

## ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Indirizzo M: ordinamento + liceo della comunicazione

## CORSO DI ORDINAMENTO

Sessione suppletiva 2009

Tema di MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

**PROBLEMA 1**

I due segmenti adiacenti OA, AB sono uguali ed hanno una lunghezza data  $a$ . Nel medesimo semipiano rispetto alla retta OB si descrivano due semicirconferenze di diametri rispettivi OA ed OB, e per il punto O si conduca la semiretta tangente comune, sulla quale si prenda il segmento OC  $= a$ . Con origine O, si conduca una semiretta, che forma con OB un angolo  $\alpha$  e interseca in P e Q le semicirconferenze.

1. Si calcoli il rapporto:

$$(1) \quad \frac{\overline{CP}^2 + \overline{PQ}^2 + \overline{QC}^2}{2a^2}$$

e lo si esprima in funzione di  $x = \tan(\alpha)$ , controllando che risulta:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 1}$$

2. Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione  $f(x)$  e se ne tracci il grafico  $\gamma$ .

3. Si dica per quale valore di  $\alpha$  si hanno rispettivamente il massimo e il minimo del rapporto (1).

4. Si determini l'area della superficie piana, finita, delimitata dall'asse delle ordinate, dalla curva  $\gamma$  e dal suo asintoto.

**PROBLEMA 2**

Sia data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x(2 - \ln x) & \text{per } x > 0 \\ 0, & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

1. Questa funzione è continua nel punto di ascissa 0? E' derivabile in tale punto?

2. Si studi la funzione  $f(x)$  e se ne tracci il grafico  $\gamma$ , su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

3. Si calcoli l'espressione, in funzione di  $t$  ( $t > 0$ ), dell'integrale

$$I(t) = \int_t^{e^2} x(2 - \ln x) dx$$

4. Si faccia vedere che  $I(t)$  tende verso un limite finito quando  $t$  tende a 0. Cosa rappresenta questo limite nel grafico precedente?

**QUESTIONARIO**

1. Una piramide, avente area di base  $B$  e altezza  $h$ , viene secata con un piano parallelo alla base. Si calcoli a quale distanza dal vertice si deve condurre tale piano, affinché il prisma che ha per basi la sezione di cui sopra e la sua proiezione ortogonale sul piano di base della piramide abbia volume massimo.

2. Si calcoli il limite della funzione  $\frac{\ln^2 x + x - 1}{x^2 - x + \sin^2(x-1)}$  quando  $x$  tende a 1.

3. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse  $x$  della porzione di piano limitata dalla curva  $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ , dall'asse  $x$  e dalle rette  $x = 1, x = \sqrt{3}$ .

4. Dato un triangolo rettangolo inscritto in un semicerchio, se sui suoi cateti presi come diametri ed esternamente si costruiscono due semicerchi, da questi e dal dato semicerchio sono determinati due menischi, detti lunule d'Ippocrate. Si dimostri che la loro somma ha la stessa area del triangolo.

5. Si determini il luogo  $\gamma$  dei punti di intersezione delle due rette di equazioni:

$$\lambda x - y - (\lambda + 2) = 0,$$

$$(1 - \lambda)x + y + 2 = 0,$$

descritto al variare di  $\lambda$ , parametro reale qualunque. Si disegni la curva  $\gamma$ .

6. Sono dati un angolo  $\alpha$  di  $\pi^2$  radianti e un angolo  $\beta$  di 539 gradi. Si verifichi che sono entrambi maggiori di un angolo giro e minori di due angoli giro. Si dica quale dei due è il maggiore. Si dica inoltre se è più grande il seno di  $\alpha$  o il seno di  $\beta$ .

7. Il comandante di una nave decide di raggiungere il porto B partendo dal punto A e seguendo un percorso rettilineo. A causa di un errore, però, la nave inizia la sua navigazione lungo una rotta leggermente diversa da quella prevista. Dopo 5 ore ci si accorge dello sbaglio e il comandante ordina di virare di un angolo di  $23^\circ$  in modo da dirigere ora esattamente verso il porto B, che viene raggiunto dopo 3 ore. Se l'imbarcazione ha mantenuto sempre una velocità costante, quanto tempo si è perso a causa dell'errore?

8. Data la parabola  $x = -ay^2 + 3y$  (con  $a > 0$ ), si determini per quale valore di  $a$  l'area della parte finita di piano compresa tra il suo grafico e l'asse  $y$  è uguale a 72.

9. Si dimostri che un numero di quattro cifre tutte uguali è divisibile per 101.

10. Si enunci il teorema di Rolle e si mostri, con opportuni esempi, che se una qualsiasi delle tre condizioni previste non è soddisfatta, il teorema non è valido.

---

Durata massima della prova: 6 ore.

E' consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.

### PROBLEMA 1

I due segmenti adiacenti OA, AB sono uguali ed hanno una lunghezza data  $a$ . Nel medesimo semipiano rispetto alla retta OB si descrivano due semicirconferenze di diametri rispettivi OA ed OB, e per il punto O si conduca la semiretta tangente comune, sulla quale si prenda il segmento OC =  $a$ . Con origine O, si conduca una semiretta, che forma con OB un angolo  $\alpha$  e interseca in P e Q le semicirconferenze.

