

ESAMI DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
SCUOLE ITALIANE ALL'ESTERO AMERICHE
CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Nel piano cartesiano Oxy è data la circonferenza C con centro O e raggio $r = 3$.

- a) Si tracci una corda \overline{CD} perpendicolare al diametro \overline{AB} con $A(-3,0)$ e $B(3,0)$. Si trovino le coordinate dei punti C ed D di C in modo che l'area del triangolo ACD sia massima.
- b) Si scrivano le equazioni delle tangenti a C nei suoi punti di ascissa $x = 1$
- c) Si calcoli con l'aiuto di una calcolatrice, l'ampiezza, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo \widehat{POQ} , con $P(0,3)$ e $Q(2,\sqrt{5})$
- d) Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione del settore circolare attorno all'asse x .

PROBLEMA 2

1. Si trovi l'espressione generale di un polinomio $P(x)$ di 4° grado tale che $P(-2) = P(2) = 0$ e $P(x) \geq 0$ per ogni x .
2. Sia $P(x) = (x^2 - 4)^2$. In un sistema di riferimento cartesiano Oxy si rappresenti l'andamento di $P(x)$, determinandone in particolare i valori massimi e minimi e flessi.
3. Si determini l'area della regione piana finita R compresa tra il grafico di $P(x)$ e l'asse x
4. Si inscriba in R un rettangolo, con uno dei lati sull'asse x . Come va scelto tale rettangolo affinché esso abbia area massima? Come va scelto tale rettangolo affinché, ruotandolo di un mezzo giro attorno all'asse y , si ottenga un cilindro di volume massimo?

QUESTIONARIO

- 1) Si dimostri che l'equazione:

$$x^{19} + 19x + 11 = 0$$

ha una sola radice compresa fra -1 e 0 .

- 2) Si determini il periodo della funzione $y = \cos(7x)$

- 3) Si scrivano le equazioni di almeno due funzioni razionali fratte che hanno un asintoto obliquo.

- 4) Si trovi il valore del parametro k in modo che la curva d'equazione $y = kx^3 - x + 4$ abbia nel punto d'ascissa $x = 1$ la tangente orizzontale

5) Si dia una definizione di poliedro regolare. Si dimostri che i poliedri regolari sono, a meno di similitudini, solo 5 e si dica quali sono.

6) Quanti sono i numeri di quattro cifre (distinte tra loro) che è possibile scrivere utilizzando le cifre pari, diverse da zero?

7) Si calcoli:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2}$$

8) Si risolva in \mathbb{R} la seguente equazione:

$$e^{2x} + e^x = 2$$

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

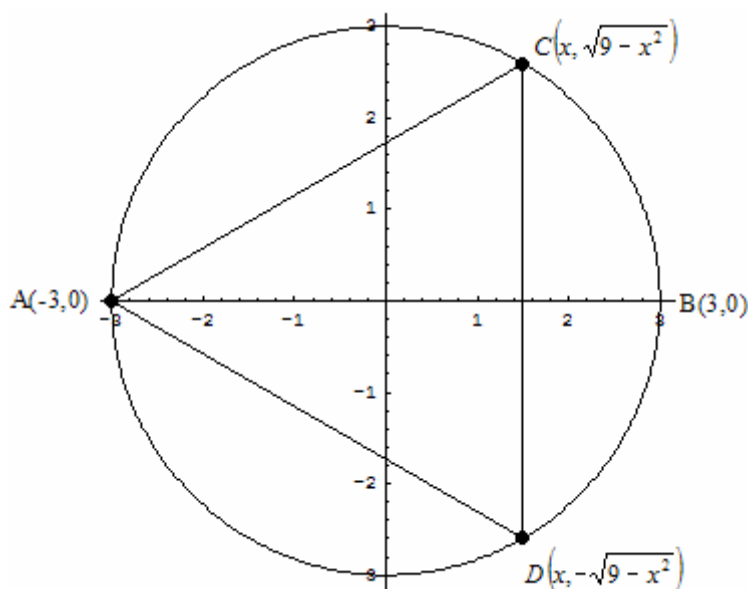
PROBLEMA1

Nel piano cartesiano Oxy è data la circonferenza C con centro O e raggio $r = 3$.

