

MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE
SCUOLE ITALIANE ALL'ESTERO (AMERICHE)
ESAMI DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
Sessione Ordinaria a.s. 2007/08

PROBLEMA 1

Si fissi nel piano la semicirconferenza Γ che ha centro in C e diametro $AB=2$ e si affrontino le seguenti questioni:

1. Si determini su Γ un punto P tale che detta Q la sua proiezione ortogonale sulla tangente in B a Γ , si abbia $AP+PQ=k$ ove k è un parametro reale diverso da zero.
2. Si trovi il rettangolo di area massima inscritto in Γ
3. Si calcoli il volume del solido che ha per base il semicerchio delimitato da Γ e tale che tagliato con piani ortogonali ad AB dia tutte sezioni quadrate.

PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali e monometriche:

1. Si studino e si rappresentino graficamente le funzioni f e g definite per ogni numero reale non nullo, rispettivamente, da $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $g(x) = x - \frac{1}{x}$ e si dica se è vero che la somma di un numero positivo e del suo inverso è almeno 2
2. Si calcoli l'area della parte di piano compresa tra i grafici di f e g per $1 \leq x \leq 2$ e disponendo di una calcolatrice elettronica se ne dia un valore approssimato a meno di 10^{-2} .
3. Sia P un punto del piano di coordinate $\left(t + \frac{1}{t}, t - \frac{1}{t}\right)$. Al variare di t ($t \neq 0$), P descrive un luogo geometrico del quale si chiede l'equazione cartesiana e il grafico.

QUESTIONARIO

- 1) Una strada rettilinea in salita supera un dislivello di 150m con un percorso di 3km. Quale è la sua inclinazione?
- 2) Si provi che fra tutti i cilindri inscritti in un cono circolare retto ha volume massimo quello la cui altezza è la terza parte dell'altezza del cono
- 3) Quale significato attribuisce al simbolo $\binom{n}{k}$? Esiste un k tale che $\binom{12}{k} = \binom{12}{k-3}$?
- 4) Si diano esempi di funzioni i cui grafici presentino due asintoti verticali e un asintoto orizzontale.
- 5) Si calcolino il numero delle soluzioni dell'equazione: $|x^2 - x| = k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.
- 6) Quante diagonali ha un poligono di 2008 lati?
- 7) Dati nel piano cartesiano i punti di coordinate reali $P(x, |x|)$ e $Q(x, \sqrt{4-x^2})$ si determini, al variare di x, l'insieme dei punti Q la cui ordinata è minore dell'ordinata di P.
- 8) La regione R delimitata dal grafico di $y = 12\sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x=2$ è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di S.

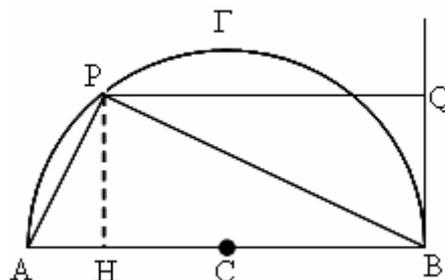
PROBLEMA 1

Si fissi nel piano la semicirconferenza Γ che ha centro in C e diametro $AB=2$ e si affrontino le seguenti questioni:

Punto 1

Si determini su Γ un punto P tale che detta Q la sua proiezione ortogonale sulla tangente in B a Γ , si abbia $AP+PQ=k$ ove k è un parametro reale diverso da zero.

Si consideri la figura seguente:



Poniamo $AP = x$ con $0 \leq x \leq 2$. Notiamo innanzitutto che se $AP = x = 0$ allora $PQ = AB = 2$ pertanto $k=2$. Analogamente se $AP = x = 2$ allora $PQ = 0$ pertanto $k=2$.

Per il teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo APB , si ha $AH = \frac{AP^2}{AB} = \frac{x^2}{2}$, pertanto

$$PQ = 2 - \frac{x^2}{2}. \text{ In questo modo la relazione diventa } k = -\frac{x^2}{2} + x + 2.$$

La discussione dell'equazione parametrica sarà effettuata per via grafica discutendo il sistema

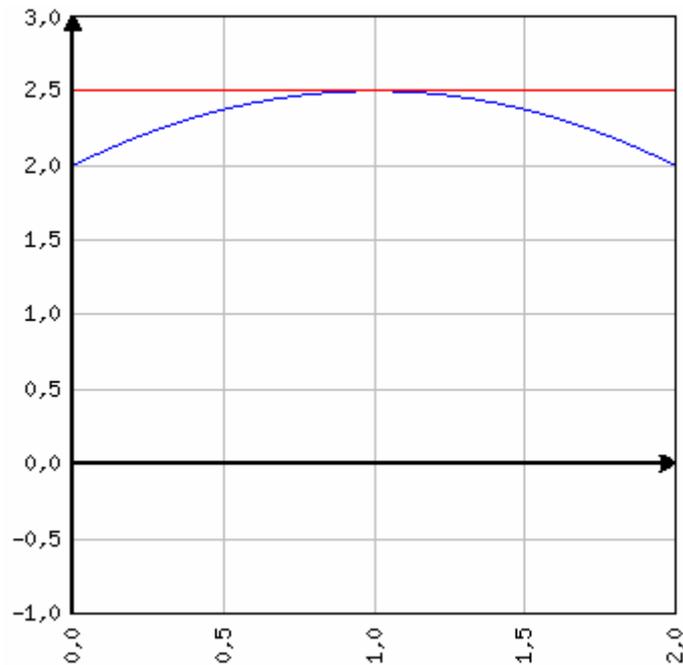
$$\begin{cases} y = -\frac{x^2}{2} + x + 2 \\ y = k \end{cases}. \text{ La curva di equazione } y = -\frac{x^2}{2} + x + 2 \text{ è una parabola con concavità verso il}$$