*Punto 1*

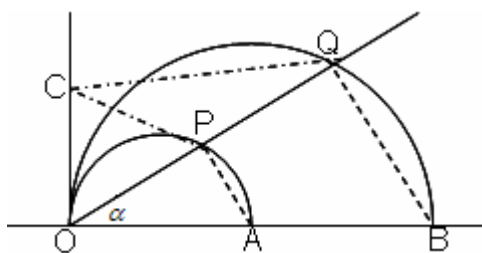
Si calcoli il rapporto:

$$(1) \quad \frac{\overline{CP}^2 + \overline{PQ}^2 + \overline{QC}^2}{2a^2}$$

e lo si esprima in funzione di  $x = \tan(\alpha)$ , controllando che risulta:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 1}$$

Si consideri la figura seguente:



Posto  $\widehat{POA} = \alpha$  con  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ , applicando il teorema dei triangoli rettangoli ai triangoli OPA e OQB si ha  $\overline{OP} = a \cos(\alpha)$ ,  $\overline{OQ} = 2a \cos(\alpha)$ ,  $\overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP} = a \cos(\alpha)$ . Applicando il teorema di Carnot ai triangoli OCP e OCQ si ha:

$$\begin{aligned} \overline{CP}^2 &= \overline{OC}^2 + \overline{OP}^2 - 2 \cdot \overline{OC} \cdot \overline{OP} \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = \\ &= a^2 + a^2 \cos^2(\alpha) - 2 \cdot a \cdot a \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) = a^2 [1 + \cos^2(\alpha) - \sin(2\alpha)] \\ \overline{QC}^2 &= \overline{OC}^2 + \overline{OQ}^2 - 2 \cdot \overline{OC} \cdot \overline{OQ} \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = \\ &= a^2 + 4a^2 \cos^2(\alpha) - 2 \cdot a \cdot 2a \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) = a^2 [1 + 4\cos^2(\alpha) - 2\sin(2\alpha)] \end{aligned}$$

Allora si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{CP}^2 + \overline{PQ}^2 + \overline{QC}^2}{2a^2} &= \frac{a^2 [1 + \cos^2(\alpha) - \sin(2\alpha)] + a^2 \cos^2(\alpha) + a^2 [1 + 4\cos^2(\alpha) - 2\sin(2\alpha)]}{2a^2} = \\ &= \frac{[6\cos^2(\alpha) - 3\sin(2\alpha) + 2]}{2} \end{aligned}$$

Ricordiamo che  $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{1 + \tan^2(\alpha)}$ ,  $\sin(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)}$  per cui

$$\frac{\overline{CP}^2 + \overline{PQ}^2 + \overline{QC}^2}{2a^2} = \frac{[6\cos^2(\alpha) - 3\sin(2\alpha) + 2]}{2} = \frac{\left[\frac{6}{1+\tan^2(\alpha)} - \frac{6\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} + 2\right]}{2} =$$

$$= \frac{2\tan^2(\alpha) - 6\tan(\alpha) + 8}{2(1+\tan^2(\alpha))} = \frac{\tan^2(\alpha) - 3\tan(\alpha) + 4}{(1+\tan^2(\alpha))}$$

Per  $x = \tan(\alpha)$  si ha  $f(x) = \frac{\overline{CP}^2 + \overline{PQ}^2 + \overline{QC}^2}{2a^2} = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 1}$ .

### Punto 2

**Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione  $f(x)$  e se ne tracci il grafico  $\gamma$ .**

Studiamo la funzione  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 1}$

*Dominio:*  $\mathbb{R}$

*Intersezione asse delle ascisse:* la funzione  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 1}$  non interseca mai l'asse delle ascisse in quanto il numeratore è un fattore sempre positivo;

*Intersezione asse delle ordinate:*  $x = 0 \rightarrow y = 4$

*Positività:* la funzione  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 1}$  è positiva in tutto il dominio  $\mathbb{R}$

*Asintoti verticali:* non esistono visto il dominio della funzione

*Asintoti orizzontale:*  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 1} = 1$  per cui  $y = 1$  è asintoto orizzontale destro e sinistro;

*Asintoti obliqui:* non esistono in quanto esiste l'asintoto orizzontale e per funzioni razionali fratte la presenza dell'asintoto orizzontale esclude la presenza di quello obliquo e viceversa;

*Crescenza e decrescenza:*  $f'(x) = \frac{3(x^2 - 2x - 1)}{(x^2 + 1)^2}$  per cui la funzione è strettamente crescente in

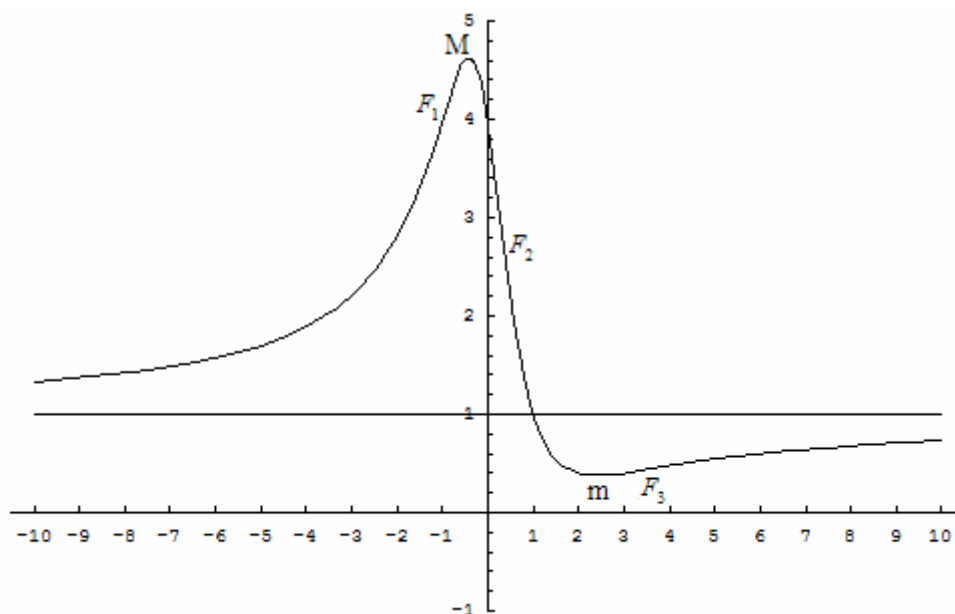
$(-\infty, 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}, +\infty)$ , strettamente decrescente in  $(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$  e si annulla in