Punto a

Si tracci una corda \overline{CD} perpendicolare al diametro \overline{AB} con $A(-3,0)$ e $B(3,0)$. Si trovino le coordinate dei punti C ed D di C in modo che l'area del triangolo ACD sia massima.

L'equazione della circonferenza C è $x^2 + y^2 = 9$. Per trovare il triangolo ACD di area massima, innanzitutto facciamo la seguente considerazione. Il triangolo ACD è isoscele su base CD per simmetria ed inoltre ha il vertice sull'asse negativo delle ascisse. Il triangolo di area massima dovrà avere la base CD nel primo e quarto quadrante in quanto se la base fosse nel secondo e terzo quadrante il triangolo non avrebbe area massima in quanto esisterebbe il triangolo rettangolo isoscele di base il diametro ed altezza pari al raggio con area maggiore di quella del triangolo ACD . Quindi i punti C ed D si troveranno rispettivamente nel primo e quarto quadrante ed avranno coordinate $C(x, \sqrt{9-x^2})$, $D(x, -\sqrt{9-x^2})$ con $0 < x < 3$. La figura seguente mostra la geometria del problema:



Il triangolo ACD per simmetria è isoscele su base $\overline{CD} = 2\sqrt{9-x^2}$ ed altezza $(x+3)$. L'area è allora $S(x) = (x+3) \cdot \sqrt{9-x^2} = \sqrt{(x+3)^2(9-x^2)} = \sqrt{(x+3)^3(3-x)}$ in cui il fattore $(x+3)$ è stato portato sotto radice in quanto $0 < x < 3$. La massimizzazione di $S(x) = \sqrt{(x+3)^3(3-x)}$ equivale alla massimizzazione di $g(x) = S^2(x) = (x+3)^3(3-x)$ la cui derivata prima è $g'(x) = 3(x+3)^2(3-x) - (x+3)^3 = (x+3)^2(6-4x)$ per cui $g'(x) = (x+3)^2(6-4x) > 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{3}{2}$

e $g'(x) = (x+3)^2(6-4x) > 0 \Rightarrow \frac{3}{2} < x < 3$; da queste considerazioni deduciamo che la funzione area è strettamente crescente in $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ e strettamente decrescente in $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$, quindi l'area massima si ha per $x = \frac{3}{2}$ e vale $S\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27\sqrt{3}}{4}$ cui corrispondono $C\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), N\left(\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$. In questo caso notiamo che $\overline{CD} = \overline{DA} = \overline{AC} = 3\sqrt{3}$, cioè il triangolo di area massima è un triangolo equilatero.

Punto b

Si scrivano le equazioni delle tangenti a C nei suoi punti di ascissa $x = 1$

I punti di intersezione tra la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 9$ e la retta $x = 1$ si ricavano dal

$$\text{sistema } \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x = 1 \end{cases} \text{ da cui } \begin{cases} y^2 = 8 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q(1, 2\sqrt{2}) \\ R(1, -2\sqrt{2}) \end{cases}.$$

Nel primo e secondo quadrante, cioè nel semipiano $y > 0$, la semicirconferenza è in forma esplicita rappresentata dalla curva $y = \sqrt{9 - x^2}$, mentre nel terzo e quarto, cioè nel semipiano $y < 0$ la semicirconferenza è in forma esplicita rappresentata dalla curva $y = -\sqrt{9 - x^2}$ le cui derivate sono $y' = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}}$ per $y > 0$ e $y' = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$ per $y < 0$.

