

*Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.*

#### PROBLEMA 1

E' assegnata la parabola  $\lambda$  d'equazione  $x^2 - 2y = 0$

1. Si disegni  $\lambda$ . Si determinino il fuoco e la direttrice illustrandone le rispettive proprietà.
2. Siano:  $A(-2, 2)$  e  $B(2, 2)$ . Si calcoli l'area del segmento parabolico  $S$  di base  $AB$ .
3. Si determini la retta  $y = k$  che dimezza l'area di  $S$ .
4. Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione di  $S$  attorno alla retta  $AB$

#### PROBLEMA 2

Sia  $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

1. Si determinino  $a, b, c$  e  $d$  di modo che il grafico  $\Gamma$  di  $p(x)$  abbia nei punti  $F(1, -2)$  e  $M(2, -4)$  rispettivamente il punto di flesso e il punto di minimo.
2. Verificato che è  $p(x) = x^3 - 3x^2$ . Si disegni  $\Gamma$ .
3. Si determini il polinomio  $q(x)$  il cui grafico è simmetrico di  $\Gamma$  rispetto all'asse  $x$ .
4. Si determinino le aree di ciascuna delle due regioni che  $\Gamma$  delimita con la retta per  $F$  parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

#### QUESTIONARIO

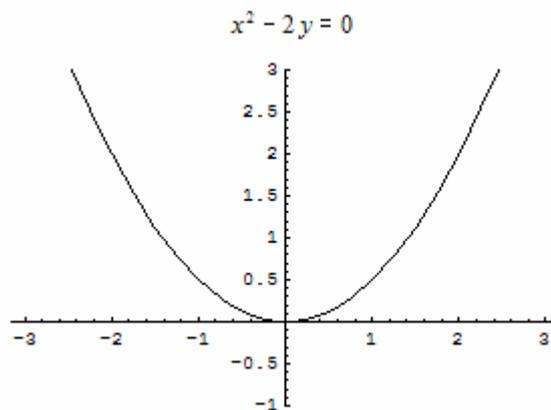
1. Si risolva la seguente equazione:  $\sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x = 3^x$
2. Dopo aver illustrato il significato di funzione inversa si dica, motivando la risposta, se è vero che:  $\arcsin(\sin 2\pi/3) = 2\pi/3$
3. Sia  $t$  una retta e  $P$  un punto non appartenente ad essa. Si dimostri che le circonferenze di assegnato raggio  $r$ , passanti per  $P$  e con centro su  $t$  sono al più due
4. Si determinino  $a$  e  $b$  in modo che il diagramma della funzione  $f(x) = \frac{ax^2+bx}{2x-5}$  abbia come asintoto obliquo la retta di equazione  $y = 3x + 2$ .
5. Una piramide di altezza  $h$  viene secata con un piano  $\alpha$  parallelo al piano  $\beta$  della base in modo da ottenere un tronco di piramide il cui volume è  $7/8$  del volume della piramide. Qual è la distanza tra  $\alpha$  e  $\beta$ ?
6. Si disegni il grafico della funzione:  $y = |\log(x - 1)|$
7. Si determini, motivando la risposta, il periodo della funzione:  $y = \sin(2x + 3)$ .
8. In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani  $Oxy$  si tracci il diagramma del luogo dei punti  $P$  del quarto quadrante che hanno dall'origine una distanza quadrupla di quella che hanno dal punto  $(2, 0)$ .

## **PROBLEMA 1**

### **Punto 1**

La parabola di equazione  $x^2 - 2y = 0$  ha concavità verso l'alto e vertice nell'origine  $(0,0)$  di un sistema di riferimento cartesiano  $Oxy$ . Essa può essere scritta come  $y = ax^2 + bx + c$  con  $a = \frac{1}{2}, b = c = 0$ . Il fuoco ha coordinate  $F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-b^2+4ac}{4a}\right)$  mentre la direttrice ha equazione  $y = -\frac{1+b^2-4ac}{4a}$ . Sostituendo i valori numerici si ha:  $F\left(0, \frac{1}{2}\right)$  e  $y = -\frac{1}{2}$ .