basso, vertice in $V\left(1, \frac{5}{2}\right)$ e in $x=0$ vale $y=2$ mentre in $x=2$ vale $y=2$ come già anticipato.

La retta di equazione $y = k$ è una retta parallela all'asse delle ascisse.

Nella figura sottostante sono state rappresentate nell'intervallo $[0,2]$ la parabola e la retta di

equazione $y = \frac{5}{2}$:



Dal grafico si traggono le seguenti conclusioni:

1. Se $k < 2$ non ci sono soluzioni
2. Se $2 \leq k < \frac{5}{2}$ ci sono 2 soluzioni distinte
3. Se $k = \frac{5}{2}$ ci sono 2 soluzioni coincidenti con $x = 1$
4. Se $k > \frac{5}{2}$ non ci sono soluzioni

In conclusione

1. Se $k < 2 \vee k > \frac{5}{2}$ non ci sono soluzioni
2. Se $2 \leq k \leq \frac{5}{2}$ ci sono due soluzioni

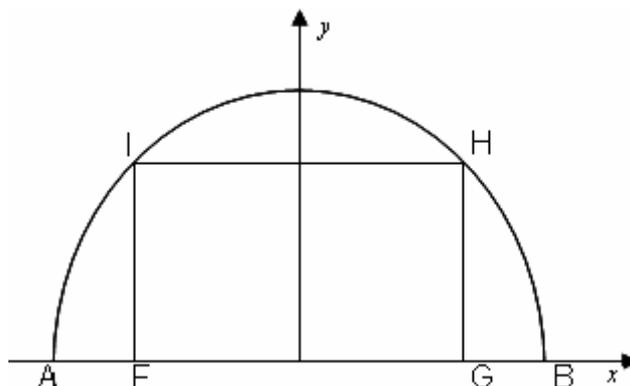
Punto 2

Si trovi il rettangolo di area massima inscritto in Γ

Il rettangolo di area massima può essere trovato attraverso differenti soluzioni. Se ne presenteranno 3:

- **Uso della geometria analitica e dell'analisi**

Si consideri la figura sottostante in cui il rettangolo e la semicirconferenza sono rappresentati in un sistema di riferimento cartesiano con l'origine coincidente con il centro della semicirconferenza:



La base HI del rettangolo FGHI si trova sulla retta generica di equazione $y = k, k \in]0,1[$. I punti di intersezione di suddetta retta con la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ sono rispettivamente $H = (\sqrt{1-k^2}, k), I = (-\sqrt{1-k^2}, k)$, mentre F e G hanno coordinate $F = (-\sqrt{1-k^2}, 0), G = (\sqrt{1-k^2}, 0)$. Con queste coordinate la base del rettangolo sarà pari a

$b = FG = HI = 2\sqrt{1-k^2}$, e l'altezza $h = HG = IF = 2|k| \stackrel{k \in]0,1[}{=} 2k$. L'area del rettangolo è

allora $S(k) = 4k\sqrt{1-k^2}$ con $k \in]0,1[$. Massimizziamo la funzione area attraverso il calcolo

della derivata prima: $S'(k) = 4\sqrt{1-k^2} - \frac{4k^2}{\sqrt{1-k^2}} = \frac{4(1-2k^2)}{\sqrt{1-k^2}}$ per cui in $]0, \frac{\sqrt{2}}{2}[$ la funzione

è strettamente crescente, in $]\frac{\sqrt{2}}{2}, 1[$ è strettamente decrescente e si annulla in $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ in cui

assume il valore massimo. Quindi il rettangolo di area massima ha vertici

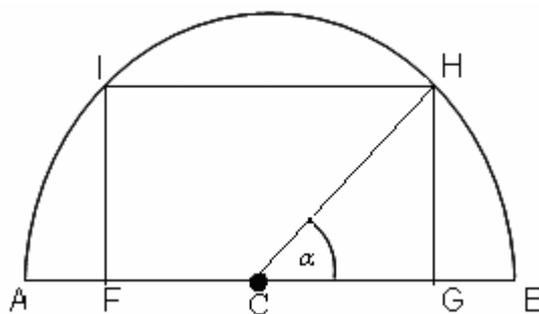
$G = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), H = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), I = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), F = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ ed il rettangolo di area

massima è costituito da due quadrati di lato $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ed area $\frac{1}{2}$. Pertanto il rettangolo ha area

massima unitaria.

