parallele, sono individuati su ciascuna di esse segmenti della stessa lunghezza o proporzionali, allora le due figure hanno la stessa area o sono proporzionali con lo stesso fattore.”*

Per poterlo applicare, ci serve allora un ulteriore figura piana di appoggio. Noi utilizzeremo come figura piana, oltre all'ellisse, una circonferenza che deve avere la stessa “altezza” dell'ellisse e raggio pari a  $R = \sqrt{ab}$ . In tal modo se dimostriamo che ogni retta parallela del fascio intercetta su entrambe segmenti di uguale lunghezza, allora potremmo dire che l'area dell'ellisse coincide con quella del cerchio di raggio  $R = \sqrt{ab}$  pari a  $\pi R^2 = \pi ab$ . In realtà si potrebbe proseguire anche in un altro modo: si considera sempre la circonferenza di raggio  $R = b$  e, dimostrando che la corda intercettata sull'ellisse è pari ad  $\frac{a}{b}$  volte quella intercettata sulla circonferenza, allora per il

principio di Cavalieri se ne deduce che  $A_E = \frac{a}{b} A_C = \frac{a}{b} (\pi b^2) = \pi ab$ . E ci sono tanti altri modi di proseguire: l'importante è che ellisse e circonferenza abbiano la stessa “altezza” pari a  $2|b|$ .

Noi scegliamo la seconda strada evidenziata, cioè prendiamo una circonferenza con raggio  $R = b$  e che ha per tangenti le rette  $y = \pm b$  (questa condizione è essenziale per assicurare la stessa “altezza”). Una circonferenza avrà equazione  $(x-b)^2 + y^2 = b^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2bx = 0$ .



Calcoliamo i punti A, B, C e D:

$$A, B \rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = k \end{cases} \rightarrow A = \left( -\frac{a}{b} \sqrt{b^2 - k^2}, k \right), B = \left( \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - k^2}, k \right)$$

$$C, D \rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2bx = 0 \\ y = k \end{cases} \rightarrow C = \left( b - \sqrt{b^2 - k^2}, k \right), D = \left( b + \sqrt{b^2 - k^2}, k \right)$$

Ora la corda AB ha lunghezza  $AB = 2\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - k^2}$  mentre  $CD = 2\sqrt{b^2 - k^2}$  per cui le due corde sono proporzionali secondo il fattore  $\frac{a}{b}$ , per cui la stessa proporzionalità vale pure per le aree

rispettive, cioè  $A_E = \frac{a}{b} A_C = \frac{a}{b}(\pi b^2) = \pi ab$  come volevamo dimostrare.

Questo modo introdotto da Cavalieri, di considerare ogni figura piana come formata da infiniti segmenti dello stesso spessore sottilissimo (che lui chiamava “ $dx$ ”) non è altro che la stessa logica che conduce all’interpretazione dell’integrale come area sottesa: cioè sommare tanti segmenti di spessore identico e sottilissimo equivale ad integrare lungo l’intera altezza della figura piana. Ecco per cui il principio di Cavalieri è stato il viatico per la futura analisi infinitesimale.

Dal momento che è stato evidenziato che il principio di Cavalieri non è altro che la moderna concezione dell’integrale, allora calcoliamo l’area richiesta anche attraverso l’integrale, confrontando che i risultati siano coerenti e giusti con la traccia.

Un modo di procedere vista la simmetria dell’ellisse, è quello di calcolare l’area sottesa dal lobo dell’ellisse nel primo quadrante e moltiplicare per 4, cioè

$$S = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

Ora si effettua la sostituzione

$$x = a \sin(t) \rightarrow dx = a \cos(t) dt$$

$$x = 0 \rightarrow t = 0$$

$$x = a \rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

Per cui

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{4b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2(t)} (a \cos(t)) dt = \\ &= 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{1 + \cos(2t)}{2} \right] dt = 4ab \left[ \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4ab \left( \frac{\pi}{4} \right) = \pi ab \end{aligned}$$

Dove in tal caso abbiamo utilizzato l’uguaglianza  $\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2(t)} = a \cos(t)$  valida dal momento che siamo nel primo quadrante. Il risultato è quello già trovato ed espresso dalla traccia.

8. Si calcoli il limite della funzione  $\frac{x - \sin x}{x(1 - \cos x)}$ , quando  $x$  tende a 0.

**Soluzione di De Rosa Nicola**

Procederemo in due distinti modi, applicando prima De L’Hopital e poi gli sviluppi di Taylor.

➤ Applicazione di De L’Hopital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x - \sin(x)}{x(1 - \cos(x))} \right] = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x - \sin(x)}{x(1 - \cos(x))} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - \cos(x)}{1 - \cos(x) + x \sin(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{1 + \frac{x \sin(x)}{1 - \cos(x)}} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{1 + \frac{x \sin(x)(1 + \cos(x))}{\sin^2(x)}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{1 + \frac{x(1 + \cos(x))}{\sin(x)}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{1 + \frac{x}{\sin(x)}(1 + \cos(x))} \right]$$

Ora ricordando che  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x}{\sin(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin(x)}{x} \right]^{-1} = 1$  si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x - \sin(x)}{x(1 - \cos(x))} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{1 + \frac{x}{\sin(x)}(1 + \cos(x))} \right] = \frac{1}{1 + 2} = \frac{1}{3}$$

➤ Applicazione degli sviluppi di Taylor

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^5)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^4)$$