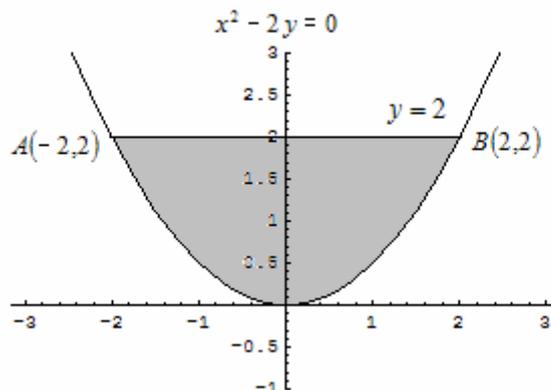
Il grafico di seguito:



La parabola può essere definita come il luogo dei punti equidistanti da una retta (detta *direttrice*) e da un punto (detto *fuoco*) non appartenente alla retta.

### **Punto 2**

I punti A e B si trovano sulla retta di equazione  $y = 2$ . Di seguito l'area da calcolare in grigio:



Possiamo procedere in due modi:

1. Calcolo integrale
2. Principio di Archimede

Mostriamo entrambe le soluzioni.

1. Calcolo integrale

$$S = \int_{-2}^2 \left( 2 - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2 \int_0^2 \left( 2 - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2 \left[ 2x - \frac{x^3}{6} \right]_0^2 = 2 \left( 4 - \frac{4}{3} \right) = \frac{16}{3}$$

della funzione integranda;

2. Principio di Archimede

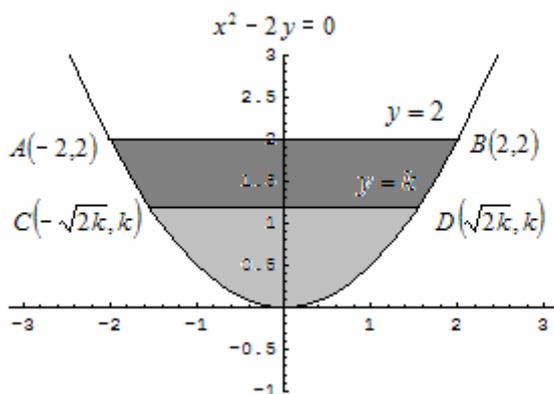
Secondo questo principio, l'area di un segmento parabolico è pari ai  $\frac{2}{3}$  dell'area del rettangolo circoscritto. Il rettangolo circoscritto, di base pari a 4 ed altezza pari a 2, ha area

$$A(R) = 8, \text{ per cui } S = \frac{2}{3} A(R) = \frac{16}{3} \text{ come precedentemente trovato.}$$

**Punto 3**

La retta di equazione  $y = k$  ( $0 < k < 2$ ) interseca la parabola nei punti  $C(-\sqrt{2k}, k), D(\sqrt{2k}, k)$ .

Di seguito la geometria del quesito.



Possiamo procedere in due modi:

1. Calcolo integrale
2. Principio di Archimede

Mostriamo entrambe le soluzioni.

1. Calcolo integrale: calcoliamo l'area in grigio chiaro:

$$S_1 = \int_{-\sqrt{2k}}^{\sqrt{2k}} \left( k - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2 \int_0^{\sqrt{2k}} \left( k - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2 \left[ kx - \frac{x^3}{6} \right]_0^{\sqrt{2k}} = 2 \left( k\sqrt{2k} - \frac{k\sqrt{2k}}{3} \right) = \frac{4k\sqrt{2k}}{3}$$

è sfruttata la parità della funzione integranda; imponendo  $S_1 = \frac{4k\sqrt{2k}}{3} = \frac{S}{2} = \frac{8}{3}$  si ricava

$$k\sqrt{2k} = 2 \Rightarrow \sqrt{2} \cdot k^{\frac{3}{2}} = 2 \Rightarrow k^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow k = \sqrt[3]{2}$$

2. Principio di Archimede: calcoliamo l'area in grigio chiaro tramite il principio sopra

enunciato. In questo caso il rettangolo, di base pari a  $2\sqrt{2k}$  ed altezza pari a  $k$ , ha area

$$A(R) = 2k\sqrt{2k} \text{ per cui } S_1 = \frac{2}{3}A(R) = \frac{4k\sqrt{2k}}{3}; \text{ imponendo } S_1 = \frac{S}{2} \text{ ritroviamo } k = \sqrt[3]{2}$$

come precedentemente trovato. In conclusione la retta che dimezza l'area di  $S$  è

$$y = k = \sqrt[3]{2}.$$

#### **Punto 4**

Consideriamo la trasformazione  $\begin{cases} X = x \\ Y = y - 2 \end{cases}$ , cioè una traslazione di vettore  $\vec{v}(0, -2)$ ; in questo

