MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE

SCUOLE ITALIANE ALL'ESTERO

ESAMI DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2007

Calendario australe

SECONDA PROVA SCRITTA

Tema di Matematica

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sia f la funzione definita da: $f(x) = a\log_{10}(x) + 1$, ove a è un parametro reale.

1. Dopo aver precisato il campo di esistenza di f si stabilisca per quali valori di a la funzione f è crescente.

2. Si disegnino i grafici F e G di f corrispondenti, rispettivamente, ai valori $a = 2$ e $a = -2$ e siano b e c le ascisse delle loro rispettive intersezioni con l'asse x.

3. Si calcoli l'area del triangolo mistilineo di base l'intervallo [b, c] e vertice il punto d'intersezione tra F e G e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato.

4. Sia $g(x) = x^2$. Si determini il valore di a per cui f e g hanno la stessa tangente nel punto di ascissa 1.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione f così definita:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4 - x^2}{3} & \text{se } x \le 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$$

1. Si disegni il grafico di f;

2. si dica se f soddisfa le condizioni del teorema del valor medio [o *teorema di Lagrange* – da Giuseppe Lagrange (Torino, 25 gennaio 1736 – Parigi, 10 aprile 1813)] sull'intervallo [0,2] e quali sono, se esistono, gli eventuali valori medi in tale intervallo.

3. il dominio piano del II quadrante delimitato dal grafico di f e dagli assi coordinati è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse y, sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di S.

QUESTIONARIO

1. Si traccino i grafici delle seguenti funzioni di R in R:

$$f : x \to 3^{x+1}; g : x \to 3^{x} + 1; h : x \to 3^{|x|}; k : x \to 3^{-x}$$

2. Quante cifre ha il numero 5^{59} nella rappresentazione decimale? Motiva esaurientemente la risposta.

3. Si consideri una sfera di volume V e superficie S. Si dimostri che il tasso di variazione di V rispetto al raggio è uguale a S.

4. Si illustrino il significato e l'ambito di utilizzo del simbolo $\binom{m}{n}$ e si risolva l'equazione:

$$2\binom{x}{2} = 3\binom{x-1}{2} \quad \text{con } x \in N$$

5. La capacità di un serbatoio è la stessa di quella del cilindro circolare retto di volume massimo inscrivibile in una sfera di 2 metri di diametro. Quale è la capacità in litri del serbatoio?

6. Dato un tetraedro regolare, si costruisca il tetraedro regolare avente per vertici i centri delle facce del primo. Si dimostri che ogni faccia di un tetraedro è parallela ad una faccia dell'altro.

7. Si dia una definizione di "asintoto" – *orizzontale, obliquo, verticale* – di una curva e si fornisca un esempio di funzione f(x) il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.

8. La risoluzione di un problema assegnato conduce all'equazione $2\sin(x) + k\cos(x) = 1$ ove $k > 0$ e $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$. Si discutano le possibili soluzioni del problema.

PROBLEMA 1

Sia *f* la funzione definita da: $f(x)=a\log_{10}(x)+1$**, ove *a* è un parametro reale.**

Punto 1

Dopo aver precisato il campo di esistenza di *f* si stabilisca per quali valori di *a* la funzione *f* è crescente.

Il dominio della funzione $f(x)=a\log_{10}(x)+1$ è $(0,+\infty)$ e trattandosi di una funzione logaritmica soggetta a un cambiamento di scala di fattore a e traslata verticalmente di una quantità unitaria, essa sarà strettamente crescente se $a\in(0,+\infty)$ e strettamente decrescente se $a\in(-\infty,0)$. In particolare sarà costante e coincidente con la retta $y=1$ se $a=0$.

Punto 2

Si disegnino i grafici F e G di *f* corrispondenti, rispettivamente, ai valori *a* = 2 e *a* = − 2 e siano *b* e *c* le ascisse delle loro rispettive intersezioni con l'asse x.

I grafici F e G di $F(x)=2\log_{10}(x)+1$ e $G(x)=-2\log_{10}(x)+1$ possono essere ricavati a partire dal grafico della funzione elementare $h(x)=\log_{10}(x)$.

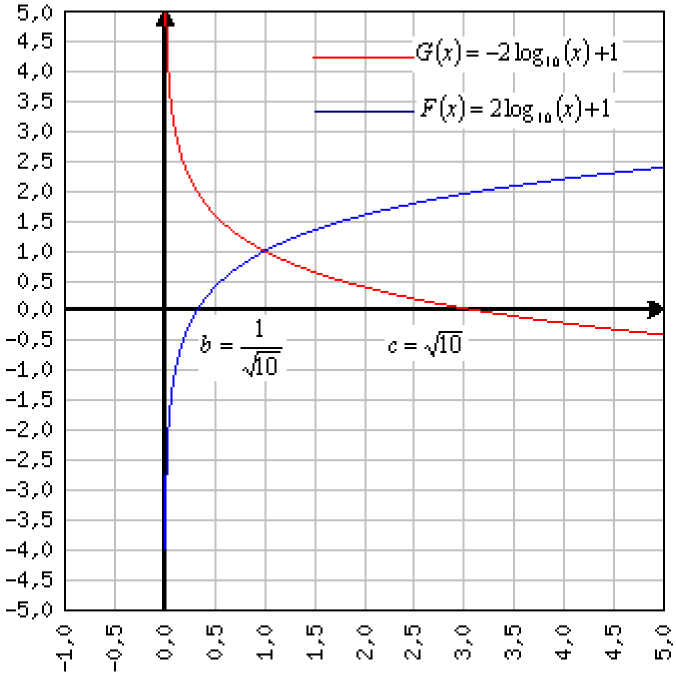
I passi da seguire per tracciare il grafico di $F(x)=2\log_{10}(x)+1$ sono i seguenti:

1. Si traccia il grafico di $h(x)=\log_{10}(x)$;
2. Si moltiplicano per 2 le ordinate di $h(x)=\log_{10}(x)$ lasciando immutate le ascisse ottenendo il grafico di $2\log_{10}(x)$;
3. Si trasla rigidamente e verticalmente verso l'alto di una unità il grafico di $2\log_{10}(x)$ ottenendo il grafico di $F(x)=2\log_{10}(x)+1$.