Calcoliamo le tangenti:

$$1. \text{ La tangente in } Q(1, 2\sqrt{2}) \text{ ha equazione } y = m(x-1) + 2\sqrt{2} \text{ con } m = \left[\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} \right]_{x=1} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \text{ da}$$

$$\text{cui } t_Q; y = -\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{9\sqrt{2}}{4};$$

$$2. \text{ La tangente in } R(1, -2\sqrt{2}) \text{ ha equazione } y = m(x-1) - 2\sqrt{2} \text{ con } m = \left[\frac{x}{\sqrt{9-x^2}} \right]_{x=1} = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ da}$$

$$\text{cui } t_R; y = \frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{9\sqrt{2}}{4};$$

Analogamente si può procedere nella maniera classica in cui si mette a sistema l'equazione della circonferenza e la generica retta tangente e poi si impone che il delta dell'equazione risultante sia nullo.

Per la tangente in $Q(1, 2\sqrt{2})$ si ha:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = mx - m + 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow x^2 + (mx - m + 2\sqrt{2})^2 = 9 \Rightarrow (1 + m^2)x^2 - 2x(m^2 - 2\sqrt{2}m) + (m^2 - 4\sqrt{2}m - 1) = 0$$

Imponendo $\frac{\Delta}{4} = 0$ si ha $(m^2 - 2\sqrt{2}m)^2 - (m^2 + 1)(m^2 - 4\sqrt{2}m - 1) = (2\sqrt{2}m + 1)^2 = 0 \Rightarrow m = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ da

cui $t_Q: y = -\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{9\sqrt{2}}{4}$.

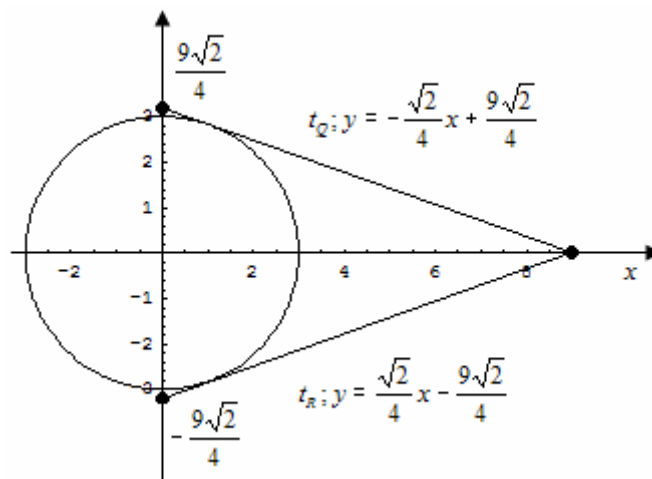
Per la tangente in $R(1, -2\sqrt{2})$ si ha:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = mx - m - 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow x^2 + (mx - m - 2\sqrt{2})^2 = 9 \Rightarrow (1 + m^2)x^2 - 2x(m^2 + 2\sqrt{2}m) + (m^2 + 4\sqrt{2}m - 1) = 0$$

Imponendo $\frac{\Delta}{4} = 0$ si ha $(m^2 + 2\sqrt{2}m)^2 - (m^2 + 1)(m^2 + 4\sqrt{2}m - 1) = (2\sqrt{2}m - 1)^2 = 0 \Rightarrow m = \frac{\sqrt{2}}{4}$ da

cui $t_R: y = \frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{9\sqrt{2}}{4}$.

Di seguito la circonferenza con le tangenti suddette.