- **Uso della trigonometria**

Si consideri la figura sottostante:



La limitazione geometrica impone $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

In tal caso per il teorema sui triangoli rettangoli $CG = \cos(\alpha)$, $HG = \sin(\alpha)$, per cui $S(\alpha) = FG \cdot HG = 2CG \cdot HG = 2\cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) = \sin(2\alpha)$, ed essendo l'area una funzione

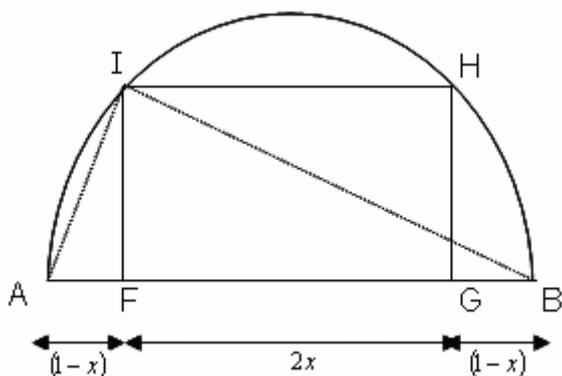
seno, essa è massima quando $\sin(2\alpha) = 1$ e quindi quando $2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$ e

per $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ il valore accettabile è $\alpha = \frac{\pi}{4}$ in corrispondenza del quale la base del

rettangolo vale $FG = \sqrt{2}$ e l'altezza $HG = \frac{\sqrt{2}}{2}$ cui corrisponde un'area massima unitaria.

• **Uso della geometria elementare e dell'analisi**

Si consideri la figura sottostante:



Poniamo la base del rettangolo $FG = 2x$. La limitazione geometrica impone $0 < x < 1$. Con queste assunzioni $AF = (1-x)$, $FB = (1+x)$, per cui per il teorema di Euclide

$IF = HG = \sqrt{(1-x) \cdot (1+x)} = \sqrt{1-x^2}$. L'area del rettangolo è allora $S(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$ e poiché

$0 < x < 1$ si ha $x = \sqrt{x^2}$ da cui $S(x) = 2\sqrt{x^2(1-x^2)}$. La massimizzazione della funzione area,

come già mostrato, può essere effettuata tramite le derivate; non seguiremo questa strada ma

mostreremo una strada alternativa. Massimizzare $S(x) = 2\sqrt{x^2(1-x^2)}$ è equivalente a

massimizzare la funzione radicando $r(x) = x^2(1-x^2)$; la funzione $r(x)$ è il prodotto di due numeri a somma costante (e pari a 1: $x^2 + (1-x^2) = 1$) per cui il loro prodotto è massimo quando i due numeri sono uguali¹ e quindi quando $x^2 = (1-x^2)$ da cui $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$; la soluzione negativa va scartata per cui l'area del rettangolo è massima quando $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e quindi quando

$$FG = \sqrt{2}, IG = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e vale } S\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)} = 1.$$

Punto 3

Si calcoli il volume del solido che ha per base il semicerchio delimitato da Γ e tale che tagliato con piani ortogonali ad AB dia tutte sezioni quadrate.

La semicirconferenza può essere rappresentata in un sistema di riferimento cartesiano con origine coincidente con il centro della circonferenza stessa. In questo sistema la semicirconferenza ha equazione $y = \sqrt{1-x^2}$. In tal modo il quadrato sezione ha area $A(x) = (1-x^2)$ pertanto il volume

$$\text{sarà } V = \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = 2 \int_0^1 (1-x^2) dx = 2 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

¹ Siano x, y due numeri positivi la cui somma è $x + y = s$ ed il cui prodotto è $xy = p$. Dalla somma si ricava $y = s - x$ che sostituito nel prodotto fornisce $p = x(s - x)$; pertanto il prodotto è una parabola con concavità verso il basso e con massimo raggiunto per $x = \frac{s}{2}$ cui corrisponde $y = \frac{s}{2}$.

PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali e monometriche:

Punto 1

Si studino e si rappresentino graficamente le funzioni f e g definite per ogni numero reale non nullo, rispettivamente, da $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $g(x) = x - \frac{1}{x}$ e si dica se è vero che la somma di un numero positivo e del suo inverso è almeno 2

Studiamo la funzione $f(x) = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 1}{x}$

Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$

Intersezioni asse ascisse: cui non ci sono intersezioni con l'asse delle ascisse

Intersezioni asse ordinate: non ci sono intersezioni con l'asse delle ordinate

Eventuali simmetrie: la funzione è dispari

Positività: $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} \geq 0 \Rightarrow x \in (0, +\infty)$

Asintoti verticali: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 1}{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 1}{x} = -\infty$ per cui la retta $x = 0$ è asintoto verticale

Asintoti orizzontali: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x} \right) = \pm\infty$ per cui non esistono asintoti orizzontali