I passi da seguire per tracciare il grafico di $G(x)=-2\log_{10}(x)+1$ sono i seguenti:

1. Si traccia il grafico di $h(x)=\log_{10}(x)$;
2. Si ribalta il grafico di $h(x)=\log_{10}(x)$ rispetto all'asse delle ordinate ottenendo il grafico di $-h(x)=-\log_{10}(x)$
3. si moltiplicano per 2 le ordinate di $-h(x)=-\log_{10}(x)$ lasciando immutate le ascisse ottenendo il grafico di $[-2\log_{10}(x)]$;
4. Si trasla rigidamente e verticalmente verso l'alto di una unità il grafico di $[-2\log_{10}(x)]$ ottenendo il grafico di $G(x)=-2\log_{10}(x)+1$.

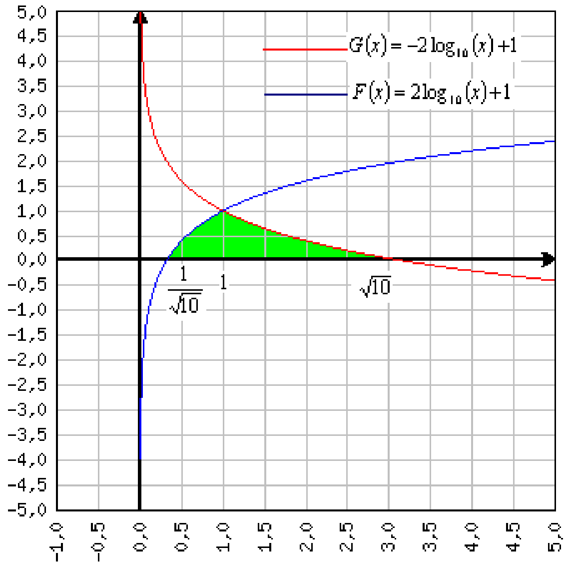
In particolare la funzione $F(x) = 2\log_{10}(x) + 1$ interseca l'asse delle ascisse in $b = \frac{1}{\sqrt{10}}$ mentre la funzione $G(x) = -2\log_{10}(x) + 1$ interseca l'asse delle ascisse in $c = \sqrt{10}$. I grafici sono di seguito presentati in un unico sistema di riferimanto cartesiano:



Punto 3

Si calcoli l'area del triangolo mistilineo di base l'intervallo [*b*, *c*] e vertice il punto d'intersezione tra F e G e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato.

Le due curve F e G si intersecano nel punto $(1,1)$ e l'area da calcolare è rappresentata in verde nella figura di seguito presentata:



Tale area vale:

$$S = \int_{\frac{1}{\sqrt{10}}}^{1} [2\log_{10}(x)+1]dx + \int_{1}^{\sqrt{10}} [-2\log_{10}(x)+1]dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{10}}}^{\sqrt{10}} dx + 2\int_{\frac{1}{\sqrt{10}}}^{1} [\log_{10}(x)]dx - 2\int_{1}^{\sqrt{10}} [\log_{10}(x)]dx =$$

$$= \left(\sqrt{10} - \frac{1}{\sqrt{10}}\right) + \frac{2}{\ln 10}[x(\ln x - 1)]_{\frac{1}{\sqrt{10}}}^{1} - \frac{2}{\ln 10}[x(\ln x - 1)]_{1}^{\sqrt{10}} =$$

$$= \left(\sqrt{10} - \frac{1}{\sqrt{10}}\right) + \frac{2}{\ln 10}\left\{[-1] - \left[\frac{1}{\sqrt{10}}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{10}} - 1\right)\right]\right\} - \frac{2}{\ln 10}\left\{\left[\sqrt{10}\left(\ln\sqrt{10} - 1\right)\right] - [-1]\right\} =$$

$$= \left(\sqrt{10} - \frac{1}{\sqrt{10}}\right) + \frac{2}{\ln 10}\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{2\sqrt{10}}\ln 10\right) - \frac{2}{\ln 10}\left(1 - \sqrt{10} + \frac{\sqrt{10}}{2}\ln 10\right) =$$

$$= \left(\sqrt{10} - \frac{1}{\sqrt{10}}\right) + \frac{2}{\ln 10}\left(\frac{1}{\sqrt{10}} + \sqrt{10} - 2 - \frac{9\sqrt{10}}{20}\ln 10\right) = \left(\frac{9\sqrt{10}}{10}\right) + \left[\frac{2}{\ln 10}\left(\frac{11 - 2\sqrt{10}}{\sqrt{10}}\right) - \frac{9\sqrt{10}}{10}\right] =$$

$$= \left(\frac{11\sqrt{10} - 20}{5\ln 10}\right)$$

Numericamente, calcolatrice alla mano, tale area vale 1.28421.