$x = 1 + \sqrt{2}, x = 1 - \sqrt{2}$ . Quindi  $M = \left(1 - \sqrt{2}, \frac{5 + 3\sqrt{2}}{2}\right)$  è un massimo relativo e

$m = \left(1 + \sqrt{2}, \frac{5 - 3\sqrt{2}}{2}\right)$  è un minimo relativo.

*Flessi:*  $f''(x) = -\frac{6(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3}$  per cui in  $(-\infty, -1) \cup (2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$  la funzione volge la concavità verso l'alto e in  $(-1, 2-\sqrt{3}) \cup (2+\sqrt{3}, +\infty)$  verso il basso per cui  $F_1 = (-1, 4)$ ,  $F_2 = \left(2-\sqrt{3}, \frac{7+3\sqrt{3}}{4}\right)$ ,  $F_3 = \left(2+\sqrt{3}, \frac{7-3\sqrt{3}}{4}\right)$  sono flessi a tangente obliqua.

Il grafico è sotto presentato:



### Punto 3

**Si dica per quale valore di  $\alpha$  si hanno rispettivamente il massimo e il minimo del rapporto (1).**

Il valore massimo lo si ha per  $x = \tan(\alpha) = 1 - \sqrt{2}$  da cui  $\alpha = \arctan(1 - \sqrt{2}) = \frac{7\pi}{8} = 157,5^\circ$  mentre

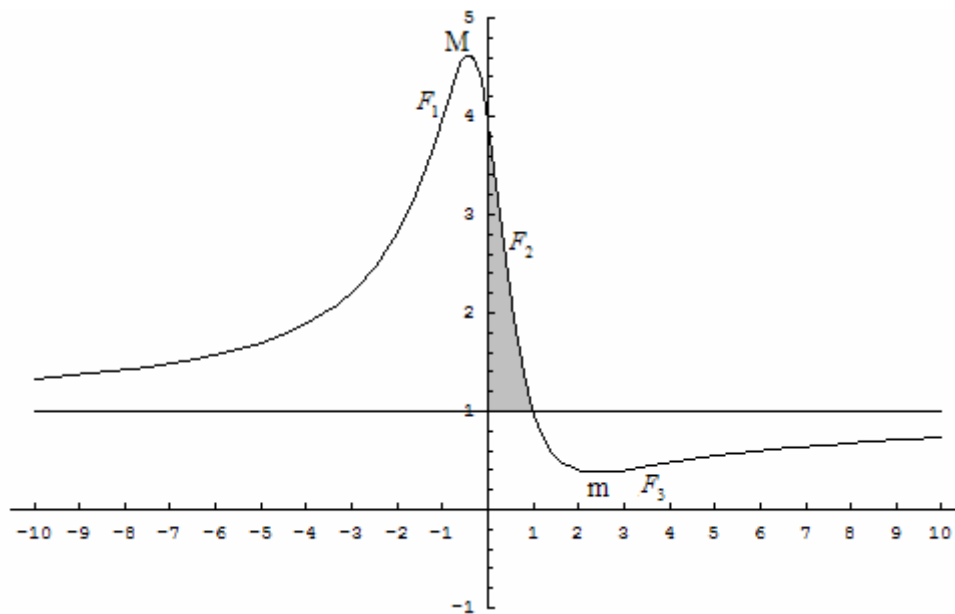
il valore minimo lo si ha per  $x = \tan(\alpha) = 1 + \sqrt{2}$  da cui  $\alpha = \arctan(1 + \sqrt{2}) = \frac{3\pi}{8} = 67,5^\circ$

### Punto 4

**Si determini l'area della superficie piana, finita, delimitata dall'asse delle ordinate, dalla curva  $\gamma$  e dal suo asintoto.**

La curva  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 1}$  interseca il suo asintoto di equazione  $y = 1$  nel punto ad ascissa  $x = 1$ .

L'area da calcolare è in grigio nella figura seguente:



Tale area vale:

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^1 \left[ \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 1} - 1 \right] dx = \int_0^1 \left[ \frac{3 - 3x}{x^2 + 1} \right] dx = \int_0^1 \left[ \frac{3}{x^2 + 1} - \frac{3}{2} \frac{2x}{x^2 + 1} \right] dx = \\
 &= \left[ 3 \arctan(x) - \frac{3}{2} \ln(x^2 + 1) \right]_0^1 = \frac{3\pi}{4} - \frac{3 \ln 2}{2} = \frac{3(\pi - 2 \ln 2)}{4}
 \end{aligned}$$

## PROBLEMA 2

**Sia data la funzione:**

$$f(x) = \begin{cases} x(2 - \ln x) & \text{per } x > 0 \\ 0, & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

### Punto 1

**Questa funzione è continua nel punto di ascissa 0 ?**

**E' derivabile in tale punto ?**

Studiamo la continuità della funzione  $f(x) = \begin{cases} x(2 - \ln x) & \text{per } x > 0 \\ 0, & \text{per } x = 0 \end{cases}$ . Calcoliamo il limite per  $x \rightarrow 0^+$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(2 - \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x - \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 - \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ f.i. } \xrightarrow{\text{De l'Hospital}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(2 - \ln x) = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

Quindi la funzione  $f(x) = \begin{cases} x(2 - \ln x) & \text{per } x > 0 \\ 0, & \text{per } x = 0 \end{cases}$  è continua in  $x = 0$ .

