
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO
LICEO DELLA COMUNICAZIONE
SESSIONE SUPPLETIVA
Tema di: MATEMATICA
a. s. 2009-2010

PROBLEMA 1

In un sistema di assi cartesiani ortogonali $O x y$ una curva γ ha per equazione

$$y = \frac{3(x-1)^2}{ax^2 + bx + c}.$$

1. Si calcolino i valori delle costanti reali a , b , c , sapendo che γ ha per asintoti le rette di equazioni $y = 3$ e $x = -2$, e passa per il punto $(3, 12/5)$.
2. Si studi la funzione così ottenuta e si disegni il relativo grafico.
3. L'equazione di γ può porsi sotto la forma:

$$y = 3 + \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x+2}.$$

Si determinino le costanti α e β

4. Si calcoli l'area della superficie piana, finita, delimitata da γ , dall'asse x e dalle rette $x = 4$ e $x = k$, essendo k l'ascissa del punto in cui la curva incontra l'asintoto orizzontale.

PROBLEMA 2

Sia data la funzione $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

1. Si determini il dominio di $f(x)$ e si dica se la funzione è continua e derivabile in ogni punto di esso.
2. Si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ .
3. Si calcoli l'area della parte di piano R racchiusa dal grafico γ e dal semiasse positivo delle ascisse.
4. La regione R genera, nella rotazione attorno all'asse delle ascisse, un solido S . In S si inscriba un cono circolare retto con vertice nell'origine. Si determinino raggio e altezza del cono, affinché il suo volume sia massimo.

QUESTIONARIO

1. Si determini il campo di esistenza della funzione:

$$y = \frac{\sqrt{2\sin(2x) - \sqrt{3}}}{\log \cos x}, \text{ con } 0 \leq x \leq 2\pi.$$

2. Si calcoli il limite della funzione $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$, quando x tende a 1^+ .

3. Si provi che le due funzioni $f(x) = \cos^2 x$ e $g(x) = -\sin^2 x$ hanno le derivate uguali e se ne dia una giustificazione.

4. Un rettangolo ABCD è tale che risulta $\overline{AB} = 4$ e $\overline{BC} = 1$.

Si determini il triangolo isoscele di area minima circoscritto al rettangolo e tale che la base contenga il segmento AB.

5. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di piano limitata dalla curva $y = x^2 - x^3$ e dall'asse delle x .

6. In cima ad una roccia a picco sulla riva di un fiume è stata costruita una torretta d'osservazione alta 11 metri. Le ampiezze degli angoli di depressione per un punto situato sulla riva opposta del fiume, misurate rispettivamente dalla base e dalla sommità della torretta, sono pari a 18° e 24° . Si determini la larghezza del fiume in quel punto.

7. Considerata la funzione $f(x) = \frac{3^{3x} - a^x}{6^x - 5^x}$, dove a è una costante reale positiva, si determini tale costante, sapendo che $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$.

8. Su un piano orizzontale α si pongono un cono circolare retto, il cui raggio di base è r e l'altezza $2r$, e una sfera di raggio r . A quale distanza x dal piano α bisogna segare questi due solidi con un piano orizzontale β , perché la somma delle aree delle sezioni così ottenute sia massima?

9. Si dimostri che per gli zeri x_1 e x_2 di una funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$ vale la relazione $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$ e si dia una interpretazione geometrica della affermazione dimostrata.

10. Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$, nell'intervallo $1 \leq x \leq 2$.

PROBLEMA 1

Punto 1

La funzione deve avere $x = -2$ come asintoto verticale e $y = 3$ come asintoto orizzontale.

La retta $x = -2$ è asintoto verticale se $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3(x-1)^2}{ax^2 + bx + c} = \frac{27}{4a - 2b + c} = \infty$ e quindi se si annulla il denominatore, cioè $4a - 2b + c = 0$.

La retta $y = 3$ è asintoto orizzontale se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3(x-1)^2}{ax^2 + bx + c} = \frac{3}{a} = 3$ e quindi se $a = 1$.

Il passaggio per $\left(3, \frac{12}{5}\right)$ permette di ricavare la terza condizione $\frac{12}{9a + 3b + c} = \frac{12}{5} \rightarrow 9a + 3b + c = 5$.

Si tratta quindi di risolvere il sistema di tre equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} a = 1 \\ 4a - 2b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2b - c = 4 \\ 3b + c = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -4 \end{cases} \text{ da cui } y = \frac{3(x-1)^2}{x^2 - 4}.$$

Punto 2

Studiamo la funzione $y = \frac{3(x-1)^2}{x^2 - 4}$

- *Dominio*: \mathbb{R} ;
- *Intersezione asse ascisse*: $y = \frac{3(x-1)^2}{x^2 - 4} = 0 \rightarrow x = 1$
- *Intersezione asse ordinate*: $x = 0 \rightarrow y = -\frac{3}{4}$
- *Simmetrie*: la funzione non è né pari né dispari;
- *Positività*: essendo $(x-1)^2 > 0 \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$, la funzione è positiva se $x^2 - 4 > 0$ e quindi se $x < -2 \vee x > 2$;
- *Asintoti verticali*: come indicato nella traccia $x = -2$ è asintoto verticale e in particolare $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3(x-1)^2}{x^2 - 4} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3(x-1)^2}{x^2 - 4} = -\infty$; inoltre $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3(x-1)^2}{x^2 - 4} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-1)^2}{x^2 - 4} = +\infty$ per cui anche $x = 2$ è asintoto verticale;
- *Asintoti orizzontali*: come indicato nella traccia $y = 3$ è asintoto orizzontale destro e sinistro;
- *Asintoti obliqui*: non ve ne sono in quanto la funzione è razionale fratta e la presenza dell'asintoto orizzontale esclude la presenza di quello obliquo;
- *Crescenza e decrescenza*: la derivata prima è

$$f'(x) = \frac{6(x-1)(x^2-4) - 3(x-1)^2 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{6(x-1)(x-4)}{(x^2-4)^2}; \text{essendo}$$