Punto 4

Sia $g(x) = x^2$. Si determini il valore di *a* per cui *f* e *g* hanno la stessa tangente nel punto di ascissa 1.

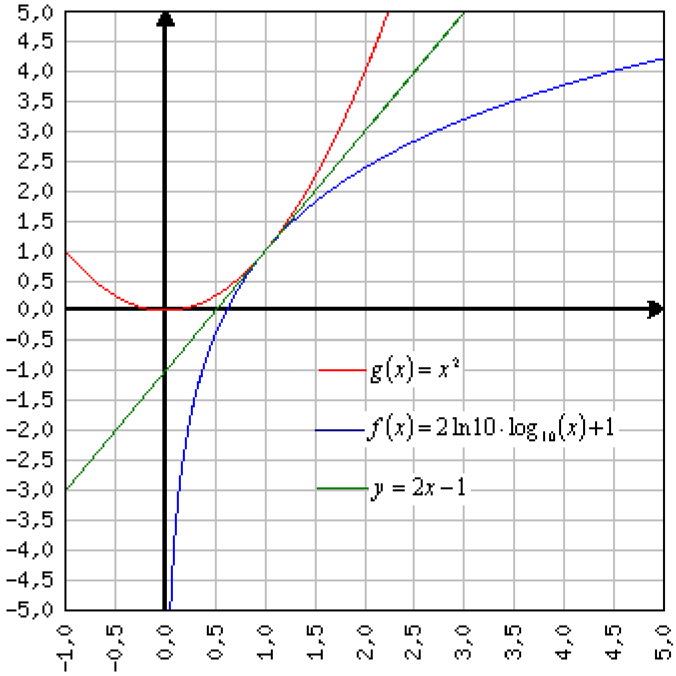
Il punto di ascissa 1 è $P = (1,1)$ per cui $f(x) = a\log_{10}(x) + 1$ e $g(x) = x^2$ avranno stessa tangente in $P = (1,1)$ se il coefficiente angolare della tangente alla curva rappresentata da $f(x) = a\log_{10}(x) + 1$ è uguale a quello della tangente alla parabola $g(x) = x^2$.

Il coefficiente angolare è il valore della derivata prima nel punto di ascissa, per cui

$$\begin{cases} m_f = \left[\dfrac{a}{x \cdot \ln 10}\right]_{x=1} = \dfrac{a}{\ln 10} \Rightarrow m_f = m_g \Leftrightarrow a = 2\ln 10 \\ m_g = [2x]_{x=1} = 2 \end{cases}$$

In tal caso la retta tangente ha equazione $y = 2(x-1) + 1 = 2x - 1$.

Di seguito vengono rappresentate nello stesso grafico le funzioni $f(x) = 2\ln 10 \cdot \log_{10}(x) + 1$, $g(x) = x^2$ e la retta tangente $y = 2x - 1$.



$g(x) = x^2$
$f(x) = 2\ln 10 \cdot \log_{10}(x) + 1$
$y = 2x - 1$

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione *f* così definita:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4-x^2}{3} & \text{se } x\le 1\\ \dfrac{1}{x} & \text{se } x\ge 1\end{cases}$$

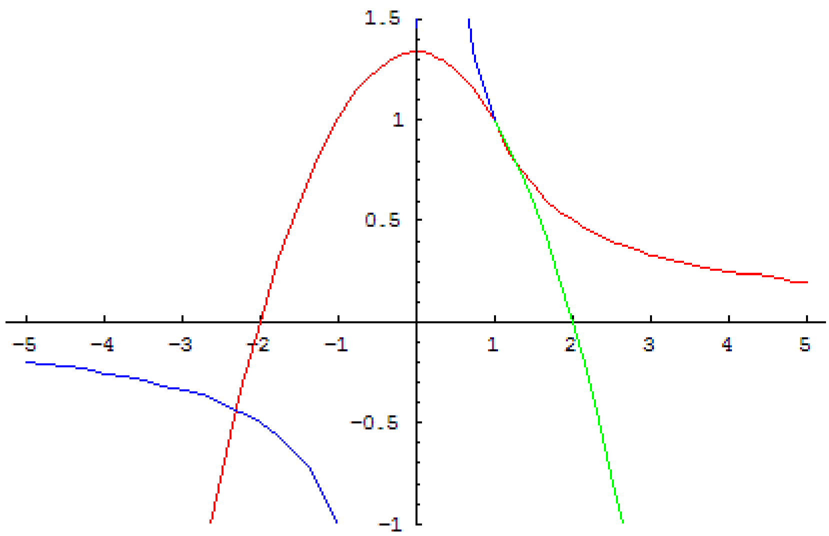
Punto 1

Si disegni il grafico di *f* ;

Il grafico della funzione

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4-x^2}{3} & \text{se } x\le 1\\ \dfrac{1}{x} & \text{se } x\ge 1\end{cases}$$

è l'unione di due grafici; il primo nell'intervallo $]-\infty,1]$ è il grafico di una parabola con concavità verso il basso, vertice in $V=\left(0,\frac{4}{3}\right)$ e che interseca l'asse delle ascisse in $(-2,0)$, mentre il secondo nell'intervallo $[1,+\infty[$ è il ramo di iperbole equilatera di equazione $xy=1$. Il grafico della funzione richiesta è rappresentato in rosso nella figura seguente:



Nella figura soprastante sono stati rappresentati entrambi i grafici delle due funzioni componenti la funzione $f(x)$; in particolare la parte in blu rappresenta la parte di grafico di iperbole equilatera da non considerare in quanto non facente parte dell'intervallo $[1,+\infty[$, mentre la parte di grafico in verde rappresenta la parte di grafico della parabola da non considerare in quanto non facente parte dell'intervallo $]-\infty,1]$. Il grafico in rosso è quello che rappresenta la funzione richiesta.