Per cui

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x - \sin(x)}{x(1 - \cos(x))} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x - x + \frac{x^3}{6}}{x(1 - 1 + \frac{x^2}{2})} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\frac{x^3}{6}}{\frac{x^3}{2}} \right] = \frac{1}{3}$$

9. Si verifichi che la curva di equazione  $y = x^3 + 3x^2 - 1$  è simmetrica rispetto al suo punto di flesso.

**Soluzione di De Rosa Nicola**

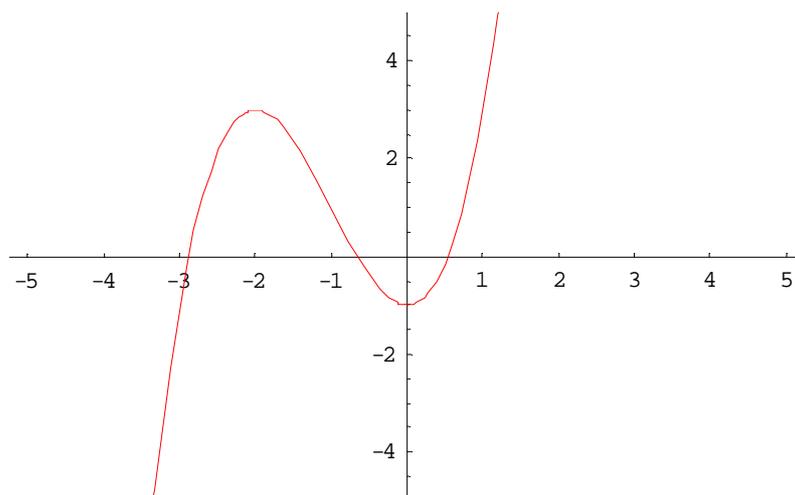
Iniziamo col calcolare il punto di flesso:

$$y'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$y''(x) = 6x + 6 = 0 \rightarrow x = -1$$

Per cui il flesso è  $(-1, 1)$ .

Tale funzione è ovunque continua e derivabile, non ha asintoti, è crescente negli intervalli  $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$  e presenta un minimo in  $(-2, -1)$  ed un massimo in  $(-1, 0)$ . Il grafico è sotto presentato:



Cerchiamo di ricavare la condizione da imporre per verificare la simmetria della cubica rispetto al punto di flesso.

Iniziamo col prendere due punti appartenenti alla curva:  $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ . Dire che la curva è simmetrica rispetto ad un punto  $S = (\alpha, \beta)$  significa che  $S$  è il punto medio del segmento  $AB$ , cioè

$$\begin{cases} \alpha = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \beta = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \end{cases}$$

Dalla prima ricaviamo  $x_2 = 2\alpha - x_1$  che sostituita nella seconda fornisce  $f(x_1) + f(2\alpha - x_1) = 2\beta$  e questo deve valere per ogni coppia  $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ .

Quindi la relazione da verificare è

$$f(x) + f(2\alpha - x) = 2\beta$$

Che nel nostro caso diventa

$$f(x) + f(-2 - x) = 2$$

Verifichiamo allora che effettivamente sussiste l'uguaglianza di cui sopra:

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 - 1 + (-2 - x)^3 + 3(-2 - x)^2 - 1 &= \\ x^3 + 3x^2 - 1 - x^3 - 8 - 12x - 6x^2 + 12 + 12x + 3x^2 - 1 &= 2 \end{aligned}$$

come effettivamente volevamo dimostrare.

10. Si risolva la disequazione  $5\binom{x}{3} \leq \binom{x+2}{3}$ .

### Soluzione

La disequazione ha senso innanzitutto se  $(x)$  è un intero e poi se  $\begin{cases} x \geq 3 \\ x+2 \geq 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq 1 \end{cases} \rightarrow x \geq 3$  condizioni queste imposte dalla definizione di coefficiente binomiale.

Risolviamo la disequazione:

$$\begin{aligned} 5\binom{x}{3} \leq \binom{x+2}{3} &\Leftrightarrow 5 \frac{(x)!}{(x-3)!(3!)} \leq \frac{(x+2)!}{(3)!(x-1)!} \Leftrightarrow \\ 5x(x-1)(x-2) &\leq x(x+1)(x+2) \Leftrightarrow \\ x[5(x-1)(x-2) - (x+1)(x+2)] &= 2x(2x^2 - 9x + 4) \leq 0 \end{aligned}$$

Va risolto allora il sistema

$$\begin{cases} 2x(2x^2 - 9x + 4) \leq 0 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

La disequazione  $2x(2x^2 - 9x + 4) \leq 0$  la risolviamo, ponendo ambo i fattori  $(x, 2x^2 - 9x + 4)$  entrambi maggiori od uguali a zero e poi verificheremo dove è soddisfatto il segno della disequazione stessa.

Ora  $(2x^2 - 9x + 4) \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{1}{2} \cup x \geq 4$  che con la condizione  $x \geq 0$  impone che la disequazione

$2x(2x^2 - 9x + 4) \leq 0$  è soddisfatta per  $x \leq 0, \frac{1}{2} \leq x \leq 4$ .

Il sistema finale diventa allora

$$\begin{cases} x \leq 0, \frac{1}{2} \leq x \leq 4 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 4$$

In ultima analisi ricordando che  $(x)$  deve essere un intero ricaviamo che gli unici interi che soddisfano la disequazione sono  $x = 3, x = 4$ .