Studiamo la derivabilità: la derivata prima della funzione per  $x > 0$  è  $f'(x) = 1 - \ln(x)$  per cui

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [1 - \ln(x)] = +\infty \text{ da cui deduciamo che la funzione } f(x) = \begin{cases} x(2 - \ln x) & \text{per } x > 0 \\ 0, & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

non è derivabile in  $x = 0$ .

### Punto 2

**Si studi la funzione  $f(x)$  e se ne tracci il grafico  $\gamma$ , su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).**

Studiamo la funzione  $f(x) = \begin{cases} x(2 - \ln x) & \text{per } x > 0 \\ 0, & \text{per } x = 0 \end{cases}$  ed in particolare  $g(x) = x(2 - \ln x)$  definita

per  $x > 0$ .

*Dominio:*  $x > 0$

$$\text{Intersezione asse delle ascisse: } g(x) = x(2 - \ln x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2 - \ln x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = e^2 \end{cases};$$

*Intersezione asse delle ordinate:* la funzione è prolungabile per continuità in  $x = 0$  per cui  $x = 0 \rightarrow y = 0$ ;

*Positività:* la funzione  $g(x) = x(2 - \ln x) > 0 \Rightarrow 0 < x < e^2$  ;

*Asintoti verticali:* non esistono in quanto  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(2 - \ln x) = 0$  come dimostrato al punto 1;

*Asintoti orizzontale:*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$  per cui non esistono asintoti orizzontali;

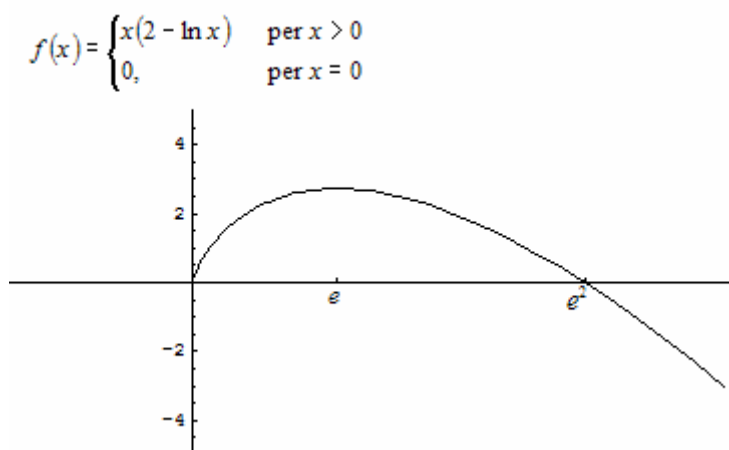
*Asintoti obliqui:* non esistono in quanto  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - \ln x) = -\infty$  ;

*Crescenza e decrescenza:*  $g'(x) = 1 - \ln x$  per cui la funzione è strettamente crescente in  $(0, e)$ , strettamente decrescente in  $(e, +\infty)$  e si annulla in  $x = e$ .

*Flessi:*  $g''(x) = -\frac{1}{x}$  per cui in tutto il dominio la funzione volge la concavità verso il basso. Inoltre

$g''(e) = -\frac{1}{e} < 0$  per cui  $M = (e, e)$  è un massimo relativo ed assoluto.

Il grafico è sotto presentato:



### Punto 3

Si calcoli l'espressione, in funzione di  $t$  ( $t > 0$ ), dell'integrale

$$I(t) = \int_t^{e^2} x(2 - \ln x) dx$$

Calcoliamo l'integrale  $I(t) = \int_t^{e^2} x(2 - \ln x) dx$  integrando per parti. Si ha:

$$\int x(2 - \ln x) dx = \int 2x dx - \int x \ln x dx = x^2 - \frac{x^2}{2} \ln x + \int \frac{x}{2} dx = x^2 - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4} (5 - 2 \ln x)$$

$$\text{per cui } I(t) = \int_t^{e^2} x(2 - \ln x) dx = \left[ \frac{x^2}{4} (5 - 2 \ln x) \right]_t^{e^2} = \frac{e^4}{4} (5 - 4) - \frac{t^2}{4} (5 - 2 \ln t) = \frac{e^4}{4} - \frac{t^2}{4} (5 - 2 \ln t).$$