Punto 2

Si dica se *f* soddisfa le condizioni del teorema del valor medio [o *teorema di Lagrange* – da Giuseppe Lagrange (Torino, 25 gennaio 1736 – Parigi, 10 aprile 1813)] sull'intervallo [0,2] e quali sono, se esistono, gli eventuali valori medi in tale intervallo.

Il teorema di Lagrange (o del valor medio) afferma che se una funzione reale di variabile reale è continua in un intervallo [a; b] e derivabile in (a; b), esiste almeno un punto interno all'intervallo in cui la tangente al grafico della funzione è parallela alla retta che congiunge i punti del grafico corrispondenti agli estremi dell'intervallo [a;b]. Questa è l'interpretazione geometrica del teorema di Lagrange.

In modo più formale:

- Sia $f:[a,b]\to R$
- continua in [a, b]
- derivabile in (a, b)

allora in queste ipotesi $\exists c\in(a,b):\ f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Dopo aver enunciato il teorema di Lagrange ed averlo interpretato geometricamente, mostriamo come esso sia applicabile alla funzione

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4-x^2}{3} & x\le 1\\ \dfrac{1}{x} & x\ge 1\end{cases}$$

La funzione è continua in $x=1$; infatti

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x}=1$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{4-x^2}{3}\right)=1$$

Inoltre la derivata della funzione è

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{2x}{3} & x\le 1\\ -\dfrac{1}{x^2} & x\ge 1\end{cases}$$

per cui

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -1$$
$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(-\frac{2x}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$

da cui si ricava la non derivabilità in $x = 1$. Quindi la funzione $f(x)$ è continua [0,2] e non derivabile in $x = 1 \in (0,2)$; ergo ad essa non è applicabile il teorema di Lagrange.

Punto 3

Il dominio piano del II quadrante delimitato dal grafico di f e dagli assi coordinati è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse y, sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di S.

La funzione $g(x) = \frac{4 - x^2}{3}$ può essere espressa in forma implicita nel modo seguente: $x = \pm\sqrt{4 - 3y}$ e la determinazione negativa è quella che a noi interessa in quanto facente parte del secondo quadrante.

La sezione piana del solido è il quadrato di lato $l(y) = -\sqrt{4 - 3y}$ con $0 \le y \le \frac{4}{3}$ e la cui area è $A(y) = \left(-\sqrt{4 - 3y}\right)^2 = (4 - 3y)$ con $0 \le y \le \frac{4}{3}$, per cui il volume del solido richiesto è:

$$V = \int_0^{\frac{4}{3}} (4 - 3y)dx = \left[4y - \frac{3y^2}{2}\right]_0^{\frac{4}{3}} = \frac{16}{3} - \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

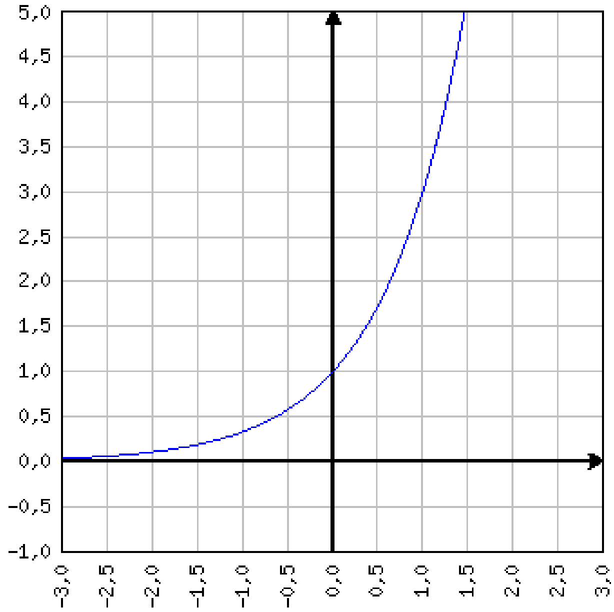
QUESTIONARIO

Quesito 1

Si traccino i grafici delle seguenti funzioni di R in R:

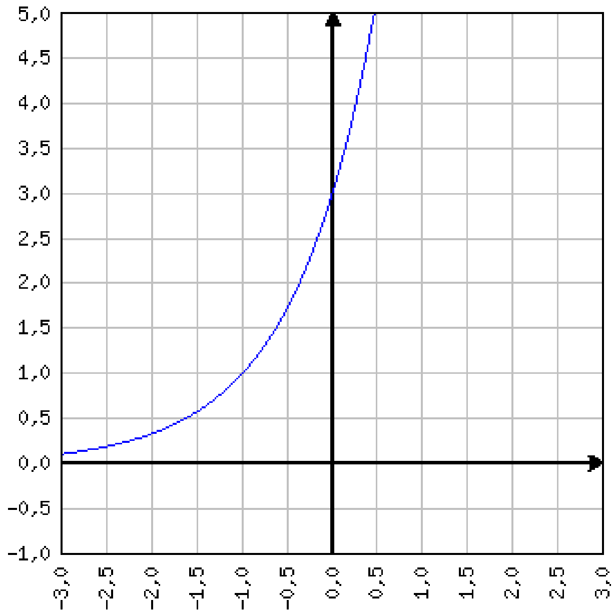
$$f : x \to 3^{x+1}; g : x \to 3^x + 1; h : x \to 3^{|x|}; k : x \to 3^{-x}$$