modo alla retta  $y = 2$  in  $Oxy$  corrisponde  $Y = 0$  in  $OXY$ , e alla parabola  $y = \frac{x^2}{2}$  in  $Oxy$  corrisponde

$$Y = \frac{X^2}{2} - 2 \text{ in } OXY.$$

Il volume richiesto, sfruttando il teorema di Guldino, è pari a:

$$V = \pi \int_{-2}^2 Y^2 dX = 2\pi \int_0^2 \left( \frac{X^4}{4} - 2X^2 + 4 \right) dX = 2\pi \left[ \frac{X^5}{20} - \frac{2X^3}{3} + 4X \right]_0^2 = 2\pi \left( \frac{8}{5} - \frac{16}{3} + 8 \right) = \frac{128\pi}{15} \text{ in cui}$$

si è sfruttata la parità della funzione integranda.

### **PROBLEMA 2**

#### **Punto 1**

Le derivate prima e seconda della cubica sono:  $p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ ,  $p''(x) = 6ax + 2b$

1. Il passaggio per  $F(1, -2)$  comporta la condizione  $a + b + c + d = -2$ ;
2. Il passaggio per  $M(2, -4)$  comporta la condizione  $8a + 4b + 2c + d = -4$ ;
3. Il punto  $F(1, -2)$  è di flesso se  $p''(1) = 0 \Rightarrow b = -3a$ ;
4. Il punto  $M(2, -4)$  è di minimo se  $p'(2) = 0 \Rightarrow 12a + 4b + c = 0$ ;

Si ha il seguente sistema di 4 equazioni in 4 incognite:

$$\begin{cases} a + b + c + d = -2 \\ 8a + 4b + 2c + d = -4 \\ b = -3a \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases}.$$

Sostituendo la terza condizione nella quarta si ricava  $c = 0$ , per cui il sistema si riduce da 4 a 3

incognite e diventa: 
$$\begin{cases} a+b+c+d = -2 \\ 8a+4b+2c+d = -4 \\ b = -3a \\ c = 0 \end{cases} \xrightarrow{\substack{b=-3a, \\ c=0}} \begin{cases} -2a+d = -2 \\ -4a+d = -4 \\ b = -3a \\ c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$
 per cui la cubica ha

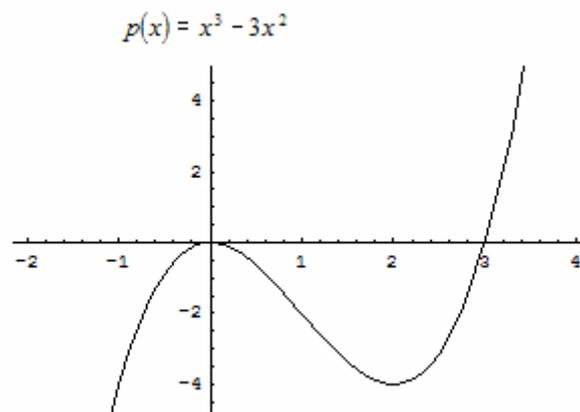
equazione  $p(x) = x^3 - 3x^2$ .

## Punto 2

Studiamo la cubica  $p(x) = x^3 - 3x^2$

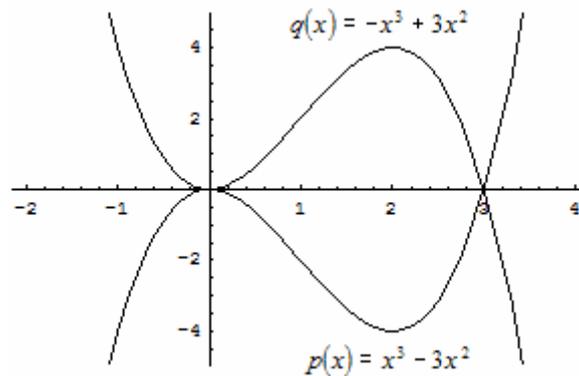
- *Dominio*:  $\mathbb{R}$ ;
- *Intersezione asse ascisse*:  $p(x) = x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 3$ ;
- *Intersezione asse ordinate*:  $x = 0 \Rightarrow p(0) = 0$ ;
- *Eventuali simmetrie*: la funzione non è né pari né dispari;
- *Positività*:  $p(x) = x^3 - 3x^2 = x^2(x-3) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 > 0 \\ (x-3) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{R} - \{0\} \\ x > 3 \end{cases} \Rightarrow x \in (3, +\infty)$ ;
- *Asintoti*: non vi sono asintoti, né verticali né orizzontali né obliqui;
- *Comportamento agli estremi del dominio*:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 - 3x^2) = \pm\infty$ ;
- *Crescenza e decrescenza*:  $p'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$  per cui la funzione è strettamente crescente in  $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$  e strettamente decrescente in  $(0, 2)$ ; quindi essa ammette un massimo relativo in  $(0, 0)$  ed un minimo relativo in  $(2, -4)$  come indicato nella traccia stessa;
- *Concavità e convessità*:  $p''(x) = 6x - 6$  per cui la funzione ha concavità verso l'alto in  $(1, +\infty)$  e concavità verso il basso in  $(-\infty, 1)$ ; il punto  $(1, -2)$  è un flesso a tangente obliqua di equazione  $y = -3x + 1$ .