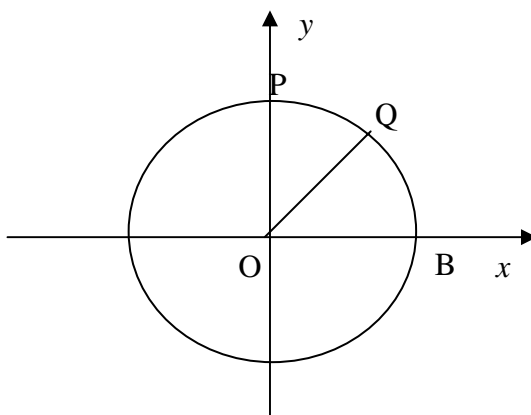


Punto c

Si calcoli con l'aiuto di una calcolatrice, l'ampiezza, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo

\widehat{POQ} , con $P(0,3)$ e $Q(2, \sqrt{5})$

Consideriamo la figura seguente:



L'angolo \widehat{POQ} è pari a $\widehat{POQ} = \widehat{POB} - \widehat{QOB} = \frac{\pi}{2} - \widehat{QOB}$. Ora $\widehat{QOB} = \arcsin\left(\frac{y_Q}{OQ}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

per cui $\widehat{POQ} = \widehat{POB} - \widehat{QOB} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \cong 41^\circ 49'$

Punto d

Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione del settore circolare attorno all'asse x.

Il volume richiesto lo si calcola per differenza tra il volume del solido generato dalla rotazione del quarto di circonferenza \widehat{POB} cui va sottratto il volume del solido generato dalla rotazione del settore circolare \widehat{QOB} . Il volume del solido generato dalla rotazione del quarto di circonferenza

\widehat{POB} è $V_1 = \pi \int_0^3 (\sqrt{9-x^2})^2 dx = \pi \int_0^3 (9-x^2) dx = \pi \left[9x - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 18\pi$; il volume del solido generato dalla

rotazione del settore circolare \widehat{QOB} è a sua volta la somma di due volumi, quello generato dalla rotazione della retta OQ di equazione $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x$ in $[1,2]$ e quello generato dalla rotazione dell'arco

di circonferenza di equazione $y = \sqrt{9-x^2}$ in $[2,3]$, quindi

$$\begin{aligned} V(\widehat{QOB}) &= \pi \int_1^2 \left(\frac{\sqrt{5}}{2}x \right)^2 dx + \pi \int_2^3 (\sqrt{9-x^2})^2 dx = \pi \int_1^2 \left(\frac{5}{4}x^2 \right) dx + \pi \int_2^3 (9-x^2) dx = \\ &= \pi \left[\frac{5}{12}x^3 \right]_1^2 + \pi \left[9x - \frac{x^3}{3} \right]_2^3 = \frac{35}{12}\pi + \frac{8}{3}\pi = \frac{67}{12}\pi \end{aligned}$$

Il volume richiesto è allora $V = V_1 - V(\widehat{QOB}) = 18\pi - \frac{67}{12}\pi = \frac{149}{12}\pi$.

PROBLEMA2Punto 1

Si trovi l'espressione generale di un polinomio $P(x)$ di 4° grado tale che $P(-2) = P(2) = 0$ e $P(x) \geq 0$ per ogni x .

Un generico polinomio di quarto grado è $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Imponendo

$P(2) = P(-2) = 0$ si ricavano le due condizioni seguenti $\begin{cases} 16a + 8b + 4c + 2d + e = 0 \\ 16a - 8b + 4c - 2d + e = 0 \end{cases}$. Sommando le

due equazioni si ricava $e = -16a - 4c$ mentre sottraendole si ricava $d = -4b$, per cui il polinomio diventa

$$\begin{aligned} P(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 - 4bx - (16a + 4c) = \\ &= a(x^4 - 16) + bx(x^2 - 4) + c(x^2 - 4) = \\ &= a(x^2 - 4)(x^2 + 4) + bx(x^2 - 4) + c(x^2 - 4) = \\ &= (x^2 - 4)[a(x^2 + 4) + bx + c] = (x^2 - 4)(ax^2 + bx + 4a + c) \end{aligned}$$

Affinché il polinomio sia sempre positivo, il fattore $(x^2 + bx + 4a + c)$ deve essere anch'esso pari a

$$(x^2 - 4) \text{ e cioè deve aversi } \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -8 \end{cases}.$$