I grafici da disegnare si possono tutti ricondurre al grafico della funzione $y = 3^x$ sotto presentato:

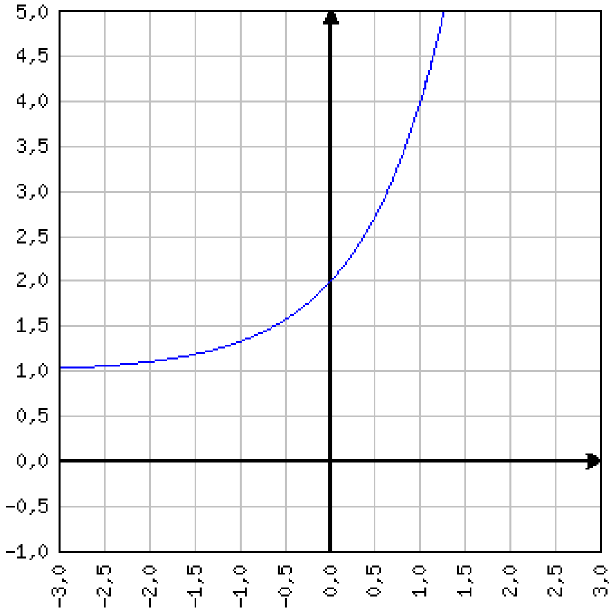


Studiamo i 4 grafici.

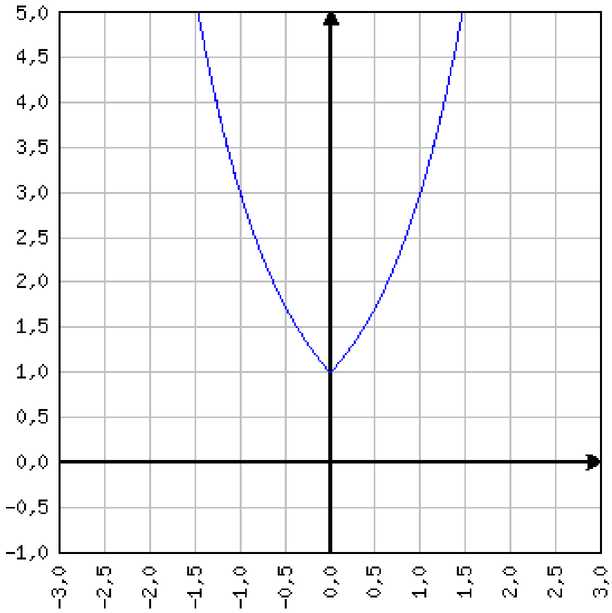
1. $f(x) = 3^{x+1} = 3 \cdot 3^x = 3y$ per cui il grafico lo si ricava dal grafico di $y = 3^x$ moltiplicando ogni ordinata per 3 :



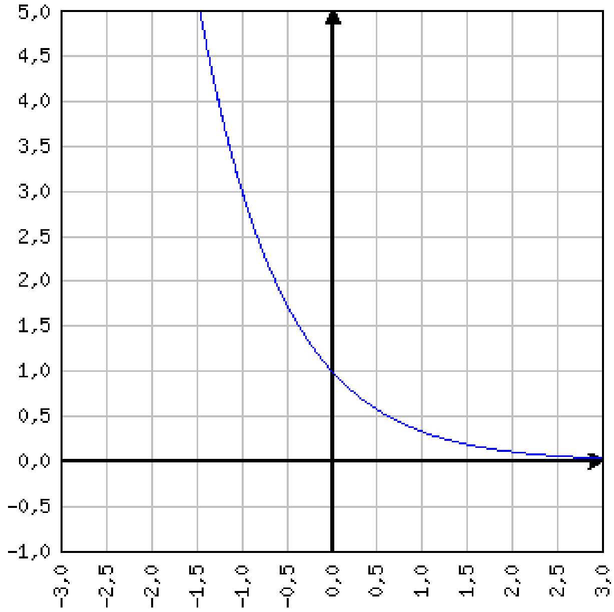
2. $g(x) = 3^x + 1 = y + 1$ per cui il grafico lo si ricava dal grafico di $y = 3^x$ traslandolo rigidamente verso l'alto di una unità, cioè aggiungendo una unità ad ogni ordinata del grafico di $y = 3^x$:



3. $h(x) = 3^{|x|} = \begin{cases} 3^x & x \geq 0 \\ 3^{-x} & x < 0 \end{cases}$. Ora la funzione $k(x) = 3^{-x}$ non è altro che la funzione pari della funzione $y = 3^x$, per cui il grafico di $k(x) = 3^{-x}$ lo si ricava da quello di $y = 3^x$ rendendolo simmetrico rispetto all'asse delle ordinate come sotto presentato:



4. $k(x) = 3^{-x}$: come detto nel punto 3 tale grafico lo si ricava da quello di $y = 3^{x}$ rendendolo simmetrico rispetto all'asse delle ordinate:



Quesito 2

Quante cifre ha il numero 5^{59} nella rappresentazione decimale? Motiva esaurientemente la risposta.