Il grafico di seguito:



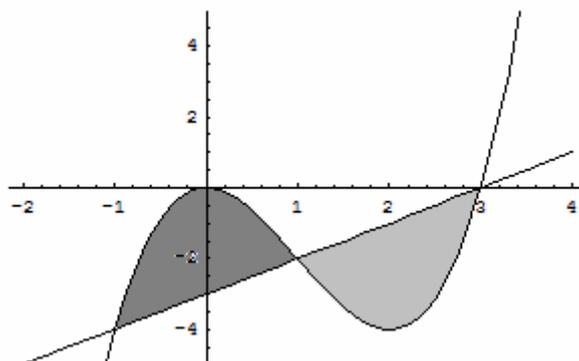
### Punto 3

Per determinare il polinomio  $q(x)$  simmetrico rispetto all'asse delle ascisse, basta notare che  $q(x) = -p(x)$  e cioè  $q(x) = -x^3 + 3x^2$ . Di seguito i grafici nel medesimo sistema di riferimento cartesiano.



### Punto 4

La retta per  $F(1,-2)$  parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante ha equazione  $y = x - 3$ . Le aree da calcolare sono di seguito presentate in grigio chiaro e scuro:



Le intersezioni della retta  $y = x - 3$  con la cubica  $p(x) = x^3 - 3x^2$  si ricavano risolvendo

$$\text{l'equazione } x^3 - 3x^2 = x - 3 \Rightarrow (x-3)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \rightarrow y_1 = -4 \\ x_2 = 1 \rightarrow y_2 = -2 \\ x_3 = 3 \rightarrow y_3 = 0 \end{cases} .$$

L'area in grigio chiaro è pari allora a:

$$S_1 = \int_1^3 [(x-3) - (x^3 - 3x^2)] dx = \left[ -\frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} - 3x \right]_1^3 =$$
$$= \left[ \left( -\frac{81}{4} + 27 + \frac{9}{2} - 9 \right) - \left( -\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{2} - 3 \right) \right] = \left( \frac{9}{4} + \frac{7}{4} \right) = 4$$

mentre l' area in grigio scuro è pari a

$$S_2 = \int_{-1}^1 [(x^3 - 3x^2) - (x-3)] dx = \left[ \frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-1}^1 =$$
$$= \left[ \left( \frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3 \right) - \left( \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} - 3 \right) \right] = \left( \frac{9}{4} + \frac{7}{4} \right) = 4$$

Notiamo che le due aree sono uguali e c'era da aspettarselo visto che la retta  $y = x - 3$  passa per il punto di flesso che è centro di simmetria per la cubica; in tal modo le due regioni sono simmetriche ed hanno quindi stessa area.

## QUESTIONARIO

### Quesito 1

Notiamo che  $\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1$  in cui abbiamo sfruttato l'identità trigonometrica fondamentale  $(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1$ . L'equazione quindi diventa  $3^x = 1$  da cui ricaviamo  $x = 0$ .

### Quesito 2

Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  si dice invertibile se esiste  $g : Y \rightarrow X$  tale che  $g(f(x)) = x \ \forall x \in X$  e  $f(g(y)) = y \ \forall y \in Y$ . Se esiste  $g : Y \rightarrow X$  si indica con  $f^{-1}$  ed è detta funzione inversa di  $f$ .