Un polinomio con le caratteristiche richieste è allora $P(x) = (x^2 - 4)^2$

Punto 2

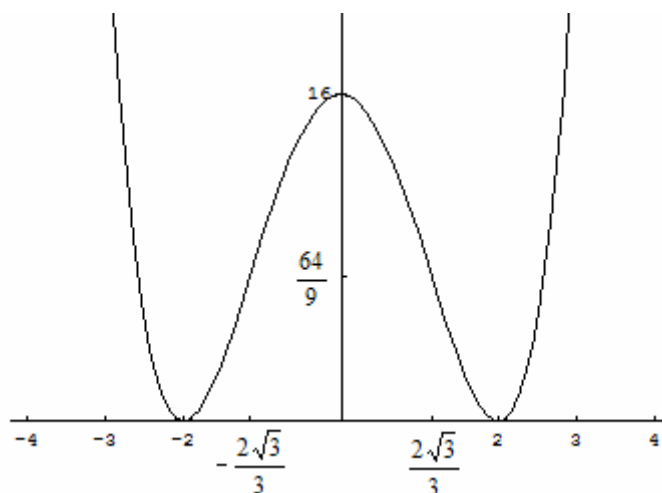
Sia $P(x) = (x^2 - 4)^2$. In un sistema di riferimento cartesiano Oxy si rappresenti l'andamento di $P(x)$, determinandone in particolare i valori massimi e minimi e flessi.

- *Dominio:* \mathbb{R}
- *Intersezione asse ascisse:* $P(x) = (x^2 - 4)^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$
- *Intersezione asse ordinate* $x = 0 \rightarrow y = 16$;
- *Eventuali simmetrie:* la funzione è pari n quanto $P(x) = P(-x)$
- *Positività:* $P(x) = (x^2 - 4)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / \{\pm 2\}$
- *Comportamento agli estremi del dominio:* $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^2 - 4)^2 = +\infty$
- *Asintoti:* non vi è nessun tipo di asintoto, nè verticale in quanto il dominio è \mathbb{R} , nè

orizzontale in quanto $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^2 - 4)^2 = +\infty$ e nè obliquo in quanto $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x^2 - 4)^2}{x} = \pm\infty$

- *Crescenza e decrescenza*: la derivata prima è $P'(x) = 4x(x^2 - 4)$ per cui $P'(x) = 4x(x^2 - 4) > 0 \Rightarrow -2 < x < 0 \vee x > 2$ e $P'(x) = 4x(x^2 - 4) < 0 \Rightarrow x < -2 \vee 0 < x < 2$ quindi la funzione è strettamente crescente in $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$ e strettamente decrescente in $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$.
- *Concavità e convessità*: la derivata seconda è $P''(x) = 4(3x^2 - 4)$ che si annulla in $x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$ che rappresentano le ascisse di due flessi a tangente obliqua. Inoltre $P''(2) = 32 > 0, P''(-2) = 32 > 0, P''(0) = -16 < 0$ per cui in conclusione $(2, 0), (-2, 0)$ sono due minimi relativi ed assoluti, $(0, 16)$ è un massimo relativo e $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{64}{9}\right), \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{64}{9}\right)$ sono due flessi a tangente obliqua.

Di seguito il grafico.



Punto c

Si determini l'area della regione piana finita R compresa tra il grafico di $P(x)$ e l'asse x