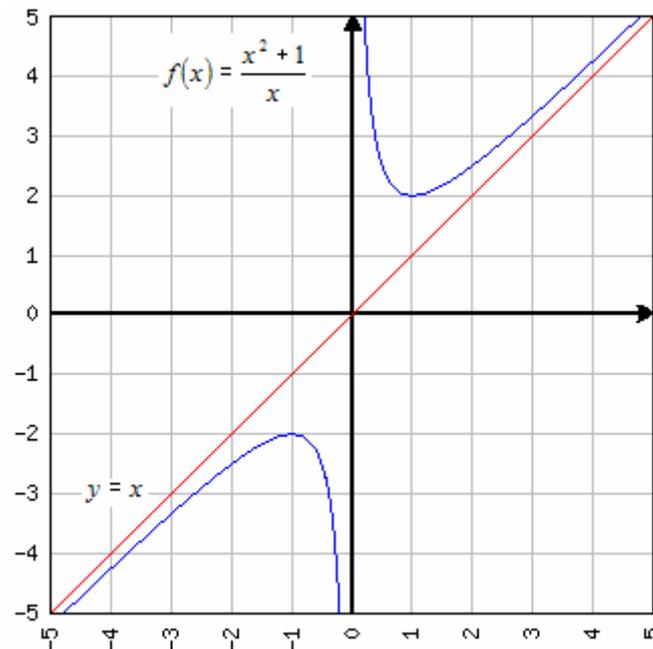
Asintoti obliqui: hanno equazione $y = mx + q$ con $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\left(\frac{x^2 + 1}{x} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} \right) = 1$ e

$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$ pertanto la retta $y = x$ è asintoto obliquo

Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{x^2 - 1}{x^2}$ per cui la funzione è strettamente crescente in $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, strettamente decrescente in $(-1, 0) \cup (0, 1)$ e si annulla in $x = -1$ in cui presenta un massimo $M(-1, -2)$ ed in $x = 1$ in cui presenta un minimo $m(1, 2)$

Concavità e convessità: $y'' = \frac{2}{x^3}$ per cui la funzione non presenta flessi

Il grafico è di seguito presentato:



Studiamo la funzione $g(x) = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x}$

Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$

Intersezioni asse ascisse: $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

Intersezioni asse ordinate: non ci sono intersezioni con l'asse delle ordinate

Eventuali simmetrie: la funzione è dispari

Positività: $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x} \geq 0 \Rightarrow x \in [-1, 0[\vee [1, +\infty[$

Asintoti verticali: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x} = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1}{x} = +\infty$ per cui la retta $x = 0$ è asintoto verticale

Asintoti orizzontali: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right) = \pm\infty$ per cui non esistono asintoti orizzontali

Asintoti obliqui: hanno equazione $y = mx + q$ con $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\frac{x^2 - 1}{x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} \right) = 1$ e

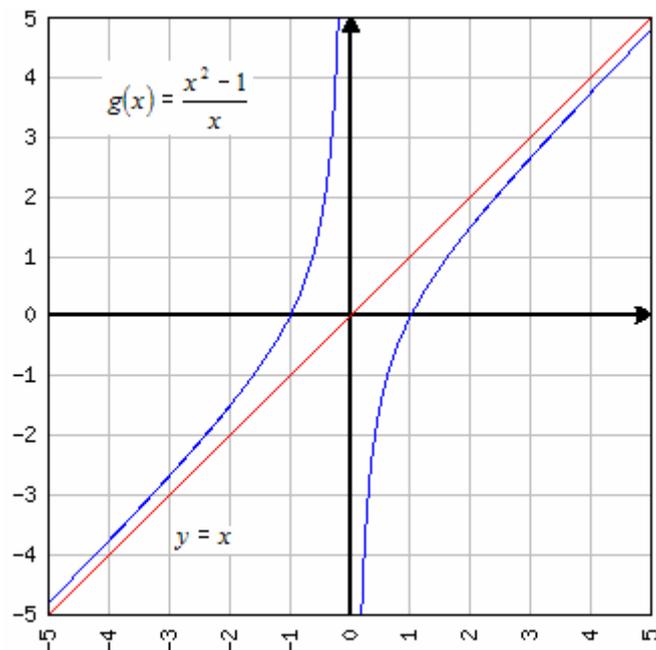
$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0$ pertanto la retta $y = x$ è asintoto obliquo

Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{x^2 + 1}{x^2}$ per cui la funzione è strettamente crescente in tutto il suo

dominio

Concavità e convessità: $y'' = -\frac{2}{x^3}$ per cui la funzione non presenta flessi

Il grafico è di seguito presentato:



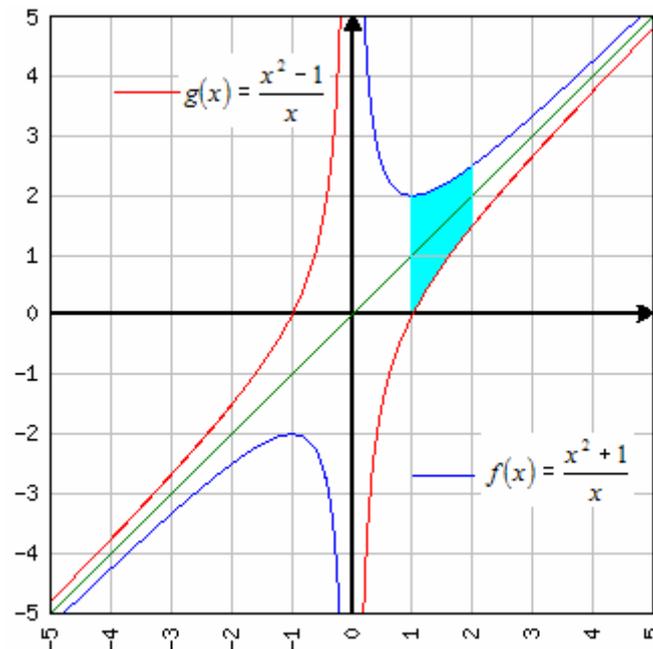
La proposizione per cui la somma di un numero reale positivo e del suo inverso è almeno 2 è vera; basta verificare che la disequazione $x + \frac{1}{x} \geq 2$ è soddisfatta $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

La disequazione, poiché $x \in \mathbb{R}^+$, si può anche scrivere come $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$, e risulta essere sempre verificata $\forall x \in \mathbb{R}^+$ in quanto un quadrato è sempre un numero positivo o al massimo nullo.

Punto 2

Si calcoli l'area della parte di piano compresa tra i grafici di f e g per $1 \leq x \leq 2$ e disponendo di una calcolatrice elettronica se ne dia un valore approssimato a meno di 10^{-2} .

L'area da calcolare è rappresentata nella figura sottostante:



L'area da calcolare è $Area = \int_1^2 \left[\left(\frac{x^2 + 1}{x} \right) - \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right) \right] dx = \int_1^2 \frac{2}{x} dx = [2 \ln|x|]_1^2 = 2 \ln 2 = \ln 4 \approx 1.39$ con un'approssimazione per eccesso.

Punto 3

Sia P un punto del piano di coordinate $\left(t + \frac{1}{t}, t - \frac{1}{t} \right)$. Al variare di t ($t \neq 0$), P descrive un

luogo geometrico del quale si chiede l'equazione cartesiana e il grafico.

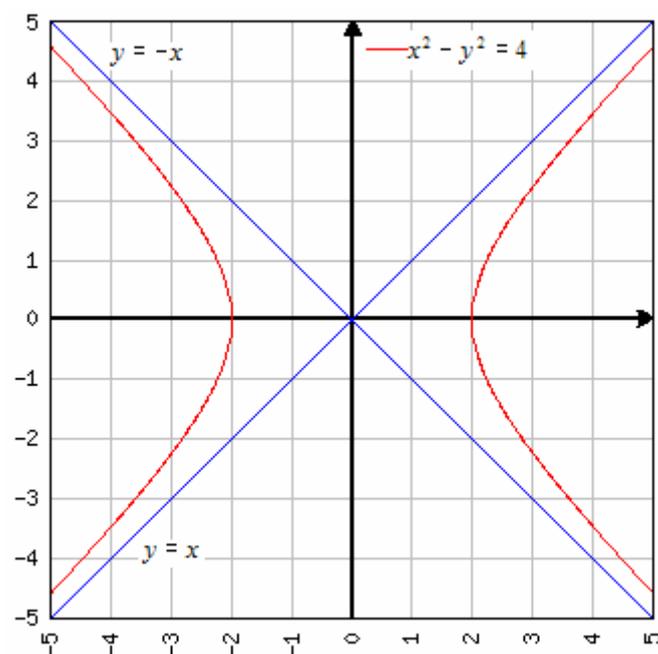
$$\text{Imponiamo } \begin{cases} x = t + \frac{1}{t} \\ y = t - \frac{1}{t} \end{cases}$$

Sommando le due equazioni si ricava $x + y = 2t$, mentre sottraendo la seconda alla prima si ricava

$x - y = \frac{2}{t}$. Dalla seconda ricaviamo $t = \frac{2}{x - y}$ e lo sostituiamo nella prima ottenendo

$x + y = 2 \cdot \left(\frac{2}{x - y} \right)$ che può essere scritta come $x^2 - y^2 = 4$ che una iperbole equilatera con centro

di simmetria $(0,0)$ ed asintoti $y = \pm x$.

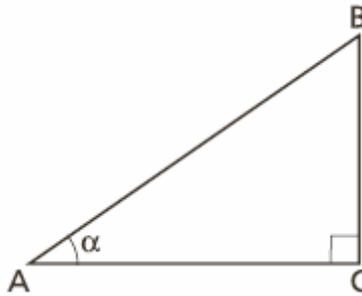


QUESTIONARIO

Quesito 1

Una strada rettilinea in salita supera un dislivello di 150m con un percorso di 3km. Quale è la sua inclinazione?

Consideriamo la figura sottostante:



Per ipotesi $AB=3$ km, $BC=150$ m.