### Punto 4



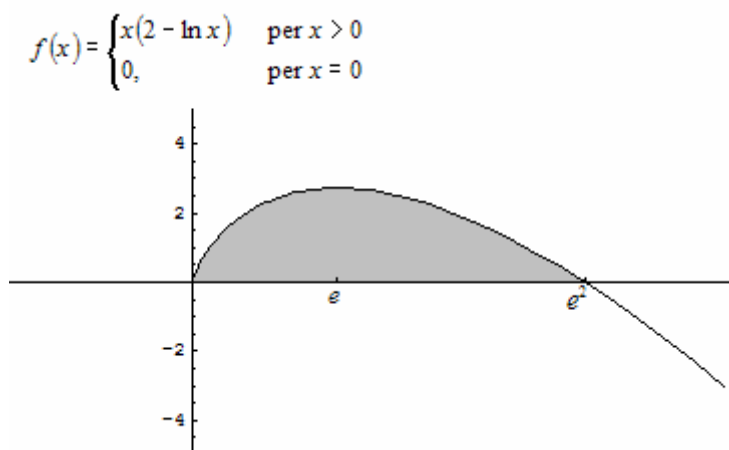
**Si faccia vedere che  $I(t)$  tende verso un limite finito quando  $t$  tende a 0. Cosa rappresenta questo limite nel grafico precedente ?**

Allo stesso modo con cui si è dimostrato che la funzione è continua in  $x = 0$ , si dimostra che

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2}{4} (5 - 2 \ln t) = 0 \quad \text{per cui} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} I(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[ \frac{e^4}{4} - \frac{t^2}{4} (5 - 2 \ln t) \right] = \frac{e^4}{4} \quad \text{che rappresenta l'area}$$

compresa tra la curva  $f(x) = \begin{cases} x(2 - \ln x) & \text{per } x > 0 \\ 0, & \text{per } x = 0 \end{cases}$  e l'asse delle ascisse, rappresentata in grigio

di seguito:

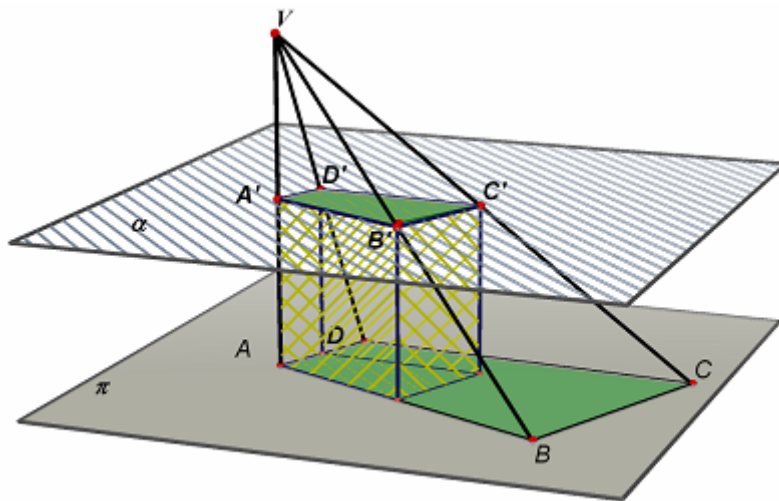


## QUESTIONARIO

### Quesito 1

Una piramide, avente area di base  $B$  e altezza  $h$ , viene secata con un piano parallelo alla base. Si calcoli a quale distanza dal vertice si deve condurre tale piano, affinché il prisma che ha per basi la sezione di cui sopra e la sua proiezione ortogonale sul piano di base della piramide abbia volume massimo.

Consideriamo la figura seguente:



Proiettando ortogonalmente il poligono  $A'B'C'D'$  sul piano  $\pi$ , si ottiene il prisma retto di base  $A'B'C'D'$  e altezza  $AA'$ . Consideriamo le piramidi  $VABCD$  e  $VA'B'C'D'$ ; il rapporto tra le aree  $S_{ABCD}$  e  $S_{A'B'C'D'}$  delle basi è uguale al rapporto dei quadrati delle altezze  $VA$  e  $VA'$ , cioè

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{A'B'C'D'}} = \left( \frac{\overline{VA}}{\overline{VA'}} \right)^2 \quad \text{da cui} \quad S_{A'B'C'D'} = S_{ABCD} \left( \frac{\overline{VA'}}{\overline{VA}} \right)^2. \quad \text{Ponendo } \overline{VA'} = x \text{ con } 0 \leq x \leq h \text{ si ha}$$

$$\overline{AA'} = h - x \text{ per cui il volume del prisma sarà } V_{PRISMA}(x) = S_{A'B'C'D'} \cdot \overline{AA'} = \frac{B}{h^2} [x^2(h - x)] \text{ con}$$

$0 \leq x \leq h$ . Calcoliamo la derivata prima e seconda della funzione  $f(x) = x^2(h - x)$  da massimizzare. Si ha

$$f'(x) = 2xh - 3x^2$$

$$f''(x) = 2h - 6x$$

da cui deduciamo che la funzione volume è strettamente crescente in  $\left(0, \frac{2h}{3}\right)$ , strettamente

decrescente in  $\left(\frac{2h}{3}, h\right)$ , concava verso l'alto in  $\left(0, \frac{h}{3}\right)$  e verso il basso in  $\left(\frac{h}{3}, h\right)$ . Inoltre

$f''(0) = 2h > 0, f''\left(\frac{2h}{3}\right) = -2h < 0$  per cui il volume massimo lo si ha per  $x = \frac{2h}{3}$  e vale

$$V_{PRISMA}\left(\frac{2h}{3}\right) = \frac{B}{h^2} \left[ \frac{4h^2}{9} \left( h - \frac{2h}{3} \right) \right] = \frac{4}{27} Bh.$$

### Quesito 2

Si calcoli il limite della funzione  $\frac{\ln^2 x + x - 1}{x^2 - x + \sin^2(x-1)}$  quando  $x$  tende a 1.