La funzione  $f(x) = \sin x$  ristretta all'intervallo  $\left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$  è iniettiva e quindi ha un'inversa

chiamata arcoseno, cioè:  $x = \arcsin y \Leftrightarrow y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, -1 \leq y \leq 1$ . Da ciò deduciamo che

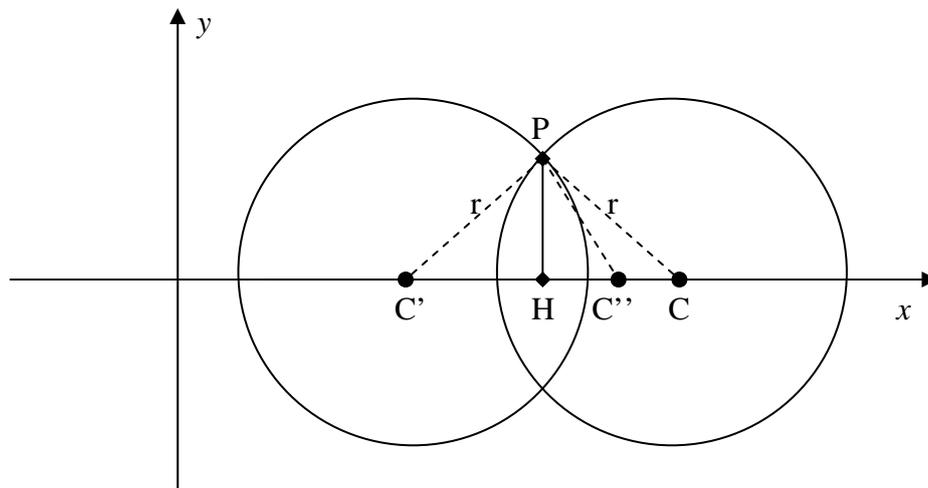
la relazione  $\arcsin\left(\sin \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$  non è vera in quanto  $\frac{2\pi}{3} \notin \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ . Infatti si ha:

$$\arcsin\left(\sin \frac{2\pi}{3}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

### Quesito 3

Consideriamo la figura seguente in cui il punto  $P(x, y)$  appartiene ad un sistema di riferimento cartesiano  $Oxy$  e la retta  $t$  per semplicità coincide, senza ledere la generalità del problema, con l'asse delle ascisse. Indichiamo con  $C(a, 0), C'(b, 0)$ , con  $a > b > 0$  per semplicità, i centri delle due

circonferenze passanti per  $P(x, y)$  e raggio  $r$ .



I raggi delle due circonferenze misurano rispettivamente:

$$\overline{PC} = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

$$\overline{PC'} = \sqrt{(x-b)^2 + y^2}$$

e dovendo essere entrambi pari ad  $r$ , uguagliandoli ed elevando al quadrato ambo i membri, ricaviamo:

$$(x-a)^2 + y^2 = (x-b)^2 + y^2 \rightarrow -2ax + a^2 = -2bx + b^2 \rightarrow 2x(a-b) = a^2 - b^2 \rightarrow x = \frac{a+b}{2}, \quad \text{cioè}$$

l'ascissa del punto  $P$  è la media aritmetica delle ascisse dei due centri; in altri termini i due centri sono simmetrici rispetto alla retta di equazione  $x = \frac{a+b}{2}$  che è asse di simmetria della retta  $t$ . In generale, quindi, i centri delle due circonferenze saranno simmetrici rispetto all'asse di simmetria della retta  $t$ .

Dopo aver determinato come sono posizionati i due centri delle due circonferenze passanti per  $P(x, y)$  e raggio  $r$ , mostriamo che le circonferenze non possono essere più di due. Supponiamo per assurdo che esiste un'altra circonferenza di centro  $C''(c,0)$  con raggio  $\overline{PC''} = r$ . Deve aversi:

$$\begin{cases} \overline{PC} = \overline{PC''} \\ \overline{PC'} = \overline{PC''} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ \sqrt{(x-b)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-a)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \\ (x-b)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a+c}{2} \\ x = \frac{b+c}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow C \equiv C'$$

cioè i due centri  $C(a,0), C'(b,0)$  collassano in un unico centro, per cui le circonferenze con centri

sulla retta  $t$ , passanti per  $P(x, y)$  e raggio  $r$  non possono essere più di due.

La dimostrazione che le circonferenze possono essere al più due, può essere condotta anche per via elementare. Se esistesse, per assurdo, una terza circonferenza di centro  $C''(c,0)$ , essa dovrebbe avere raggio  $\overline{PC''} = \overline{PC'} = \overline{PC}$ ; ciò non è possibile in quanto  $\overline{PC''}$  è ipotenusa del triangolo rettangolo  $PHC''$  che ha solo il cateto  $\overline{PH}$  uguale a quello degli altri due triangoli rettangoli  $PHC$  e  $PHC'$  di ipotenuse  $\overline{PC} = \overline{PC'}$  mentre l'altro per costruzione è differente,  $\overline{HC''} \neq \overline{HC} = \overline{HC'}$ . Quindi le circonferenze con centri sulla retta  $t$ , passanti per  $P(x, y)$  e raggio  $r$  possono essere al massimo due.