In generale il numero di cifre K di un numero N nella rapprersentazione in base M è pari a $K = \{1 + \text{int}[\log_M (N)]\}$ dove la funzione $\text{int}(\cdot)$ è la funzione parte intera di un numero. Nel caso di $N = 5^{59}, M = 10$ si ha $K = \{1 + \text{int}[\log_{10}(5^{59})]\} = \{1 + \text{int}[59 \cdot \log_{10}(5)]\} = \{1 + \text{int}[41.2]\} = 1 + 41 = 42$.

Quesito 3

Si consideri una sfera di volume V e superficie S. Si dimostri che il tasso di variazione di V rispetto al raggio è uguale a S.

Il volume di una sfera di raggio R è $V = \dfrac{4\pi R^3}{3}$ e la superficie è $S = 4\pi R^2$. Ora il tasso di variazione del volume V rispetto al raggio, matematicamente non è altro che la derivata prima del volume rispetto al raggio, per cui $\dfrac{dV}{dR} = \dfrac{d}{dR}\left(\dfrac{4\pi R^3}{3}\right) = 4\pi R^2 = S$ c.v.d

Quesito 4

Si illustrino il significato e l'ambito di utilizzo del simbolo $\binom{m}{n}$ e si risolva l'equazione:

$$2\binom{x}{2}=3\binom{x-1}{2} \quad \textbf{con} \quad x\in N$$

Il coefficiente binomiale $\binom{m}{n}$ con $m \geq n$ è definito come $\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!\cdot(m-n)!}$ ed è utilizzato per il calcolo dello sviluppo di un binomio, mediante la formula di Newton, ma soprattutto nel calcolo combinatorio. A tale scopo, può convenire osservare che il coefficiente binomiale è anche il rapporto tra il numero delle funzioni iniettive da un insieme di cardinalità *n* in uno di cardinalità *m* (ovvero il numero delle disposizioni semplici di *m* oggetti di classe *n*) ed il numero delle permutazioni di *n* oggetti.

Per l'equazione $2\binom{x}{2}=3\binom{x-1}{2}$ bisogna innanzitutto imporre $\begin{cases} x \geq 2 \\ x-1 \geq 2 \Rightarrow x\in N \mid x \geq 3 \\ x\in N \end{cases}$; inoltre ricordando che $\binom{x}{2}=\frac{(x-1)\cdot x}{2}$, $\binom{x-1}{2}=\frac{(x-2)\cdot(x-1)}{2}$ si ha:

$$2\binom{x}{2}=3\binom{x-1}{2} \Leftrightarrow 2\left[\frac{(x-1)\cdot x}{2}\right]=3\left[\frac{(x-2)\cdot(x-1)}{2}\right] \xrightarrow[\text{per }(x\text{-1})>0]{\text{Dividendo}} x=\frac{3}{2}(x-2) \Rightarrow x=6$$

che è accettabile in quanto soddisfa la condizione $x\in N \mid x \geq 3$. Effettuiamo la prova:

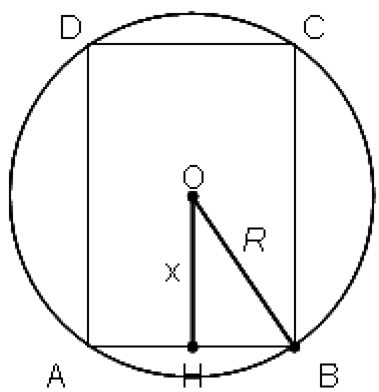
$$2\cdot\binom{6}{2}=2\cdot\left[\frac{(6-1)\cdot 6}{2}\right]=30,$$

$$3\cdot\binom{5}{2}=3\left[\frac{(6-2)\cdot(6-1)}{2}\right]=30 \text{ c.v.d}$$

Quesito 5

La capacità di un serbatoio è la stessa di quella del cilindro circolare retto di volume massimo inscrivibile in una sfera di 2 metri di diametro. Quale è la capacità in litri del serbatoio?

Si consideri la figura seguente che mostra la geometria del problema:



Poniamo $\overline{OH} = x$, con $0 < x < 1$.

Il volume del cilindro è $V(x) = \left(\pi \cdot \overline{HB}^2\right) \cdot \left(2\overline{OH}\right)$ con $\overline{HB}^2 = \left(1 - x^2\right)$ per cui $V(x) = \left(\pi \cdot \overline{HB}^2\right) \cdot \left(2\overline{OH}\right) = \pi \cdot \left[2x\left(1 - x^2\right)\right]$ con $0 < x < 1$. Massimizziamo il volume attraverso il calcolo delle derivate prima e seconda:

$$V'(x) = \pi \cdot \left[2\left(1 - 3x^2\right)\right]$$

$$V''(x) = -12\pi \cdot x$$

Ora

$$V'(x) = \pi \cdot \left[2\left(1 - 3x^2\right)\right] > 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow V \text{ strettamente crescente in } \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$V'(x) = \pi \cdot \left[2\left(1 - 3x^2\right)\right] < 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} < x < 1 \Rightarrow V \text{ strettamente decrescente in } \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$$

$$V'(x) = \pi \cdot \left[2\left(1 - 3x^2\right)\right] = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ è l'ascissa di massimo relativo}$$

$$V''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left[-12\pi \cdot x\right]_{x=\frac{\sqrt{3}}{3}} = -4\pi\sqrt{3} < 0$$