Il limite si presenta nella forma indeterminata  $\frac{0}{0}$  per cui applicando il teorema di De L'Hospital si

$$\text{ha } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln^2 x + x - 1}{x^2 - x + \sin^2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2 \ln x}{x} + 1}{2x - 1 + 2 \sin(x-1) \cos(x-1)} = \frac{0+1}{2-1+0} = 1.$$

Alternativamente utilizzando i limiti notevoli, effettuando prima la sostituzione  $t = x - 1$  si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln^2 x + x - 1}{x^2 - x + \sin^2(x-1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln^2(t+1) + t}{t(t+1) + \sin^2(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cdot \overbrace{\left[ \frac{\ln(t+1)}{t} \right]^2}^{=1} + t}{t(t+1) + t^2 \cdot \underbrace{\left[ \frac{\sin(t)}{t} \right]^2}_{=1}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 + t}{t(t+1) + t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t+1}{2t+1} = 1$$

### Quesito 3

Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse  $x$  della porzione di piano limitata dalla curva  $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ , dall'asse  $x$  e dalle rette  $x=1, x=\sqrt{3}$ .

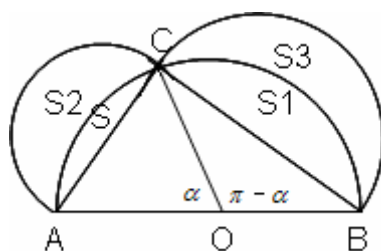
Il volume richiesto, utilizzando il teorema di Guldino è pari a

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^{\sqrt{3}} y^2 dx = \pi \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2} dx = \pi \int_1^{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \\ &= \pi [x - \arctan(x)]_1^{\sqrt{3}} = \pi \left[ \left( \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right) - \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) \right] = \frac{\pi(12\sqrt{3} - 12 - \pi)}{12} \end{aligned}$$

### Quesito 4

Dato un triangolo rettangolo inscritto in un semicerchio, se sui suoi cateti presi come diametri ed esternamente si costruiscono due semicerchi, da questi e dal dato semicerchio sono determinati due menischi, detti lunule d'Ippocrate. Si dimostri che la loro somma ha la stessa area del triangolo.

Consideriamo la figura seguente:



L'area del triangolo rettangolo ABC, posto  $\overline{AO} = \overline{OB} = \overline{OC} = r$ , è

$$\begin{aligned} S(ABC) &= \frac{1}{2} \cdot \overline{AO} \cdot \overline{OC} \cdot \sin(\widehat{AOC}) + \frac{1}{2} \cdot \overline{OB} \cdot \overline{OC} \cdot \sin(\widehat{BOC}) = \\ &= \frac{r^2}{2} \cdot \sin(\alpha) + \frac{r^2}{2} \cdot \sin(\pi - \alpha) = \frac{r^2}{2} \cdot \sin(\alpha) + \frac{r^2}{2} \cdot \sin(\alpha) = r^2 \cdot \sin(\alpha) \end{aligned}$$

Poniamo  $\overline{AC} = a$ ,  $\overline{CB} = b$  con  $a^2 + b^2 = 4r^2$ . L'area della lunula S2 la calcoliamo come differenza tra l'area della semicirconferenza di diametro  $\overline{AC} = a$  e l'area S. L'area della semicirconferenza di

diametro  $\overline{AC} = a$  è  $\frac{\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi a^2}{8}$  mentre l'area S è data dalla differenza tra l'area del settore circolare AOC e l'area del triangolo AOC, cioè

$$S = \frac{1}{2} \cdot \overline{AO} \cdot \overline{OC} \cdot \widehat{AOC} - \frac{1}{2} \cdot \overline{AO} \cdot \overline{OC} \cdot \sin(\widehat{AOC}) = \frac{r^2}{2} [\alpha - \sin(\alpha)] \text{ per cui } S2 = \frac{\pi a^2}{8} - \frac{r^2}{2} [\alpha - \sin(\alpha)].$$

Analogamente l'area della lunula S3 la calcoliamo come differenza tra l'area della semicirconferenza di diametro  $\overline{BC} = b$  e l'area S1. L'area della semicirconferenza di diametro

$\overline{BC} = b$  è  $\frac{\pi \left(\frac{b}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi b^2}{8}$  mentre l'area S1 è data dalla differenza tra l'area del settore circolare BOC e l'area del triangolo BOC, cioè

$$S = \frac{1}{2} \cdot \overline{CO} \cdot \overline{OB} \cdot \widehat{BOC} - \frac{1}{2} \cdot \overline{CO} \cdot \overline{OB} \cdot \sin(\widehat{BOC}) = \frac{r^2}{2} [\pi - \alpha - \sin(\pi - \alpha)] = \frac{r^2}{2} [\pi - \alpha - \sin(\alpha)] \text{ per cui}$$

$$S3 = \frac{\pi b^2}{8} - \frac{r^2}{2} [\pi - \alpha - \sin(\alpha)]. \text{ Quindi}$$

$$\begin{aligned} S2 + S3 &= \frac{\pi a^2}{8} - \frac{r^2}{2} [\alpha - \sin(\alpha)] + \frac{\pi b^2}{8} - \frac{r^2}{2} [\pi - \alpha - \sin(\alpha)] = \\ &= \frac{\pi(a^2 + b^2)}{8} - \frac{\pi r^2}{2} + r^2 \sin(\alpha) = \underbrace{\frac{\pi(a^2 + b^2 - 4r^2)}{8}}_{=0} + r^2 \sin(\alpha) = r^2 \sin(\alpha) = S(ABC) \text{ c.v.d.} \end{aligned}$$