#### Quesito 4

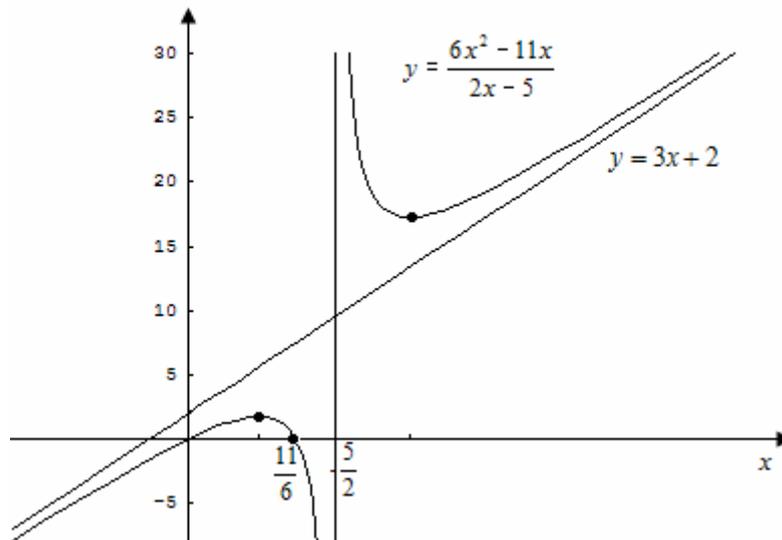
La funzione razionale fratta di equazione  $y = \frac{ax^2 + bx}{2x - 5}$  per  $b = -\frac{5}{2}a$  degenera nella retta di equazione  $y = \frac{ax}{2}$ ; quindi, posto  $b \neq -\frac{5}{2}a$ , essa presenta come asintoto obliquo la retta  $y = mx + q$  con

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ \frac{f(x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{ax^2 + bx}{2x^2 - 5x} \right) = \frac{a}{2},$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ \frac{ax^2 + bx}{2x - 5} - \frac{ax}{2} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ \frac{x(5a + 2b)}{4x - 10} \right] = \frac{(5a + 2b)}{4}$$

La retta  $y = mx + q$  coincide con  $y = 3x + 2$  se 
$$\begin{cases} \frac{a}{2} = 3 \\ \frac{(5a + 2b)}{4} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -11 \end{cases}.$$

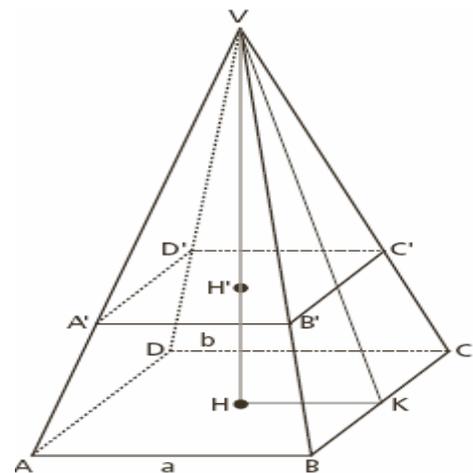
In conclusione la curva con asintoto obliquo  $y = 3x + 2$  è  $y = \frac{6x^2 - 11x}{2x - 5}$ . Di seguito il grafico.



### Quesito 5

Consideriamo la figura sottostante raffigurante una piramide, supposta retta, a base quadrata di lato  $\overline{AB} = a$  ed altezza  $\overline{VH} = h$ :

Il poligono  $A'B'C'D'$ , ottenuto sezionando la piramide retta  $ABCDV$  con un piano parallelo alla base, è simile al quadrato di base  $ABCD$  ed è quindi anch'esso un quadrato di lato  $\overline{A'B'} = b < a$ . Si indica con  $H'$  il punto in cui l'altezza  $VH$  incontra la sezione  $A'B'C'D'$ . Per un teorema di geometria euclidea nello spazio è noto che, se si seziona una piramide con un piano parallelo alla base, la sezione e la base sono poligoni simili e i lati di questi poligoni sono proporzionali alle distanze del loro piano dal vertice  $V$ . Dal parallelismo delle due basi discende che  $\overline{VH'} = h'$  con  $0 < h' < h$  è altezza



della piramide  $A'B'C'D'V$  e che l'altezza del tronco di piramide è  $\overline{HH'} = (h - h')$ .