L'area richiesta è pari a $S = \int_{-2}^2 (x^2 - 4)^2 dx = 2 \int_0^2 (x^2 - 4)^2 dx$ in quanto l'integrando è pari. Risolvendo

l'integrale

si

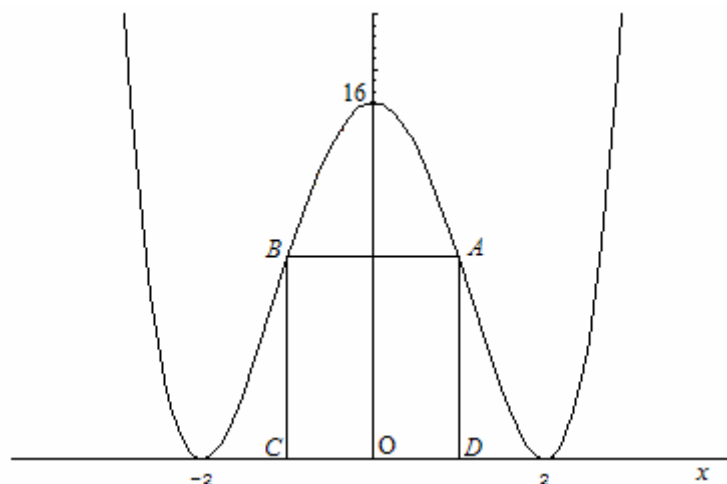
ha:

$$S = 2 \int_0^2 (x^2 - 4)^2 dx = 2 \int_0^2 (x^4 - 8x^2 + 16) dx = 2 \left[\frac{x^5}{5} - \frac{8x^3}{3} + 16x \right]_0^2 = 2 \left(\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32 \right) = \frac{512}{15}$$

Punto d

Si inscriba in R un rettangolo, con uno dei lati sull'asse x . Come va scelto tale rettangolo affinché esso abbia area massima? Come va scelto tale rettangolo affinché, ruotandolo di un mezzo giro attorno all'asse y , si ottenga un cilindro di volume massimo?

Consideriamo la figura seguente.



I vertici A, B, C e D hanno rispettivamente le seguenti coordinate:

$A(x, (x^2 - 4)^2)$, $B(-x, (x^2 - 4)^2)$, $C(-x, 0)$, $D(x, 0)$. Vista la simmetria del problema consideriamo $x > 0$ per cui i limiti geometrici imposti dal problema sono $0 < x < 2$. La base del rettangolo ABCD è $\overline{AB} = 2x$ mentre l'altezza è $\overline{AD} = (x^2 - 4)^2$. L'area del rettangolo è allora

$S(x) = 2x(x^2 - 4)^2$ con $0 < x < 2$. La massimizzazione la effettuiamo mediante derivazione. La derivata prima è $S'(x) = 2(x^2 - 4)^2 + 8x^2(x^2 - 4) = 2(x^2 - 4)(5x^2 - 4)$ per cui

$S'(x) = 2(x^2 - 4)(5x^2 - 4) > 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{2\sqrt{5}}{5}$ mentre $S'(x) = 2(x^2 - 4)(5x^2 - 4) < 0 \Rightarrow \frac{2\sqrt{5}}{5} < x < 2$

per cui la funzione area è strettamente crescente in $\left(0, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ e strettamente decrescente in

$\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, 2\right)$. Inoltre la derivata seconda è $S''(x) = 2[2x(5x^2 - 4) + 10x(x^2 - 4)] = 2(20x^3 - 48x)$ per cui

$S''\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = [2(20x^3 - 48x)]_{x=\frac{2\sqrt{5}}{5}} = -\frac{128\sqrt{5}}{5} < 0$ per cui l'area massima la si ha per $x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ e vale

$$S_{\max} = S\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{1024\sqrt{5}}{125}.$$

Il cilindro dovuto alla rotazione del rettangolo di mezzo giro intorno all'asse delle y ha altezza pari ad $\overline{AD} = (x^2 - 4)^2$ e raggio di base $\overline{OD} = x$, per cui il volume è