Dalle considerazioni di cui sopra deduciamo che il volume è massimo per $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e vale $V(x_{\max}) = V\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \pi \cdot \left[2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right)\right] = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}\left[\mathrm{m}^3\right] = \frac{4000\pi\sqrt{3}}{9}\left[\mathrm{dm}^3\right]$. Poiché $1\,\mathrm{dm}^3 = 1$ litro si ha $V(x_{\max}) = \frac{4000\pi\sqrt{3}}{9}[\text{litri}] = 2418.2\,[\text{litri}]$

Quesito 6

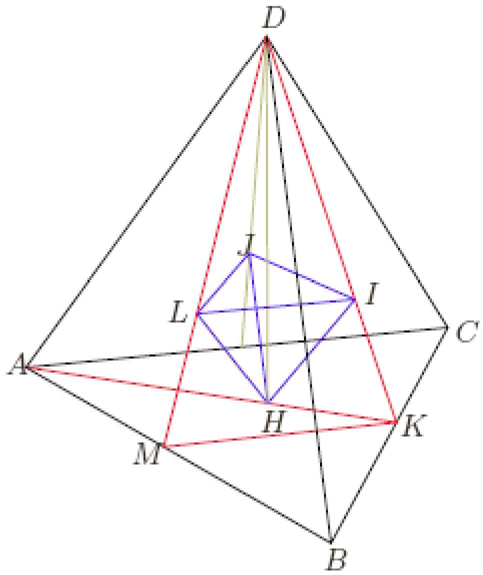
Dato un tetraedro regolare, si costruisca il tetraedro regolare avente per vertici i centri delle facce del primo. Si dimostri che ogni faccia di un tetraedro è parallela ad una faccia dell'altro.

Esistono solo 5 poliedri regolari e sono: tetraedro, ottaedro, icosaedro, cubo, e dodecaedro. Ogni poliedro regolare è caratterizzato dalla coppia di numeri p e q indicanti:

- p il numero lati/spigoli di ogni faccia;
- q il numero di spigoli/facce che incidono in ogni vertice.

I 5 solidi platonici sopra indicati godono anche della proprietà di dualità; in generale il poliedro duale di un poliedro P è un altro poliedro Q, ottenuto scambiando i ruoli dei vertici e delle facce di P. Il duale di Q è di nuovo P. Praticamente se il poliedro P è caratterizzato dalla coppia $\{p, q\}$, il suo duale è Q caratterizzato dalla coppia $\{q, p\}$. In particolare il duale del cubo è l'ottaedro e viceversa, il duale dell'icosaedro è il dodecaedro e viceversa, mentre il duale del tetraedro è il tetraedro stesso; infatti il tetraedro è detto autoduale.

Sotto viene presentato un tetraedro T di spigolo *s* ed il suo duale T':



Il tetraedro T' ha vertici in *H*, *I*, *J*, *L*, e ciascuno di questi punti è il baricentro della faccia cui appartiene, da cui si deduce che $LI \parallel MK \parallel AC, JI \parallel AB, LJ \parallel BC$ per cui la faccia LIJ è parallela alla faccia ABC, Analogamente si può dimostrare per le altre tre facce. In particolare dalla similitudine dei triangoli DLI e DMK si ricava che $\frac{\overline{LI}}{\overline{MK}} = \frac{\overline{DI}}{\overline{DK}}$. Ma $\frac{\overline{DI}}{\overline{DK}} = \frac{2}{3}$ e $\overline{MK} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{s}{2}$ per cui $\overline{LI} = \overline{MK} \cdot \frac{\overline{DI}}{\overline{DK}} = \frac{s}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{s}{3}$. Quindi lo spigolo del tetraedro duale è $\frac{1}{3}$ di quello di partenza, per cui il rapporto dei volumi è $\frac{V(T)}{V(T')} = 27$.

Quesito 7

Si dia una definizione di "asintoto" – *orizzontale, obliquo, verticale* – di una curva e si fornisca un esempio di funzione f(x) il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.

Il termine asintoto è utilizzato in matematica per denotare una retta, o più generalmente una curva, che si avvicina indefinitamente ad una curva data. Con il termine asintoto, senza ulteriori specificazioni si intende genericamente una retta, a meno che dal contesto non emerga un altro significato, quando si vuole essere più specifici si parla di retta asintotica o, più in generale, di curva asintotica.

La retta $y = b$ è asintoto orizzontale per la curva $f(x)$ se $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$.

La retta $x = a$ è asintoto verticale per la curva $f(x)$ se $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.

La retta $y = mx + q$ è asintoto obliquo per la curva $f(x)$ se $\begin{cases} m = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right] \\ q = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - mx \right] \end{cases}$.

Per le funzioni razionali fratte, la presenza dell'asintoto orizzontale esclude quella dell'asintoto obliquo e viceversa. Una funzione il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali può essere $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ di asintoti verticali $x = \pm 1$ ed asintoto orizzontale $y = 0$.

Quesito 8

La risoluzione di un problema assegnato conduce all'equazione $2\sin(x) + k\cos(x) = 1$ **ove** $k > 0$ **e** $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$ **. Si discutano le possibili soluzioni del problema.**

Il problema si può risolvere in diversi modi. Ne presentiamo due.