Quindi si ha:  $h':h = b:a \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{h}{h'}$ . Il volume della piramide  $ABCDV$  è  $V(ABCDV) = \frac{1}{3}a^2h$

mentre il volume del tronco di piramide di base  $ABCD$  ed altezza  $\overline{HH'} = (h - h')$  è

$V_{tronco} = \frac{1}{3}(h - h')(a^2 + b^2 + ab)$ , per cui il rapporto tra i volumi è

$$R = \frac{V_{\text{tronco}}}{V(ABCDV)} = \left(\frac{h-h'}{h}\right) \left[ \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right) + 1 \right] \xrightarrow{\frac{b}{a} = \frac{h'}{h}}$$

$$R = \left(\frac{h-h'}{h}\right) \left[ \left(\frac{h'}{h}\right)^2 + \left(\frac{h'}{h}\right) + 1 \right] = \frac{(h-h')(h'^2 + hh' + h^2)}{h^3} = \frac{h^3 - h'^3}{h^3}$$

Imponendo  $R = \frac{7}{8}$  ricaviamo  $\frac{h^3 - h'^3}{h^3} = \frac{7}{8} \rightarrow h'^3 = \frac{h^3}{8} \Rightarrow h' = \frac{h}{2}$ ; quindi  $\overline{HH'} = \left(h - \frac{h}{2}\right) = \frac{h}{2}$  cioè la

distanza tra i piani  $\alpha$  e  $\beta$  è  $\frac{h}{2}$ .

Alternativamente se il volume del tronco è  $\frac{7}{8}$  del volume della piramide ABCDV, allora il volume

della piramide A'B'C'D'V è  $\frac{1}{8}$  del volume della piramide ABCDV e

cioè:  $\frac{V(A'B'C'D'V)}{V(ABCDV)} = \frac{\frac{1}{3}b^2h'}{\frac{1}{3}a^2h} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \left(\frac{h'}{h}\right) \xrightarrow{\frac{b}{a} = \frac{h'}{h}} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \left(\frac{h'}{h}\right) = \left(\frac{h'}{h}\right)^3$  ed imponendo

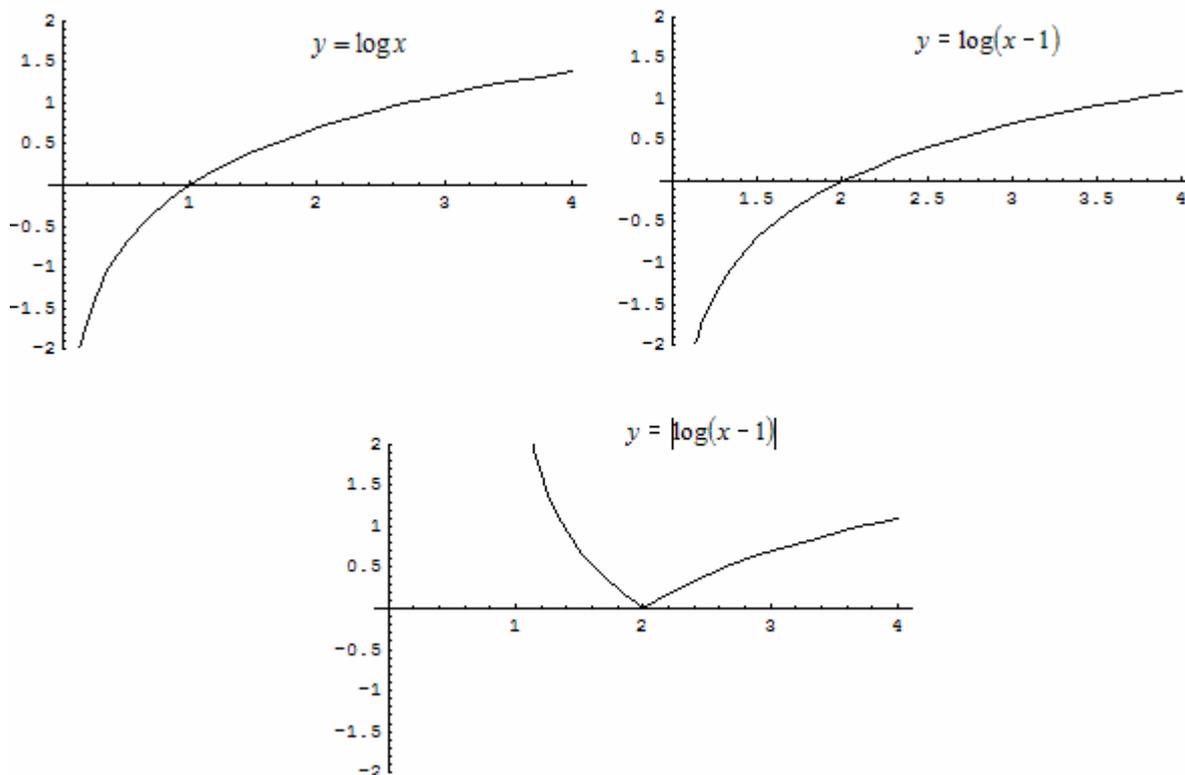
$$\frac{V(A'B'C'D'V)}{V(ABCDV)} = \left(\frac{h'}{h}\right)^3 = \frac{1}{8} \text{ si ha } \frac{h'}{h} = \frac{1}{2} \Rightarrow h' = \frac{h}{2} \text{ da cui } \overline{HH'} = \left(h - \frac{h}{2}\right) = \frac{h}{2}.$$