$V(x) = \pi \cdot \overline{OD}^2 \cdot \overline{AD} = \pi \cdot x^2 \cdot (x^2 - 4)^2$ con $0 < x < 2$. La massimizzazione la effettuiamo mediante derivazione. La derivata prima è $V'(x) = \pi[2x(x^2 - 4)^2 + 4x^3(x^2 - 4)] = \pi[x(x^2 - 4)(6x^2 - 8)]$ per cui

$$V'(x) = \pi [x(x^2 - 4)(6x^2 - 8)] > 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ mentre}$$

$$V'(x) = \pi [x(x^2 - 4)(6x^2 - 8)] < 0 \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{3} < x < 2 \text{ per cui la funzione volume è strettamente}$$

crescente in $\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ e strettamente decrescente in $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2\right)$. Inoltre dallo studio della derivata

$$\text{seconda } V''(x) = \pi(15x^4 - 48x^2 + 16) \text{ deduciamo } V''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{128}{3}\pi < 0 \text{ per cui il volume}$$

$$\text{massimo lo si ha per } x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ e vale } V_{\max} = V\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{256}{27}\pi.$$

QUESTIONARIO

Quesito 1

Si dimostri che l'equazione:

$$x^{19} + 19x + 11 = 0$$

ha una sola radice compresa fra -1 e 0.

La funzione $f(x) = x^{19} + 19x + 11$ è un polinomio di grado dispari, che ha quindi almeno una soluzione reale. Si può osservare anche che è una funzione continua e derivabile per ogni x reale. Dunque possiamo dimostrare facilmente, attraverso lo studio del segno della derivata prima $f'(x) = 19x^{18} + 19$, che essa è strettamente crescente, e dunque iniettiva, per cui l'equazione data ha un'unica soluzione reale. Si osserva poi che $f(-1) = -9 < 0$, $f(0) = 11 > 0$ per cui per il teorema degli zeri la funzione presenta un unico zero in $(-1, 0)$.

Quesito 2

Si determini il periodo della funzione $y = \cos(7x)$

Una funzione è periodica di periodo T se $f(x) = f(x + kT)$ con $k \in \mathbb{Z}$. Nel caso in esame, ricordando che il coseno è periodico di 2π , deve aversi $\cos(7x) = \cos(7x + 2h\pi) = \cos(7x + 7kT)$ e cioè $7x + 2h\pi = 7x + 7kT$. Per $h = k$ si ricava $T = \frac{2\pi}{7}$.

Quesito 3

Si scrivano le equazioni di almeno due funzioni razionali fratte che hanno un asintoto obliquo.

Le funzioni razionali fratte sono del tipo $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ dove $P(x), Q(x)$ sono due polinomi. Condizione

sufficiente affinché una curva $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ abbia un asintoto obliquo è che il grado di $P(x)$ sia pari al

grado di $Q(x)$ più uno; quindi due funzioni razionali fratte che hanno un asintoto obliquo sono

$$y = \frac{x^2 + 1}{x} \quad \text{e} \quad y = \frac{2x^4 + 3x^3 + 2}{x^3 + 1}. \quad \text{L'asintoto obliquo ha equazione } y = mx + q \quad \text{con}$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right], q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]. \quad \text{Per la funzione } y = \frac{x^2 + 1}{x} \quad \text{l'asintoto obliquo è } y = x \quad \text{mentre}$$

$$\text{per } y = \frac{2x^4 + 3x^3 + 2}{x^3 + 1} \quad \text{è } y = 2x + 3.$$

Quesito 4

Si trovi il valore del parametro k in modo che la curva d'equazione $y = kx^3 - x + 4$ abbia nel punto d'ascissa $x = 1$ la tangente orizzontale.

Una curva ha una tangente orizzontale o in presenza di estremo relativo o di flesso a tangente orizzontale. La derivata prima della famiglia di cubiche è $y' = 3kx^2 - 1$ mentre la derivata seconda è

$$y'' = 6kx. \quad \text{La curva presenta un estremo relativo in } x = 1 \quad \text{se } y'(1) = 3k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{3} \quad \text{e}$$

$$y''(1) = 6k \neq 0 \Rightarrow k \neq 0 \quad \text{e queste due condizioni sono compatibili tra loro. La curva, invece,}$$

$$\text{presenta un flesso a tangente orizzontale in } x = 1 \quad \text{se } y'(1) = 3k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{3} \quad \text{e}$$

$$y''(1) = 6k = 0 \Rightarrow k = 0: \quad \text{poiché queste due condizioni sono in contraddizione tra di loro, si evince che la curva di equazione } y = kx^3 - x + 4 \quad \text{presenterà una tangente orizzontale in presenza di un}$$

$$\text{estremo relativo. Quindi per } k = \frac{1}{3} \quad \text{la cubica } y = \frac{x^3}{3} - x + 4 \quad \text{presenta una tangente orizzontale in}$$

$$\left(1, \frac{10}{3}\right) \quad \text{che è di minimo relativo per la curva stessa.}$$

Quesito 5

Si dia una definizione di poliedro regolare. Si dimostri che i poliedri regolari sono, a meno di similitudini, solo 5 e si dica quali sono.

Un poliedro si dice regolare quando le sue facce sono poligoni regolari congruenti e i suoi angoloidi sono congruenti. Pertanto gli angoli delle facce di ogni suo angoloide devono essere angoli di poligoni regolari e devono essere almeno tre. Inoltre, per un noto teorema di geometria solida, in ogni angoloide la somma degli angoli delle facce è minore strettamente di 360° . Se le facce del poliedro sono triangoli equilateri, l'angolo di ogni faccia è di 60° , quindi si possono avere angoloidi di tre facce (si ottiene il tetraedo), di quattro facce (si ottiene l'ottaedro), di cinque facce (si ottiene l'icosaedro) ma non di più, perché la loro somma sarebbe maggiore o uguale a 360° e ciò è impossibile per il suddetto teorema. Se le facce del poliedro regolare sono quadrati, l'angolo di ogni

faccia è di 90° , quindi si può avere solo l'angoloide di tre facce (si ottiene il cubo). Se le facce del poliedro regolare sono pentagoni regolari, l'angolo di ogni faccia è di 108° , quindi si può avere l'angoloide di tre facce (si ottiene il dodecaedro) ma non di più. Se le facce del poligono regolare sono esagoni regolari, l'angolo di ogni faccia è di 120° quindi non si possono avere poliedri relativi perché la somma degli angoli di tre facce è 360° il che è impossibile. Analogamente non è possibile costruire poliedri regolari aventi per facce poligoni regolari con più di sei lati.

Quesito 6

Quanti sono i numeri di quattro cifre (distinte tra loro) che è possibile scrivere utilizzando le cifre pari, diverse da zero?

Per calcolare quanti numeri di 4 cifre distinte è possibile scrivere utilizzando le sole 4 cifre pari $\{2,4,6,8\}$ bisogna applicare la legge delle disposizioni semplici di n elementi distinti di classe k con

$$k \leq n : D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}. \text{ Nel caso in esame si ha } D_{4,4} = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} = 4! = 24.$$

Quesito 7

Si calcoli:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2}$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per $(1 + \cos 3x)$ si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 3x)(1 + \cos 3x)}{x^2(1 + \cos 3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{x^2(1 + \cos 3x)} = 9 \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right)^2}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1 + \cos 3x)}}_{=\frac{1}{2}} = \frac{9}{2}$$

in cui si è sfruttato il limite notevole $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right) = 1$. Applicando il teorema di de l'Hospital si

$$\text{giunge al medesimo risultato: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{2x} = \frac{9}{2} \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}}_{=1} = \frac{9}{2}.$$

Quesito 8

Si risolva in \mathbb{R} la seguente equazione:

$$e^{2x} + e^x = 2$$

Ponendo $t = e^x$ l'equazione diventa $t^2 + t - 2 = (t+2)(t-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 1 \end{cases}$. L'equazione $e^x = -2$

non ha soluzioni in \mathbb{R} mentre $e^x = 1 \Rightarrow x = 0$. Quindi l'unica soluzione di $e^{2x} + e^x = 2$ è $x = 0$.