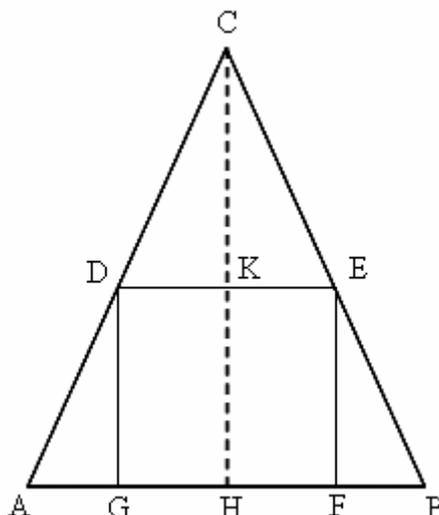
Per il teorema di Pitagora $AC = \sqrt{3000^2 - 150^2} \cong 2996,25$ m, per cui la percentuale di inclinazione

è $p\% = \frac{150}{2996,25} \cong 5\%$, mentre l'angolo di inclinazione vale $\alpha = \arctan\left(\frac{150}{2996,25}\right) \cong 2^\circ 51' 57''$.

Quesito 2

Si provi che fra tutti i cilindri inscritti in un cono circolare retto ha volume massimo quello la cui altezza è la terza parte dell'altezza del cono

Consideriamo la figura seguente in cui è rappresentata la sezione del cono con il cilindro all'interno:



Indichiamo con $DG = KH = EF = x$ l'altezza del cilindro, con $HC = h$ l'altezza del cono, con $AH = HB = r$ il raggio di base del cono e con $HG = HF = DK = KE = r'$ il raggio di base del cilindro. La limitazione geometrica impone $0 < x < h$.

I triangoli ADG e ACH sono simili per cui vale la proporzione tra i lati omologhi:

$AG : GD = AH : HC \Rightarrow (r - r') : x = r : h \Rightarrow r' = r \left(1 - \frac{x}{h}\right)$. Il volume del cilindro, quindi, sarà:

$V = \pi \cdot HF^2 \cdot KH = \pi \cdot r^2 \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 \cdot x = \pi \cdot r^2 \cdot \left[x \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2\right]$. La massimizzazione del volume la

effettuiamo tramite il calcolo della derivata prima, ottenendo:

$V' = \pi \cdot r^2 \cdot \left[\left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 - \frac{2x}{h} \left(1 - \frac{x}{h}\right)\right] = \pi \cdot r^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right) \cdot \left(1 - \frac{3x}{h}\right)$ per cui, tenendo conto della

limitazione $0 < x < h$, la funzione volume è strettamente crescente in $\left(0, \frac{h}{3}\right)$, strettamente

decrecente in $\left(\frac{h}{3}, h\right)$ e si annulla in $x = \frac{h}{3}$ in cui presenta un massimo $M\left(\frac{h}{3}, \frac{4\pi r^2 h}{27}\right)$. Quindi il

volume del cilindro è massimo quando la sua altezza è pari ad un terzo di quella del cono ed il

volume massimo è pari a $V_{MAX} = \frac{4\pi r^2 h}{27}$.

Quesito 3

Quale significato attribuisce al simbolo $\binom{n}{k}$? Esiste un k tale che $\binom{12}{k} = \binom{12}{k-3}$?

Il coefficiente binomiale è definito da $C(n; k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ed esso fornisce il numero delle combinazioni semplici di n elementi di lunghezza k .

Ad esempio se si vuole calcolare quante volte escono {4 Teste} da 8 lanci di una moneta non

truccata, basta calcolare $C(8; 4) = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!(8-4)!} = 70$.

Per rispondere alla seconda domanda basta ricordare una proprietà notevole del coefficiente

binomiale: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Nel nostro caso $n = 12$, per cui il valore di k tale che $\binom{12}{k} = \binom{12}{k-3}$

deve soddisfare la relazione $12 - k = k - 3$ da cui $k = \frac{15}{2}$; ma poiché la condizione cui k deve

soddisfare è quella di essere intero e tale che $k \geq 3$, allora il valore $k = \frac{15}{2}$ non è accettabile. In conclusione non esiste un k tale che $\binom{12}{k} = \binom{12}{k-3}$.

Il valore trovato può essere calcolato anche senza ricordare l'identità notevole e risolvendo l'equazione direttamente. In tal caso si ha:

$$\binom{12}{k} = \binom{12}{k-3} \Leftrightarrow \frac{12!}{k!(12-k)!} = \frac{12!}{(k-3)!(15-k)!} \Leftrightarrow \frac{(15-k)!}{(12-k)!} = \frac{k!}{(k-3)!} \quad \text{da cui}$$
$$(13-k)(14-k)(15-k) = k(k-1)(k-2) \Rightarrow 2k^3 - 45k^2 + 589k - 2730 = \left(k - \frac{15}{2}\right)(2k^2 - 30k + 364) = 0$$