### ***Quesito 5***

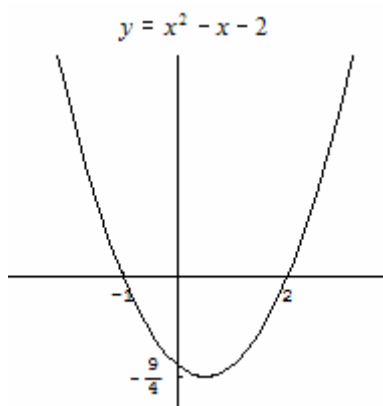
**Si determini il luogo  $\gamma$  dei punti di intersezione delle due rette di equazioni:**

$$\lambda x - y - (\lambda + 2) = 0,$$

$$(1 - \lambda)x + y + 2 = 0,$$

**descritto al variare di  $\lambda$ , parametro reale qualunque. Si disegni la curva  $\gamma$ .**

Sommando membro a membro le due equazioni si ha  $x = \lambda$  che sostituita in una delle due equazioni date fornisce il luogo  $y = x^2 - x - 2$  che rappresenta una parabola con concavità verso l'alto, vertice in  $\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$  e che interseca l'asse delle ascisse in  $(-1, 0), (2, 0)$  e quello delle ordinate in  $(0, -2)$ . Di seguito il grafico del luogo:



### ***Quesito 6***

**Sono dati un angolo  $\alpha$  di  $\pi^2$  radianti e un angolo  $\beta$  di 539 gradi. Si verifichi che sono entrambi maggiori di un angolo giro e minori di due angoli giro. Si dica quale dei due è il maggiore. Si dica inoltre se è più grande il seno di  $\alpha$  o il seno di  $\beta$ .**

Esprimendo l'angolo  $\alpha = \pi^2 [\text{rad}]$  in gradi si ha  $\alpha^\circ = \frac{180^\circ \cdot \alpha^r}{\pi} = \frac{180^\circ \cdot \pi^2}{\pi} = (180\pi)^\circ$ . Poiché  $2 < \pi < 4$  si ha  $360^\circ < (180\pi)^\circ < 720^\circ$  cioè l'angolo  $\alpha = \pi^2 [\text{rad}]$  è maggiore di un angolo giro e minore di due angoli giro. Per l'angolo  $\beta = 539^\circ$  si ha  $\beta = 539^\circ < 540^\circ = (180 \cdot 3)^\circ$ ; poiché  $\pi < 4$  si ha  $360^\circ < 539^\circ < (180 \cdot 3)^\circ = 540^\circ < 720^\circ$  cioè l'angolo  $\beta = 539^\circ$  è maggiore di un angolo giro e minore di due angoli giro. Per stabilire quale dei due angoli è minore basta osservare che  $\pi > 3$  per cui vale la seguente catena di disuguaglianze:  $\beta = 539^\circ < (180 \cdot 3)^\circ < (180 \cdot \pi)^\circ = \alpha$  per cui  $\alpha > \beta$ . Calcoliamo ora  $\sin(\alpha), \sin(\beta)$ . Ricordando che il seno è una funzione periodica con periodo pari a  $360^\circ$ , si ha:

$$\sin(\alpha) = \sin[(180\pi)^\circ] = \sin[(180\pi)^\circ - 360^\circ] = \sin[180(\pi - 2)^\circ]$$

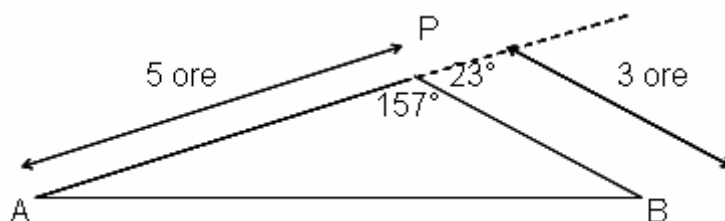
$$\sin(\beta) = \sin[539^\circ] = \sin[539^\circ - 360^\circ] = \sin[179^\circ]$$

Ora poiché l'angolo  $179^\circ$  si trova nel secondo quadrante della circonferenza goniometrica, si ha  $\sin(\beta) = \sin[179^\circ] > 0$ , mentre poiché  $1 < (\pi - 2) < \frac{3}{2}$  si ha  $180^\circ < 180(\pi - 2)^\circ < 270^\circ$  cioè  $180(\pi - 2)^\circ$  si trova nel terzo quadrante per cui  $\sin(\alpha) = \sin[180(\pi - 2)^\circ] < 0$ . In conclusione  $\sin(\alpha) < \sin(\beta)$ .

### ***Quesito 7***

**Il comandante di una nave decide di raggiungere il porto B partendo dal punto A e seguendo un percorso rettilineo. A causa di un errore, però, la nave inizia la sua navigazione lungo una rotta leggermente diversa da quella prevista. Dopo 5 ore ci si accorge dello sbaglio e il comandante ordina di virare di un angolo di  $23^\circ$  in modo da dirigere ora esattamente verso il porto B, che viene raggiunto dopo 3 ore. Se l'imbarcazione ha mantenuto sempre una velocità costante, quanto tempo si è perso a causa dell'errore?**

Consideriamo la figura seguente:



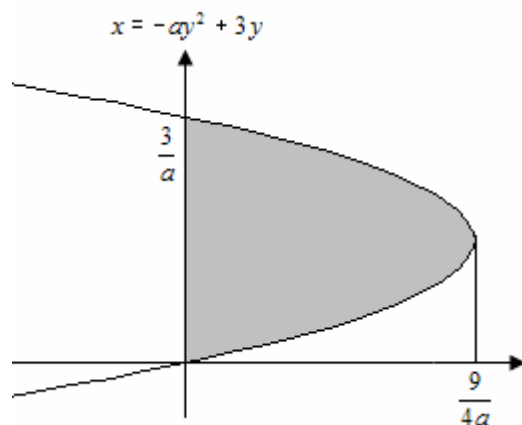
Il percorso AP in ore è lungo 5 ore, mentre il percorso PB 3 ore, per cui il tempo totale impiegato per arrivare a B partendo da A e passando per P è 8 ore. Applicando il teorema di Carnot, il percorso rettilineo AB in ore è pari a

$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AP}^2 + \overline{PB}^2 - 2 \cdot \overline{AP} \cdot \overline{PB} \cdot \cos(180^\circ - 23^\circ)} = \sqrt{34 + 30 \cos(23^\circ)} \cong 7,85$  ore per cui, a causa della rotta sbagliata, si è perso un tempo pari a  $\Delta = (8 - 7,85)$  ore = 0,15 ore = 9 minuti.

### ***Quesito 8***

**Data la parabola  $x = -ay^2 + 3y$  (con  $a > 0$ ), si determini per quale valore di  $a$  l'area della parte finita di piano compresa tra il suo grafico e l'asse  $y$  è uguale a 72.**

Consideriamo la figura seguente:



L'area compresa tra la parabola di equazione  $x = -ay^2 + 3y$  e l'asse delle ordinate, in grigio nella figura soprastante, è calcolabile attraverso il teorema di Archimede. Secondo questo teorema, l'area di un segmento parabolico è pari ai  $\frac{2}{3}$  dell'area del rettangolo circoscritto ad esso. La parabola

$x = -ay^2 + 3y$  ha vertice in  $V = \left(\frac{9}{4a}, \frac{3}{2a}\right)$  ed interseca l'asse delle ordinate in  $(0,0), \left(0, \frac{3}{a}\right)$ . Il

rettangolo circoscritto avrà un lato pari a  $\frac{3}{a}$  ed un altro lato pari a  $\frac{9}{4a}$  e in corrispondenza l'area

vale  $S(R) = \frac{27}{4a^2}$ . Imponendo che  $\frac{2}{3} \cdot S(R) = 72$  si ha  $\frac{9}{2a^2} = 72 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{4}$  e poiché per

ipotesi  $a > 0$  la soluzione accettabile è  $a = \frac{1}{4}$ . Alternativamente possiamo calcolare l'area tramite

integrale e si ha:  $S = \int_0^{\frac{3}{a}} (-ay^2 + 3y) dy = \left[ -\frac{ay^3}{3} + \frac{3y^2}{2} \right]_0^{\frac{3}{a}} = -\frac{9}{a^2} + \frac{27}{2a^2} = \frac{9}{2a^2}$  ed imponendo

$S = \frac{9}{2a^2} = 72$  si riottiene la soluzione accettabile  $a = \frac{1}{4}$ .

### Quesito 9

**Si dimostri che un numero di quattro cifre tutte uguali è divisibile per 101.**

Indichiamo con  $kkkk$  il numero di 4 cifre tutte uguali con  $k > 1$ . Effettuando la divisione di  $kkkk$  per 101 si trova facilmente che  $kkkk : 101 = kk$ .

### Quesito 10

**Si enunci il teorema di Rolle e si mostri, con opportuni esempi, che se una qualsiasi delle tre condizioni previste non è soddisfatta, il teorema non è valido.**

Il teorema di Rolle afferma che se una funzione è continua in un intervallo chiuso  $[a, b]$ , derivabile in ogni punto dell'intervallo aperto  $(a, b)$  e assume valori uguali  $f(a) = f(b)$ , esiste almeno un punto interno ad  $(a, b)$  la cui derivata si annulla, cioè  $f'(c) = 0$ .

Formalmente:

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $f$  è continua in  $[a, b]$ , derivabile in  $(a, b)$  e tale che  $f(a) = f(b)$ , allora  $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$ .

Mostriamo ora, con opportuni controesempi, che se viene a cadere ognuna delle tre ipotesi, il teorema non è valido.

1. Sia  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ : la funzione è continua in  $[0, 1]$  e derivabile in  $(0, 1)$ , ma  $f(0) = 0 \neq f(1) = 1$  per cui il teorema di Rolle non è applicabile. Infatti la derivata della funzione non è mai nulla, essendo  $f'(x) = 1$ ;
2. Sia  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ : la funzione è continua in  $[0, 1]$ , inoltre  $f(-1) = 1 = f(1)$ , ma non è derivabile in  $x = 0 \in (-1, 1)$  in cui presenta un punto angoloso per cui il teorema di Rolle non è applicabile. Infatti la derivata della funzione, dove esiste, non è mai nulla, essendo 
$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases};$$
3. Sia  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ : la funzione è derivabile in  $(0, 1)$ , inoltre  $f(0) = f(1) = 0$ , ma non è continua in  $x = 1$  per cui il teorema di Rolle non è applicabile. Infatti la derivata della funzione non è mai nulla.