Si può discutere il sistema misto

$$\begin{cases} 2\sin(x) + k\cos(x) = 1 \\ k > 0 \\ 0 \le x \le \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

e ricondurlo, attraverso le sostituzioni $\begin{cases} X = \cos(x) \\ Y = \sin(x) \end{cases}$ al sistema seguente:

$$\begin{cases} Y^2 + X^2 = 1 \\ 2Y + kX = 1 \\ k > 0 \\ \frac{1}{2} \le X \le 1 \\ 0 \le Y \le \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

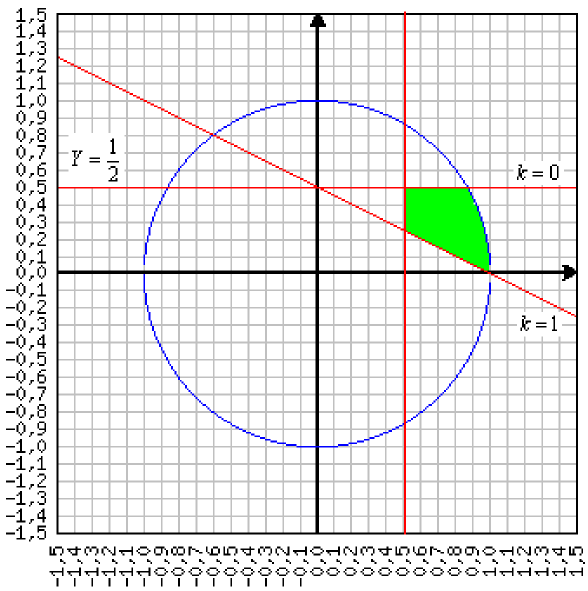
Poichè $k = \frac{1-2Y}{X} > 0 \xrightarrow{\frac{1}{2} \le X \le 1} Y < \frac{1}{2}$ allora la condizione $0 \le Y \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ diventa più restrittiva e si riconduce a $0 \le Y < \frac{1}{2}$, per cui il sistema misto diventa

$$\begin{cases} Y^2 + X^2 = 1 \\ 2Y + kX = 1 \\ 0 \le Y < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \le X \le 1 \end{cases}$$

La curva di equazione $Y^2 + X^2 = 1$ è una circonferenza di centro l'origine e raggio unitario, mentre $2Y + kX = 1$ rappresenta un fascio proprio di rette o stella di rette di centro stella $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Notiamo subito che la retta $Y = \frac{1}{2}$ appartiene al fascio proprio $2Y + kX = 1$ con $k = 0$, mentre il passaggio del fascio di rette per $(X, Y) \equiv (1,0)$ corrisponde a $k = 1$.

Di seguito viene rappresentato in verde il dominio delle soluzioni del sistema misto:



Dal dominio soprastante si evincono le seguenti soluzioni:

1. 1 soluzione per $0 < k \le 1$;
2. nessuna soluzione per $k > 1$.

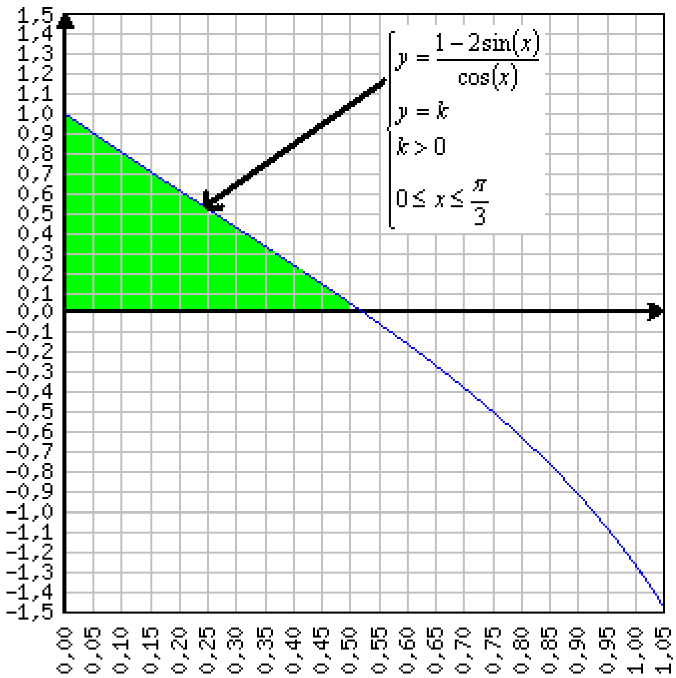
Alternativamente si può proseguire nel modo seguente.

La risoluzione dell'equazione $2\sin(x) + k\cos(x) = 1$ con i due vincoli $k > 0$ e $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$ può essere effettuata graficamente risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{1-2\sin(x)}{\cos(x)} \\ y = k \\ k > 0 \\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

Studiamo innanzitutto la funzine $y = \dfrac{1-2\sin(x)}{\cos(x)}$ nell'intervallo $D_y = \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$. Essa è definita in tutto $D_y = \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$, si annulla in $x = \dfrac{\pi}{6}$, assume per $x = 0 \rightarrow y = 1$ e per $x = \dfrac{\pi}{3} \rightarrow y = 2\left(1-\sqrt{3}\right)$, è positiva per $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{6}\right[$ e non presenta nessun asintoto. La derivata prima di $y = \dfrac{1-2\sin(x)}{\cos(x)}$ è $y' = \dfrac{-2\cos^2(x) - (1-2\sin(x))(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \dfrac{\sin(x)-2}{\cos^2(x)}$ e da essa deduciamo che $y = \dfrac{1-2\sin(x)}{\cos(x)}$ è strettamente decrescente in tutto $D_y = \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$.

La regione di piano che soddisfa le condizioni dettate dal problema è rappresentata in verde nella figura sottostante:



Dalla figura soprastante si evincono le seguenti soluzioni:

1. 1 soluzione per $0 < k \le 1$;
2. nessuna soluzione per $k > 1$.