### Quesito 6

Il grafico di  $y = |\log(x-1)|$  si ricava a partire dal grafico della funzione elementare  $y = \log x$  attraverso i seguenti passi:

1. Si traccia il grafico di  $y = \log x$ ;
2. Si effettua la traslazione lungo l'asse delle ascisse positive di un fattore 1 del grafico ottenuto al punto 1, ottenendo il grafico di  $y = \log(x-1)$ ;
3. Si prende il valore assoluto  $y = |\log(x-1)|$  del grafico ottenuto al punto 2, ribaltando le parti di grafico al di sotto l'asse delle ascisse verso le ordinate positive e lasciando inalterate le parti grafico già al di sopra dell'asse delle ascisse.

Di seguito i tre grafici:



### Quesito 7

Una funzione è periodica di periodo  $T$  se  $f(x) = f(x + kT)$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . Nel caso in esame, ricordando che il seno è periodico di  $2\pi$ , deve aversi  $\sin(2x + 3) = \sin(2x + 3 + 2h\pi) = \sin[2(x + kT) + 3] = \sin(2x + 3 + 2kT)$  e cioè  $2x + 3 + 2h\pi = 2x + 3 + 2kT$ . Per  $h = k$  si ricava  $T = \pi$ .

Alternativamente senza sfruttare la definizione di funzione periodica, osserviamo che la funzione  $f(x) = \sin(2x + 3)$  si può ottenere dalla funzione elementare  $y = \sin x$  mediante una decimazione rispetto all'asse delle ascisse (asse  $x$ ) di fattore  $N = 2$  e successiva traslazione lungo l'asse delle ascisse negative di un fattore 3. Ricordando che la traslazione non influenza il periodo a differenza della decimazione, poiché il periodo di  $y = \sin x$  è  $2\pi$ , deduciamo che il periodo di

$$f(x) = \sin(2x + 3) \text{ è } T = \frac{2\pi}{N} = \pi.$$

### Quesito 8

Consideriamo  $P(x, y)$  con  $x > 0, y < 0$  un generico punto del quarto quadrante di un sistema di riferimento cartesiano. Si deve trovare il luogo generato da  $P(x, y)$  in modo che  $\overline{PO} = 4 \cdot \overline{PQ}$  dove  $Q(2, 0)$ ; la condizione  $\overline{PO} = 4 \cdot \overline{PQ}$  è equivalente a  $\overline{PO}^2 = 16 \cdot \overline{PQ}^2$  dove:

$$\overline{PO}^2 = x^2 + y^2$$

$$\overline{PQ}^2 = (x-2)^2 + y^2$$

Imponendo  $\overline{PO}^2 = 16 \cdot \overline{PQ}^2$  si ricava

$$x^2 + y^2 = 16[(x-2)^2 + y^2] \Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{64}{15}x + \frac{64}{15} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{32}{15}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{8}{15}\right)^2; \text{ il luogo è quindi}$$

una semicirconfenza di centro  $C = \left(\frac{32}{15}, 0\right)$  e raggio  $R = \frac{8}{15}$ . Di seguito il grafico del luogo:

