ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Indirizzo Y: P.N.I. + scientifico autonomia + scientifico e scientifico-tecnologico Brocca + Proteo.

CORSO SPERIMENTALE Sessione suppletiva 2009

Tema di MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Si consideri la funzione:

$$f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x^2+1} & \text{se } x<0\\ 0 & \text{se } x=0\\ \arctan(\sin x) & \text{se } x>0\end{cases}$$

1. Si provi che essa è continua, ma non derivabile, nel punto x = 0.

2. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy). Per quel che riguarda le ascisse positive, ci si limiterà all'intervallo 0 ≤ x ≤ 2π.

3. Si calcoli l'area della superficie piana, situata nel II quadrante, delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalla retta di equazione x = -1.

4. Utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati, si calcoli un valore approssimato dell'area della superficie piana, delimitata dall'asse delle x e dall'arco di γ i cui estremi hanno ascisse 0 e π.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x)=2+\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}$$

1. Si determinino le costanti a e b in modo che risulti:

$$\int_0^{\frac{2}{3}} f(x)dx=\frac{10}{3}-6\ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

2. Si studi la funzione così ottenuta e se ne tracci il grafico γ.

3. Si conduca la tangente a γ nel punto di ascissa x = 0 e si calcoli l'area del triangolo che essa determina con i due asintoti.

4. La retta y = k incontri γ in due punti di ascissa x_1 e x_2. Si esprimano, in funzione di k, la somma e il prodotto di tali ascisse. Si dimostri che la quantità

$$S = \frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1}$$

è indipendente dal valore di k e se ne calcoli il valore.

QUESTIONARIO

1. Nel gioco del lotto, qual è la probabilità dell'estrazione di un numero assegnato? Quante estrazioni occorre effettuare perché si possa aspettare, con una probabilità p = 1/2 assegnata, di vederlo uscire almeno una volta?

2. Sul diametro MN di un cerchio, si considerino due punti P e Q, e su MP, MQ, NP, NQ come diametri si descrivano quattro semicerchi, i primi due posti in una stessa parte rispetto alla retta MN, gli altri due posti nell'altra parte. Si dimostri che il perimetro del quadrilatero curvilineo (pelecoide) così ottenuto, ha la stessa lunghezza della circonferenza data.

3. Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x) = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{e^{t^2}}{|t| + 1} dt$$

nel punto P di ascissa x = π/2.

4. Siano dati una sfera di raggio *r*, il cubo in essa inscritto e il cono circolare retto inscritto nel cubo. Si scelga a caso un punto all'interno della sfera: si determini la probabilità che tale punto risulti interno al cono.

5. Nell' omotetia di centro O(0,0) e rapporto k = -4, si determini l'equazione della circonferenza corrispondente alla $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$. Si confrontino fra di loro i centri e i raggi delle due circonferenze.

6. Dati due punti A e B distanti tra loro 5 cm, si dica qual è il luogo dei punti C dello spazio tali che il triangolo ABC sia rettangolo in A ed abbia area uguale a 1 cm^2

7. Si discuta il seguente sistema lineare omogeneo in relazione al parametro reale λ e si determinino in ogni caso le eventuali soluzioni:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ (\lambda - 1)x + \lambda y + 4z = 0 \\ \lambda x + 5y + (2\lambda + 1)z = 0 \end{cases}$$

8. Le lunghezze dei lati di un triangolo sono numeri interi consecutivi e l'angolo di maggior ampiezza è il doppio di quello di ampiezza minore. Si calcolino la lunghezza del lato minore e il coseno dell'angolo minore.

9. Si consideri un cerchio di centro O e raggio *r* e sia A un punto della circonferenza. Sia inoltre OB un raggio mobile che forma l'angolo 2x con OA. Facendo ruotare la figura attorno ad OA, il segmento AB genera la superficie laterale di un cono. Come deve essere scelta in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza x dell'angolo perché quest'area sia massima?

10. Un turista, che osserva un lago scozzese dalla cima di un fiordo alto 100 metri, vede spuntare la testa di un mostro acquatico in un punto per il quale misura un angolo di depressione di 18,45°. Il mostro, che nuota in linea retta allontanandosi dall'osservatore, si immerge, per riemergere cinque minuti più tardi in un punto per cui l'angolo di depressione vale 14,05°. Con che velocità, in metri all'ora, sta nuotando il mostro?

Durata massima della prova: 6 ore.

E' consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili. Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA1

Si consideri la funzione:

$$f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x^2+1} & \text{se } x<0\\ 0 & \text{se } x=0\\ \arctan(\sin x) & \text{se } x>0\end{cases}$$

Punto 1

Si provi che essa è continua, ma non derivabile, nel punto x = 0.

Proviamo che la funzione $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x^2+1} & \text{se } x<0\\ 0 & \text{se } x=0\\ \arctan(\sin x) & \text{se } x>0\end{cases}$ è continua in $x=0$ calcolando i limiti per $x\to 0^{\pm}$. Si ha $\lim_{x\to 0^-}\ln\sqrt{x^2+1}=\ln 1=0, \lim_{x\to 0^+}\arctan(\sin x)=\arctan(0)=0$ per cui la funzione è continua in $x=0$. La derivata prima è $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x^2+1} & \text{se } x<0\\ \dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x} & \text{se } x>0\end{cases}$ per cui $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x^2+1}=0, \lim_{x\to 0^+}\dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}=1$ da cui deduciamo la non derivabilità della funzione in $x=0$. In conclusione la funzione presenta un punto angoloso in $x=0$.

Punto 2

Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy). Per quel che riguarda le ascisse positive, ci si limiterà all'intervallo 0 ≤ x ≤ 2π.

- Studiamo prima il ramo $g(x)=\ln\sqrt{x^2+1}$ definito per $x<0$.

Dominio: $x<0$

Intersezione asse delle ascisse: la funzione $g(x)=\ln\sqrt{x^2+1}=0\Rightarrow\sqrt{x^2+1}=1\Rightarrow x=0$;

Intersezione asse delle ordinate: $x=0\to y=0$

Positività: la funzione $g(x)=\ln\sqrt{x^2+1}$ è positiva in tutto il dominio $x<0$;

Asintoti verticali: non esistono;

Asintoti orizzontale: $\lim_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$ per cui non esistono asintoti orizzontali;

Asintoti obliqui: non esistono in quanto $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\sqrt{x^2+1}}{x}=\dfrac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(x^2+1)}{x}=\dfrac{\infty}{\infty}\text{ f.i}\xrightarrow{\text{De L'Hospital}}\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=0$;

Crescenza e decrescenza: $g'(x)=\frac{x}{x^2+1}$ per cui la funzione è strettamente decrescente in tutto il dominio $x<0$;

Flessi: $g''(x)=\frac{(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$ per cui in $(-1,0)$ la funzione volge la concavità verso l'alto e in $(-\infty,-1)$ verso il basso per cui $F=\left(-1,\frac{\ln 2}{2}\right)$ è un flesso a tangente obliqua.

- Studiamo il ramo $h(x)=\arctan(\sin x)$ definito per $x>0$ in $[0,2\pi]$.

Dominio: $x>0$

Intersezione asse delle ascisse: $h(x)=\arctan(\sin x)\Rightarrow \sin x=0\Rightarrow x=0, x=\pi, x=2\pi$;

Intersezione asse delle ordinate: $x=0\rightarrow y=0$

Positività: $h(x)=\arctan(\sin x)>0\Rightarrow \sin x>0\Rightarrow x\in(0,\pi)$;

Asintoti verticali: non esistono;

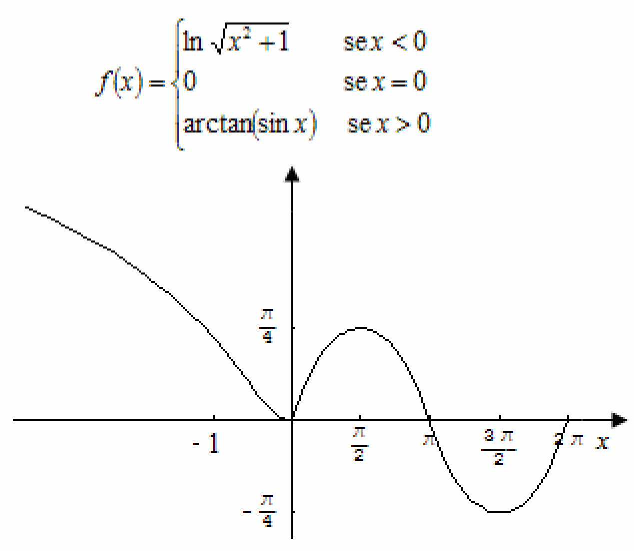
Asintoti orizzontale: non esistono asintoti orizzontali in quanto la funzione seno è una funzione limitata;

Asintoti obliqui: non esistono in quanto la funzione seno è una funzione limitata;

Crescenza e decrescenza: $h'(x)=\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$ per cui la funzione è strettamente crescente in $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ e strettamente decrescente in $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$;

Flessi: $h''(x)=\frac{-\sin x(3-\sin^2 x)}{(\sin^2 x+1)^2}$ per cui in $(\pi,2\pi)$ la funzione volge la concavità verso l'alto e in $(0,\pi)$ verso il basso per cui $F_1=(\pi,0)$ è un flesso a tangente obliqua. Inoltre $h''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}<0, h''\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}>0$ per cui $M=\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$ è un massimo relativo e $m=\left(\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)$ è un minimo relativo.

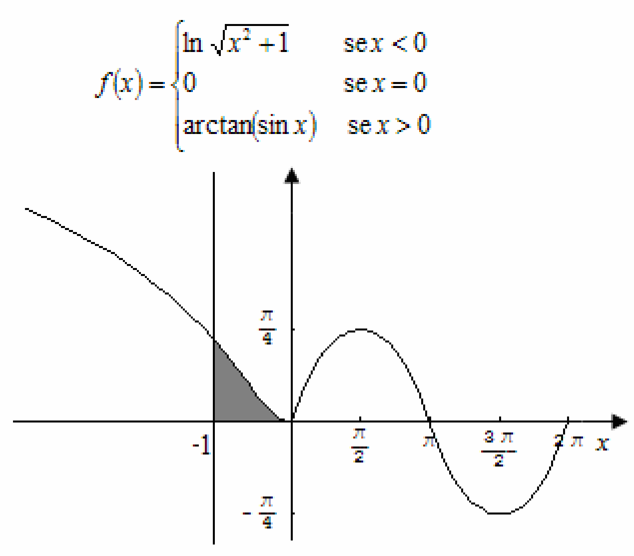
Il grafico di seguito:



Punto 3

Si calcoli l'area della superficie piana, situata nel II quadrante, delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalla retta di equazione x = -1.

L'area è raffigurata in grigio di seguito.



Tale area vale $S=\int_{-1}^{0}\ln\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\ln\left(x^2+1\right)dx$. Applicando l'integrazione per parti si ha

$$\int\ln\left(x^2+1\right)dx=x\ln\left(x^2+1\right)-2\int\frac{x^2}{x^2+1}dx=$$

$$=x\ln\left(x^2+1\right)-2\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=x\ln\left(x^2+1\right)-2x+2\arctan(x)+k$$

per cui

$$S=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\ln\left(x^2+1\right)dx=\frac{1}{2}\left[x\ln\left(x^2+1\right)-2x+2\arctan(x)\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{2}\left[0-\left(-\ln 2+2-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{\pi+2\ln 2-4}{4}.$$

Punto 4

Utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati, si calcoli un valore approssimato dell'area della superficie piana, delimitata dall'asse delle x e dall'arco di γ i cui estremi hanno ascisse 0 e π.

Scegliamo di suddividere l'intervallo $[0,\pi]$ in 4 intervallini di ampiezza $\frac{\pi}{4}$. Ponendo $g(x)=\arctan(\sin x)$ ed applicando il metodo di cavalieri Simpson, si ha:

$$\int_0^{\pi} \arctan(\sin x)dx \cong \left(\frac{\pi-0}{4}\right)\cdot\left\{\left[\frac{g(x_0)+g(x_4)}{3}\right]+\frac{4}{3}\cdot[g(x_1)+g(x_3)]+\frac{2}{3}\cdot g(x_2)\right\}=$$

$$=\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left\{\left[\frac{g(0)+g(\pi)}{3}\right]+\frac{4}{3}\cdot\left[g\left(\frac{\pi}{4}\right)+g\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]+\frac{2}{3}\cdot g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}=$$

$$=\frac{\pi}{4}\cdot\left[\frac{0+0}{3}+\frac{4}{3}\cdot\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{2\pi}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\pi^2}{24}\cong 1{,}70$$

con un errore commesso $e\le\frac{(b-a)^5}{180n^4}\cdot M$, con $M=\max\left|g^{IV}(x)\right|$ in $[0,\pi]$. In questo caso in $[0,\pi]$ il massimo $M=\max\left|g^{IV}(x)\right|=\frac{15}{2}$ per cui l'errore è $e\le\frac{(b-a)^5}{180n^4}\cdot M=\frac{\pi^5}{46080}\cdot\frac{15}{2}=\frac{\pi^5}{6144}\cong 0{,}05$. Infatti il valore fornito da un qualsiasi software per l'integrale è 1,69058 che differisce da quello ottenuto per integrazione numerica 1,70 per meno di 0,05.

PROBLEMA2

Si consideri la funzione:

$$f(x)=2+\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}$$

Punto 1

Si determinino le costanti a e b in modo che risulti:

$$\int_0^{\frac{2}{3}} f(x)dx=\frac{10}{3}-6\ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

Calcoliamo l'integrale definito. Si ha:

$$\int_0^{\frac{2}{3}} f(x)dx = \int_0^{\frac{2}{3}} \left[2 + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}\right]dx = \left[2x + a\ln|x+1| - \frac{b}{x+1}\right]_0^{\frac{2}{3}} =$$

$$= \left[\frac{4}{3} + a\ln\left(\frac{5}{3}\right) - \frac{3b}{5}\right] - [-b] = \frac{4}{3} + a\ln\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{2b}{5}$$

Imponendo $\int_0^{\frac{2}{3}} f(x)dx = \frac{4}{3} + a\ln\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{2b}{5} = \frac{10}{3} - 6\ln\left(\frac{5}{3}\right)$ si ricava $\begin{cases} a = -6 \\ \frac{4}{3} + \frac{2b}{5} = \frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = 5 \end{cases}$ per cui

$$f(x) = 2 - \frac{6}{x+1} + \frac{5}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2}$$

Punto 2

Si studi la funzione così ottenuta e se ne tracci il grafico γ.

Studiamo la funzione $f(x) = \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2}$

Dominio: $R/\{-1\}$

Intersezione asse delle ascisse: la funzione $f(x) = \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2}$ non interseca mai l'asse delle ascisse in quanto il numeratore è un fattore sempre positivo;

Intersezione asse delle ordinate: $x = 0 \to y = 1$

Positività: la funzione $f(x) = \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2}$ è positiva in tutto il dominio $R/\{-1\}$

Asintoti verticali: $\lim_{x\to -1^\pm} \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2} = \frac{5}{0^+} = +\infty$ per cui $x = -1$ è asintoto verticale

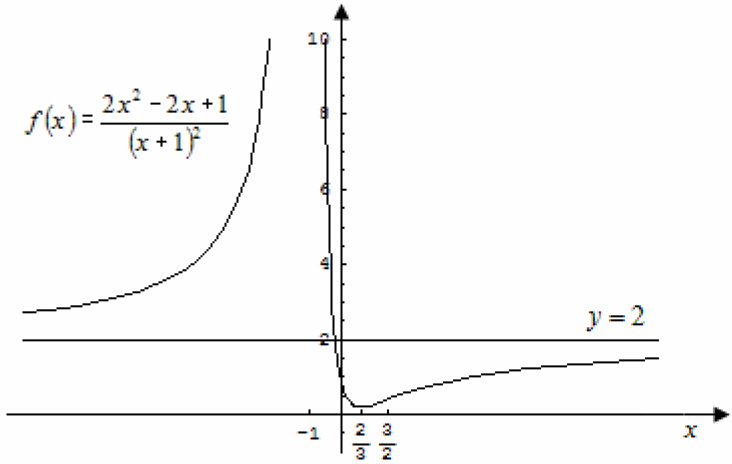
Asintoti orizzontale: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2} = 2$ per cui $y = 2$ è asintoto orizzontale destro e sinistro;

Asintoti obliqui: non esistono in quanto esiste l'asintoto orizzontale e per funzioni razionali fratte la presenta dell'asintoto orizzontale esclude la presenza di quello obliquo e viceversa;

Crescenza e decrescenza: $f'(x) = \frac{2(3x-2)}{(x+1)^3}$ per cui la funzione è strettamente crescente in $(-\infty,-1) \cup \left(\frac{2}{3},+\infty\right)$, strettamente decrescente in $\left(-1,\frac{2}{3}\right)$ e si annulla in $x = \frac{2}{3}$.

Flessi: $f''(x)=\dfrac{6(3-2x)}{(x+1)^4}$ per cui in $(-\infty,-1)\cup\left(-1,\dfrac{3}{2}\right)$ la funzione volge la concavità verso l'alto e in $\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$ verso il basso per cui $F=\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{2}{5}\right)$ è un flesso a tangente obliqua. Inoltre $f''\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{162}{125}>0$ per cui $m=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{5}\right)$ è un minimo relativo ed assoluto.

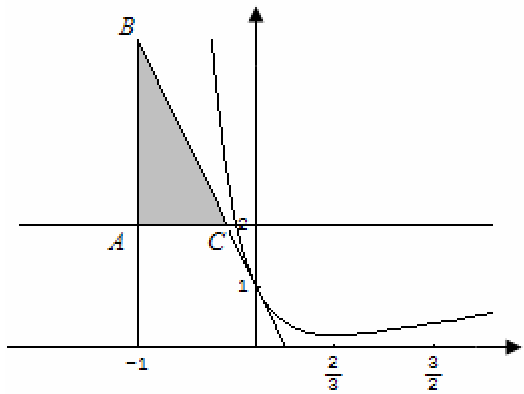
Il grafico è sotto presentato:



Punto 3

Si conduca la tangente a γ nel punto di ascissa x = 0 e si calcoli l'area del triangolo che essa determina con i due asintoti.

Il punto ad ascissa nulla è $(0,1)$ e la tangente in esso ha equazione $y=mx+1$ con $m=f'(0)=-4$ per cui la tangente ha equazione $y=-4x+1$. L'area da calcolare è raffigurata in grigio di seguito.



I vertici del triangolo sono dati da:

$A = (-1,2)$

$$B:\begin{cases} y = -4x+1 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow B = (-1,5)$$

$$C:\begin{cases} y = -4x+1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow C = \left(-\frac{1}{4},2\right)$$

L'area è $S = \frac{\overline{\mathrm{AB}} \cdot \overline{\mathrm{AC}}}{2}$ dove $\overline{\mathrm{AB}} = 3, \overline{\mathrm{AC}} = \frac{3}{4}$ per cui $S = \frac{9}{8}$

Punto 4

La retta y = k incontri γ in due punti di ascissa x_1 e x_2. Si esprimano, in funzione di k, la somma e il prodotto di tali ascisse. Si dimostri che la quantità

$$S = \frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1}$$

è indipendente dal valore di k e se ne calcoli il valore.

Studiamo le soluzioni del sistema $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x^2-2x+1}{(x+1)^2} \\ y = k \end{cases}$. Si ha:

$\frac{2x^2-2x+1}{(x+1)^2} = k \rightarrow (k-2)x^2 + 2x(k+1) + (k-1) = 0$. Le soluzioni sono reali e distinte se $\begin{cases} \frac{\Delta}{4} = (k+1)^2 - (k-2)(k-1) = 5k-1 > 0 \\ k-2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow k \in \left(\frac{1}{5},2\right) \cup (2,+\infty)$ e in tal caso sono

$$x_1 = \frac{-(k+1)+\sqrt{5k-1}}{k-2}, x_2 = \frac{-(k+1)-\sqrt{5k-1}}{k-2}.$$

Ora

$$x_1 + 1 = \frac{-(k+1)+\sqrt{5k-1}}{k-2} + 1 = \frac{\sqrt{5k-1}-3}{k-2}$$

$$x_2 + 1 = \frac{-(k+1)-\sqrt{5k-1}}{k-2} + 1 = \frac{-\sqrt{5k-1}-3}{k-2}$$

da cui

$$\frac{1}{x_1+1} = \frac{k-2}{\sqrt{5k-1}-3} = \frac{(k-2)\left(\sqrt{5k-1}+3\right)}{5(k-2)} = \frac{\left(\sqrt{5k-1}+3\right)}{5}$$

$$\frac{1}{x_2+1} = \frac{k-2}{-\sqrt{5k-1}-3} = \frac{(k-2)\left(-\sqrt{5k-1}+3\right)}{5(k-2)} = \frac{\left(-\sqrt{5k-1}+3\right)}{5}$$

per cui $S = \frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} = \frac{6}{5}$.

Alternativamente scriviamo $S=\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}$ come $S=\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}=\frac{2+(x_1+x_2)}{1+(x_1+x_2)+x_1\cdot x_2}$.

La somma e il prodotto delle radici dell'equazione $(k-2)x^2+2x(k+1)+(k-1)=0$ sono rispettivamente $(x_1+x_2)=\frac{2(k+1)}{2-k}, x_1\cdot x_2=\frac{k-1}{k-2}$ per cui

$$S=\frac{2+(x_1+x_2)}{1+(x_1+x_2)+x_1\cdot x_2}=\frac{2+\frac{2(k+1)}{2-k}}{1+\frac{2(k+1)}{2-k}+\frac{k-1}{k-2}}=\frac{\frac{4-2k+2k+2}{2-k}}{\frac{2-k+2k+2-k+1}{2-k}}=\frac{\frac{6}{2-k}}{\frac{5}{2-k}}=\frac{6}{5}.$$

QUESTIONARIO

Quesito 1

Nel gioco del lotto, qual è la probabilità dell'estrazione di un numero assegnato? Quante estrazioni occorre effettuare perché si possa aspettare, con una probabilità p = 1/2 assegnata, di vederlo uscire almeno una volta?

La probabilità che esca un numero assegnato nel gioco del lotto è $p=\frac{1}{90}$. Definiamo l'evento A nel seguente modo: $\mathrm{A}\equiv\{\text{in N estrazioni esce almeno una volta un numero assegnato}\}$; la probabilità dell'evento A è data $1-\Pr\{\overline{\mathrm{A}}\}$. La probabilità dell'evento $\overline{\mathrm{A}}$, cioè la probabilità che in N estrazioni non esce mai il numero assegnato, è $\Pr\{\overline{\mathrm{A}}\}=\left(\frac{89}{90}\right)^N$ per cui $\Pr\{\mathrm{A}\}=1-\Pr\{\overline{\mathrm{A}}\}=1-\left(\frac{89}{90}\right)^N$.

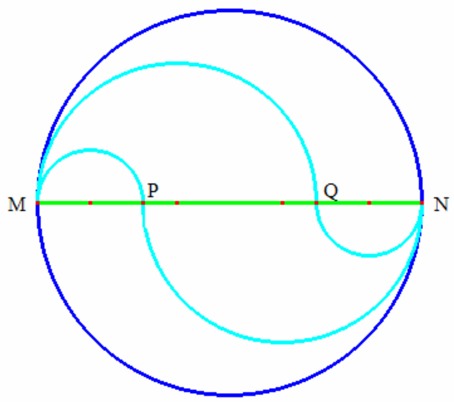
Imponendo $\Pr\{\mathrm{A}\}=1-\left(\frac{89}{90}\right)^N\geq\frac{1}{2}$ si ricava

$$\left(\frac{89}{90}\right)^N\leq\frac{1}{2}\Rightarrow N\cdot\ln\left(\frac{89}{90}\right)\leq\ln\left(\frac{1}{2}\right)\Rightarrow N\geq\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln\left(\frac{89}{90}\right)}\cong 62{,}03\Rightarrow N=63.$$

Quesito 2

Sul diametro MN di un cerchio, si considerino due punti P e Q, e su MP, MQ, NP, NQ come diametri si descrivano quattro semicerchi, i primi due posti in una stessa parte rispetto alla retta MN, gli altri due posti nell'altra parte. Si dimostri che il perimetro del quadrilatero curvilineo (pelecoide) così ottenuto, ha la stessa lunghezza della circonferenza data.

Si consideri la figura seguente rappresentante la pelecoide.



Detti 2r il diametro MN, 2x il diametro MP e 2y il diametro QN si ha che Lunghezza della pelecoide = semicirconferenza MP + semicirconferenza MQ + semicirconferenza PN + semicirconferenza QN , cioè

$$L=\frac{2\pi x}{2}+\frac{(2r-2y)\pi}{2}+\frac{(2r-2x)\pi}{2}+\frac{2\pi y}{2}=\pi x+(r-y)\pi+(r-x)\pi+\pi y=2\pi r \text{ c.v.d.}$$

Quesito 3

Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x)=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\frac{e^{t^2}}{|t|+1}dt$$

nel punto P di ascissa x = π/2.

Il punto ad ascissa $x=\frac{\pi}{2}$ ha ordinata $y=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}\frac{e^{t^2}}{|t|+1}dt=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{e^{t^2}}{|t|+1}dt=0$ per cui la tangente in $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ ha equazione $y=m\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ dove $m=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$. La derivata della funzione $f(x)=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\frac{e^{t^2}}{|t|+1}dt$, per il teorema della derivata di una funzione integrale, è

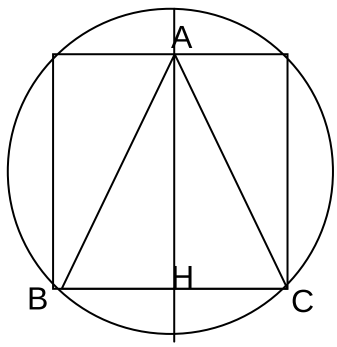
$$f'(x)=\frac{d\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{dx}\cdot\left[\frac{e^{t^2}}{|t|+1}\right]_{t=\sin\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{e^{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|+1}$$ per cui

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{e^{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|+1}=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{e}}{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\sqrt{e}}{2}$. In conclusione l'equazione della tangente è $y=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\sqrt{e}}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

Quesito 4

Siano dati una sfera di raggio *r*, il cubo in essa inscritto e il cono circolare retto inscritto nel cubo. Si scelga a caso un punto all'interno della sfera: si determini la probabilità che tale punto risulti interno al cono.

Consideriamo la figura seguente che raffigura in sezione la sfera circoscritta al cubo a sua volta circoscritto al cono equilatero.



Poiché il diametro della sfera è lungo 2r e coincide con la diagonale del quadrato di lato BC, il lato del quadrato BC misura $\overline{\mathrm{BC}}=\frac{2r\sqrt{3}}{3}$. Il triangolo ABC è isoscele con base ed altezza coincidenti con lo spigolo per cui per cui il volume del cono è $V_C=\frac{\left(\pi\cdot\overline{\mathrm{HC}}^2\right)\cdot\overline{\mathrm{AH}}}{3}=\frac{\pi\cdot\left(\frac{r\sqrt{3}}{3}\right)^2\cdot\frac{2r\sqrt{3}}{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi r^3$ mentre il volume della sfera è $V_S=\frac{4}{3}\pi r^3$. In definitiva la probabilità che il punto scelto a caso ricada nel cono è $p=\frac{V_C}{V_S}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi r^3}=\frac{\sqrt{3}}{18}\cong 9{,}6\%$.

Quesito 5

Nell' omotetia di centro O(0,0) e rapporto k = -4, si determini l'equazione della circonferenza corrispondente alla $x^2+y^2-2x+4y=0$. Si confrontino fra di loro i centri e i raggi delle due circonferenze.

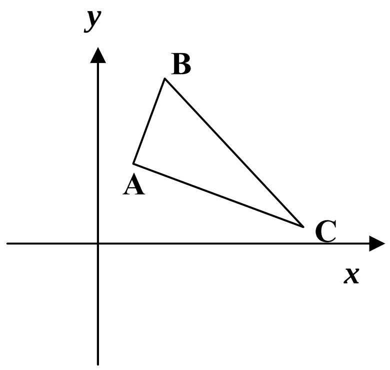
La circonferenza di equazione $x^2+y^2-2x+4y=0$ ha centro in $C(a,b)=(1,-2)$ e raggio $R=\sqrt{(1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$.

L'omotetia di centro O(0,0) e rapporto k=-4 è definita dalla trasformazione $\omega_{O,k}:\begin{cases}X=-4x\\ Y=-4y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{X}{4}\\ y=-\dfrac{Y}{4}\end{cases}$. Sostituendo nell'equazione della circonferenza si ha: $\left(-\frac{X}{4}\right)^2+\left(-\frac{Y}{4}\right)^2-2\left(-\frac{X}{4}\right)+4\left(-\frac{Y}{4}\right)=0\Rightarrow X^2+Y^2+8X-16Y=0$. La circonferenza ottenuta tramite l'omotetia ha centro in $C'(a',b')=(-4,8)$ e raggio $R'=\sqrt{(-4)^2+(8)^2}=4\sqrt{5}$. Quindi le coordinate del centro della circonferenza trasformata si ricavano da quelle della circonferenza di partenza moltiplicandole per il fattore di trasformazione, mentre il raggio si ricava da quello di partenza moltiplicandolo per il valore assoluto del fattore di trasformazione, cioè $\begin{cases}C'=(ka,kb)\\ R'=|k|\cdot R\end{cases}$.

Quesito 6

Dati due punti A e B distanti tra loro 5 cm, si dica qual è il luogo dei punti C dello spazio tali che il triangolo ABC sia rettangolo in A ed abbia area uguale a 1 cm^2

Consideriamo la figura seguente



Dovendo essere l'area pari a $1\,\text{cm}^2$ e poiché $\overline{\text{AB}}=5\,\text{cm}$ il cateto AC misura $\overline{\text{AC}}=\frac{2}{5}\text{cm}$. Affinché i triangoli ABC siano rettangoli in A, i punti C devono appartenere al piano α passante per A perpendicolare alla retta AB. Affinché l'area del triangolo sia uguale a $1\,\text{cm}^2$ i punti devono appartenere alla circonferenza contenuta in α di centro A e raggio uguale ad $\overline{\text{AC}}=\frac{2}{5}\text{cm}$. Cioè nel riferimento cartesiano di cui sopra, indicando con $A(a,b)$ il vertice in cui il triangolo ABC è rettangolo, il luogo richiesto è la circonferenza di equazione $(x-a)^2+(y-b)^2=\frac{4}{25}$. In altro modo, affinché il triangolo ABC sia rettangolo in A ed abbia area costante e pari a $1\,\mathrm{cm}^2$, la distanza di C da A deve essere costantemente pari ad $\overline{\mathrm{AC}}=\frac{2}{5}\mathrm{cm}$ e cioè, ricordando la definizione di distanza si deve avere $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=\frac{2}{5}$, da cui elevando al quadrato ambo i membri si riottiene il luogo di equazione $(x-a)^2+(y-b)^2=\frac{4}{25}$.

Quesito 7

Si discuta il seguente sistema lineare omogeneo in relazione al parametro reale λ e si determinino in ogni caso le eventuali soluzioni:

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ (\lambda-1)x+\lambda y+4z=0 \\ \lambda x+5y+(2\lambda+1)z=0 \end{cases}$$

Calcoliamo il determinante della matrice dei coefficienti:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \lambda-1 & \lambda & 4 \\ \lambda & 5 & 2\lambda+1 \end{vmatrix}=\lambda(2\lambda+1)+8\lambda+15(\lambda-1)-3\lambda^2-8(\lambda-1)(2\lambda+1)-20=(3-\lambda)(5\lambda-11)$$

per cui per il teorema di Cramer, il sistema è determinato se $\lambda\neq 3\wedge\lambda\neq\frac{11}{5}$.

Se $\lambda=3$ il sistema diventa $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \\ 3x+5y+7z=0 \end{cases}$ in cui si nota che sommando le prime due equazioni otteniamo la terza. Quindi, essendoci 3 variabili e due equazioni linearmente indipendenti, il sistema presenterà $\infty^{3-2}=\infty^1$ soluzioni del tipo $(x,y,z)=(z,-2z,z)$.

Se $\lambda=\frac{11}{5}$ il sistema diventa $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 6x+11y+20z=0 \\ 11x+25y+27z=0 \end{cases}$ ed anche in tal caso essendoci 3 variabili e due equazioni linearmente indipendenti, il sistema presenterà $\infty^{3-2}=\infty^1$ soluzioni del tipo $(x,y,z)=(-7z,2z,z)$.

Per $\lambda\neq 3\wedge\lambda\neq\frac{11}{5}$ il sistema è determinato e presenterà un'unica soluzione, ed essendo omogeneo, la soluzione unica è la soluzione banale $(x,y,z)=(0,0,0)$.

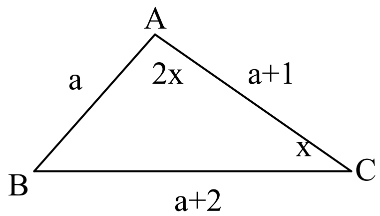
In conclusione il sistema presenta

- 1 soluzione coincidente con quella banale $(x, y, z) = (0,0,0)$ per $\lambda \neq 3 \wedge \lambda \neq \frac{11}{5}$
- ∞^1 soluzioni per $\lambda = 3 \vee \lambda = \frac{11}{5}$.

Quesito 8

Le lunghezze dei lati di un triangolo sono numeri interi consecutivi e l'angolo di maggior ampiezza è il doppio di quello di ampiezza minore. Si calcolino la lunghezza del lato minore e il coseno dell'angolo minore.

Consideriamo la figura seguente.



Poniamo $\overline{AB} = a, \overline{AC} = a+1, \overline{BC} = a+2, B\hat{A}C = 2x, B\hat{C}A = x$ in cui abbiamo sfruttato il risultato per cui in un triangolo ad angolo maggiore si oppone il lato maggiore. Avendo posto come angolo di maggiore ampiezza $B\hat{A}C = 2x$ deve aversi $B\hat{A}C > A\hat{B}C \Rightarrow 2x > 180° - 3x \Rightarrow x > 36°$**,** mentre avendo posto come angolo di minore ampiezza $B\hat{C}A = x$ deve aversi $B\hat{C}A < B\hat{A}C \Rightarrow x < 180° - 3x \Rightarrow x < 45°$. In definitiva la condizione da imporre sull'ampiezza x è $36° < x < 45°$ che, ricordando la stretta decrescenza della funzione coseno per $36° < x < 45°$, può essere scritta come $\cos(45°) < \cos(x) < \cos(36°) \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \cos(x) < \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

In un triangolo la somma di due lati è maggiore del terzo lato e, ricordando che le misure del lati sono numeri positivi e che in questo caso specifico sono numeri interi, deve aversi:

$$\begin{cases} a > 0 \\ a+1 > 0 \\ a+2 > 0 \\ a+a+1 > a+2 \\ a+a+2 > a+1 \\ a+1+a+2 > a \\ a \in N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a > -1 \\ a > -2 \\ a > 1 \\ a > -1 \\ a > -3 \\ a \in N \end{cases} \Rightarrow a > 1 \text{ con } a \in N$$

Per il teorema di Carnot si ha:
$(a+1)^2=(a+2)^2+a^2-2a(a+2)\cos(180°-3x)=(a+2)^2+a^2+2a(a+2)\cos(3x)\Rightarrow$
$a^2+2a+3+2a(a+2)\cos(3x)=0\Rightarrow\cos(3x)=-\dfrac{a^2+2a+3}{2a(a+2)}$

Applicando il teorema dei seni si ha:

$$\frac{a}{\sin(x)}=\frac{a+2}{\sin(2x)}\Rightarrow\frac{a+2}{a}=\frac{\sin(2x)}{\sin(x)}=2\cos(x)\Rightarrow\cos(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{a+2}{a}\right).$$

Ricordando che $\cos(3x)=\cos(x)\left[4\cos^2(x)-3\right]$ si ha:

$$-\frac{a^2+2a+3}{2a(a+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{a+2}{a}\right)\cdot\left[\frac{(a+2)^2}{a^2}-3\right]=\frac{(a+2)}{2a}\left(\frac{-2a^2+4a+4}{a^2}\right)\xrightarrow{a>1}$$

$$-\frac{a^2+2a+3}{(a+2)}=(a+2)\left(\frac{-2a^2+4a+4}{a^2}\right)\Rightarrow$$

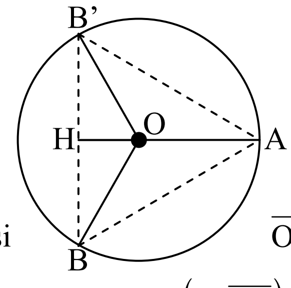
$$-a^2\left(a^2+2a+3\right)=(a+2)^2\left(-2a^2+4a+4\right)\Rightarrow(a-4)(a+1)^2(a+4)=0\rightarrow\left\langle\begin{array}{l}a=4\\a=-1\\a=-4\end{array}\right.$$

La soluzione accettabile è $a=4$ cui corrisponde $\cos(x)=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a+2}{a}\right)\right]_{a=4}=\frac{3}{4}$. Notiamo come anche il coseno dell'angolo minore rispetta la condizione imposta dalla geometria del problema $\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos(x)<\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

Quesito 9

Si consideri un cerchio di centro O e raggio *r* e sia A un punto della circonferenza. Sia inoltre OB un raggio mobile che forma l'angolo 2x con OA. Facendo ruotare la figura attorno ad OA, il segmento AB genera la superficie laterale di un cono. Come deve essere scelta in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza x dell'angolo perché quest'area sia massima?

Si consideri la figura seguente ottenuta ruotando attorno ad OA la figura AOB.



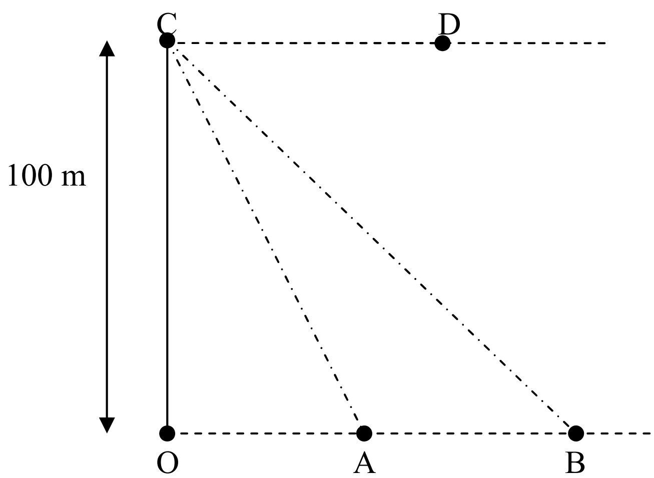
Per ipotesi $\overline{OA}=\overline{OB}=r, A\hat{O}B=2x, 0°<x<90°$. La superficie laterale del cono è $S_l=\left(\pi\cdot\overline{HB}\right)\cdot\overline{AB}$. Per il teorema di Carnot $\overline{AB}=\sqrt{r^2+r^2-2r^2\cos(2x)}=\sqrt{4r^2\sin^2(x)}=2r\sin(x)$, mentre per il teorema dei seni

$\overline{HB} = \overline{OB} \cdot \sin\left(H\hat{O}B\right) = r \cdot \sin(180° - 2x) = r \cdot \sin(2x)$. La superficie laterale vale allora $S_l = 2\pi r^2 \cdot \sin(x) \cdot \sin(2x)$. Dobbiamo massimizzare la funzione $f(x) = \sin(x) \cdot \sin(2x)$ con $0° < x < 90°$. La massimizzazione la effettuiamo mediante derivazione. La derivata prima della funzione $f(x) = \sin(x) \cdot \sin(2x)$ è $f'(x) = \cos(x) \cdot \sin(2x) + 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(2x) = 3\sin(x)\left[1 - 2\sin^2(x)\right]$ che è positiva per $\sin(x) < -\frac{1}{\sqrt{2}} \vee 0 < \sin(x) < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Nell'intervallo (0°,90°) la derivata prima è positiva per $0 < \sin(x) < \frac{1}{\sqrt{2}}$ e cioè per $0° < x < 45°$ e negativa per $45° < x < 90°$. Quindi la funzione $f(x) = \sin(x) \cdot \sin(2x)$ assume massimo per $x = 45°$ cui corrisponde la superficie laterale massima $S_{l,\max} = 2\pi r^2 \cdot \sin(45°) \cdot \sin(90°) = \pi r^2 \sqrt{2}$.

Quesito 10

Un turista, che osserva un lago scozzese dalla cima di un fiordo alto 100 metri, vede spuntare la testa di un mostro acquatico in un punto per il quale misura un angolo di depressione di 18,45°. Il mostro, che nuota in linea retta allontanandosi dall'osservatore, si immerge, per riemergere cinque minuti più tardi in un punto per cui l'angolo di depressione vale 14,05°. Con che velocità, in metri all'ora, sta nuotando il mostro?

Si consideri la figura seguente.



Per ipotesi $A\hat{C}D = 18{,}45°, B\hat{C}D = 14{,}05°$. I segmenti OA ed OB misurano

$\overline{OA} = \overline{OC} \cdot \tan\left(O\hat{C}A\right) = 100 \cdot \tan(90° - 18{,}45°) \cong 300\,\text{m}$,

$\overline{OB} = \overline{OC} \cdot \tan\left(O\hat{C}B\right) = 100 \cdot \tan(90° - 14{,}05°) \cong 400\,\text{m}$

per cui $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = 100\,\text{m}$; quindi il mostro percorre il tratto AB con una velocità $v = \frac{s}{t} = \frac{100[\text{m}]}{5[\text{min}]} = \frac{100[\text{m}]}{\frac{1}{12}[\text{h}]} = 1200\,[\text{m}] \cdot [\text{h}]^{-1}$.