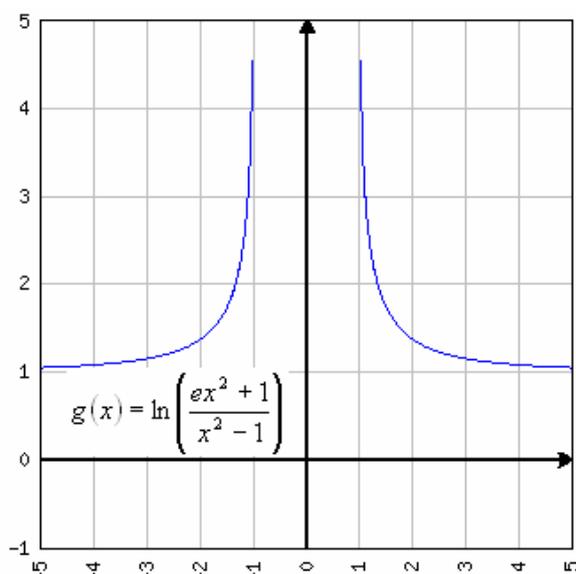
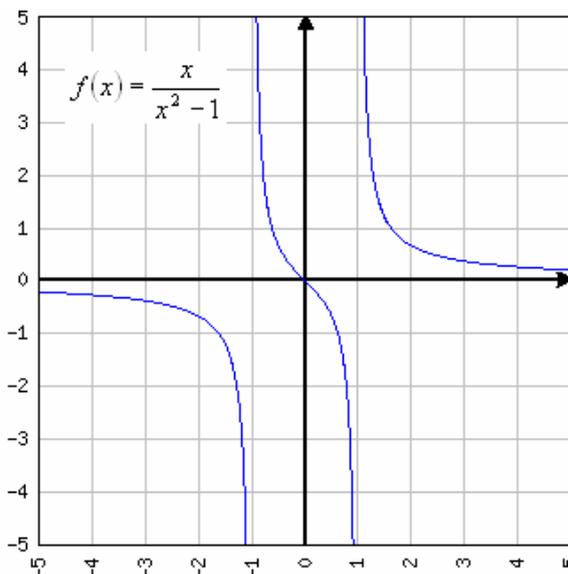
da cui si ricava l'unica soluzione reale $k = \frac{15}{2}$ come precedentemente trovato.

Quesito 4

Si diano esempi di funzioni i cui grafici presentino due asintoti verticali e un asintoto orizzontale.

Funzioni con due asintoti verticali ed uno orizzontale sono ad esempio:

1. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ con $x = \pm 1$ asintoti verticali e $y = 0$ asintoto orizzontale;
2. $g(x) = \ln\left(\frac{ex^2 + 1}{x^2 - 1}\right)$ con $x = \pm 1$ asintoti verticali e $y = 1$ asintoto orizzontale.



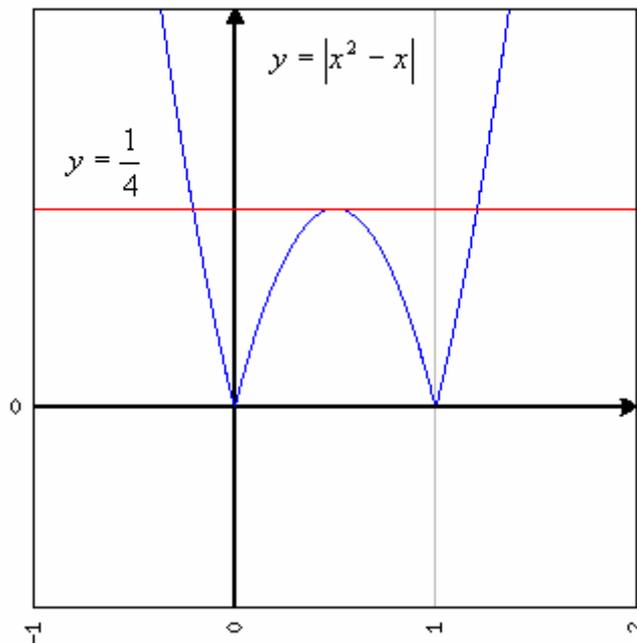
Quesito 5

Si calcolino il numero delle soluzioni dell'equazione: $|x^2 - x| = k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Effettueremo la discussione per via grafica, risolvendo il sistema $\begin{cases} y = |x^2 - x| \\ y = k \end{cases}$.

Il grafico della funzione $y = |x^2 - x|$ si ricava dal grafico della parabola $g(x) = x^2 - x$ e ribaltando, per via del valore assoluto, le parti negative verso le ordinate positive. La parabola $g(x) = x^2 - x$ ha concavità verso l'alto, interseca l'asse delle ascisse in $(0,0), (1,0)$, quello delle ordinate in $(0,0)$ ed ha il vertice in $V\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$. Nel grafico sottostante vengono presentate la funzione $y = |x^2 - x|$ e la

retta $y = \frac{1}{4}$:



Dal grafico si evincono le seguenti soluzioni:

- $k < 0$: nessuna soluzione
- $k = 0$: due soluzioni $x = 0, x = 1$
- $0 < k < \frac{1}{4}$: 4 soluzioni distinte

- $k = \frac{1}{4}$: 4 soluzioni di cui due coincidenti $x = \frac{1}{2}$ e $x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$
- $k > \frac{1}{4}$: 2 soluzioni distinte

Quesito 6

Quante diagonali ha un poligono di 2008 lati?

La formula che esprime il numero di diagonali di un poligono in funzione del numero di lati è

$d = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$. Per un poligono di 2008 lati il numero di diagonali

$$d = \frac{2008 \cdot 2005}{2} = 1004 \cdot 2005 = 2013020$$

Quesito 7

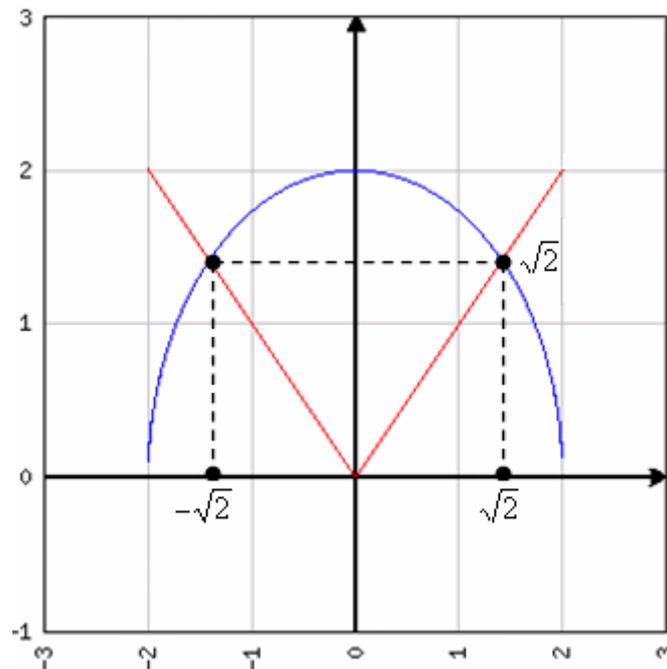
Dati nel piano cartesiano i punti di coordinate reali $P(x, |x|)$ e $Q(x, \sqrt{4-x^2})$ si determini, al variare di x , l'insieme dei punti Q la cui ordinata è minore dell'ordinata di P .

Discuteremo la disequazione $\sqrt{4-x^2} < |x|$ per via grafica, discutendo il sistema $\begin{cases} y = \sqrt{4-x^2} \\ y = |x| \end{cases}$. La

curva $y = \sqrt{4-x^2}$ è una semicirconferenza di raggio 2, mentre $y = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$.

Calcoliamo le intersezioni tra le due curve: si tratta di risolvere l'equazione $\sqrt{4-x^2} = |x|$. Visto che ambo i membri sono non negativi, elevando al quadrato si ha $4-x^2 = x^2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Il grafico sottostante raffigura quanto discusso e ricavato.



Dalla figura soprastante emerge subito che la disequazione $\sqrt{4-x^2} < |x|$ è soddisfatta per $-2 \leq x < -\sqrt{2} \vee \sqrt{2} < x \leq 2$.

Un altro modo per risolvere la disequazione, è procedere in modo classico e risolvere il sistema seguente:

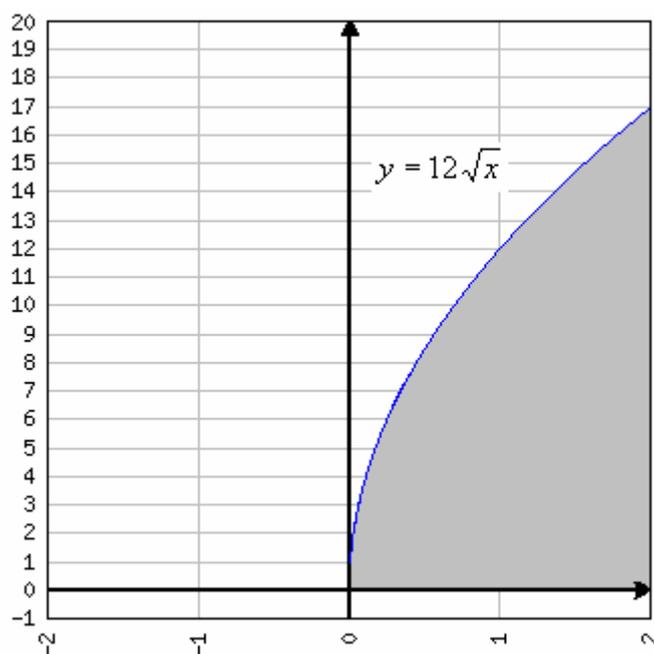
$$\begin{cases} |x| > 0 \\ 4-x^2 \geq 0 \\ 4-x^2 < (|x|)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| > 0 \\ 4-x^2 \geq 0 \\ 4-x^2 < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| > 0 \\ 4-x^2 \geq 0 \\ 2(2-x^2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{R} - \{0\} \\ -2 \leq x \leq 2 \\ x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2} \end{cases}$$

Mettendo assieme le tre condizioni si ricavano le soluzioni del sistema $-2 \leq x < -\sqrt{2} \vee \sqrt{2} < x \leq 2$ come già trovato.

Quesito 8

La regione R delimitata dal grafico di $y = 12\sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x=2$ è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x , sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di S .

La regione di interesse è sotto raffigurata:



L'area del triangolo equilatero sezione è $S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot y^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (144x) = 36\sqrt{3}x$ per cui il volume è

$$\int_0^2 36\sqrt{3}x dx = 36\sqrt{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 72\sqrt{3}.$$