$(x^2-4)^2 > 0 \forall x \in R - \{\pm 2\}$, la derivata prima è positiva se $(x-1)(x-4) > 0$ e quindi se $x < -2 \vee -2 < x < 1 \vee x > 4$ intervalli nei quali la funzione è strettamente crescente; in particolare la funzione presenta un massimo relativo in $M(1,0)$ ed un minimo relativo in $m\left(4, \frac{9}{4}\right)$;

- *Concavità e convessità*: la derivata seconda è $f''(x) = -\frac{6(2x^3 - 15x^2 + 24x - 20)}{(x^2-4)^3}$; per

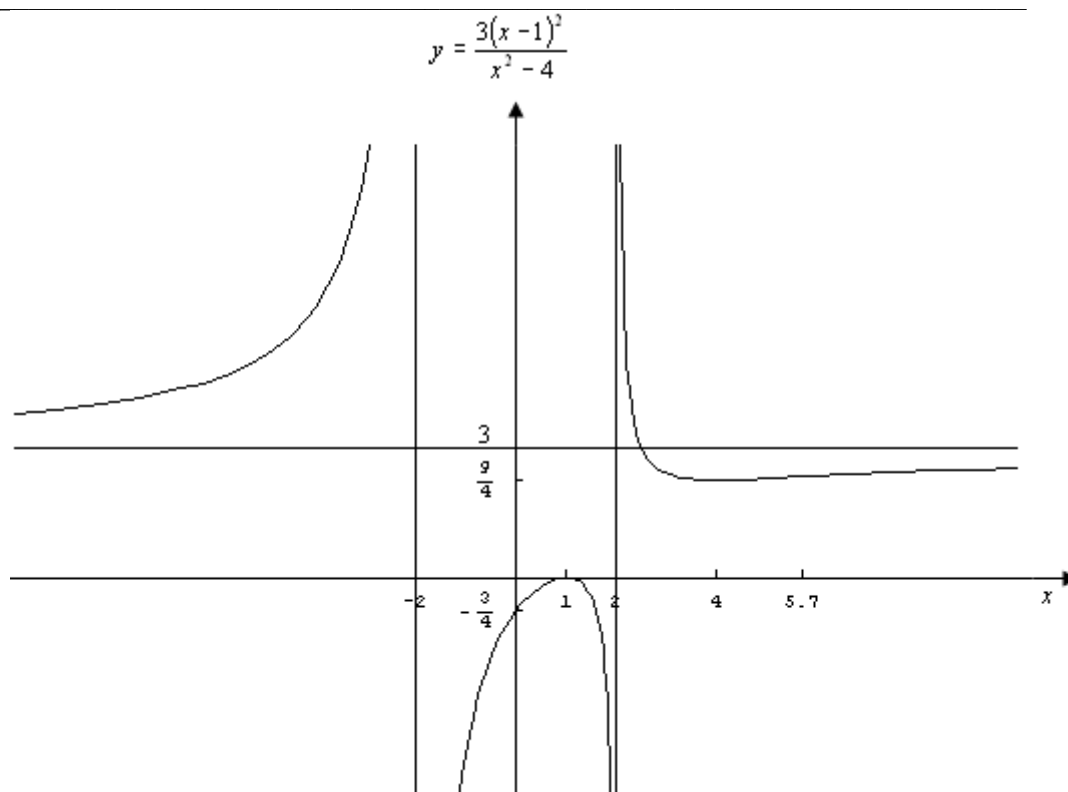
ricavare i flessi basta trovare gli zeri della derivata seconda e quindi risolvere l'equazione $g(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x - 20 = 0$; in particolare attraverso considerazioni basate sul comportamento agli estremi, sulla crescita e concavità di $g(x)$ deduciamo che $g(x)$ ammette un solo zero appartenente all'intervallo $(5,6)$: infatti in tale intervallo è strettamente crescente ed assume valore discorde agli estremi per cui a norma del teorema degli zeri esiste un unico zero in $(5,6)$. Tale zero è ricavabile attraverso uno dei metodi numerici come quello di Newton-Raphson che permette di ricavare ricorsivamente lo zero attraverso la formula $x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$ con punto iniziale $x_0 = 6$.

Di seguito il metodo in forma tabellare

n	x_n	x_{n+1}	$\text{err} = x_{n+1} - x_n $
0	6,000	5,733	
1	5,733	5,704	0,267
2	5,704	5,703	0,030
3	5,703	5,703	0,000

Con un errore inferiore a 10^{-2} l'unico flesso a tangente obliqua ha ascissa $x \approx 5,70$.

Il grafico è di seguito presentato:



Punto 3

Effettuando il minimo comune multiplo si ha:

$$f(x) = \frac{3(x-1)^2}{x^2-4} = 3 + \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x+2} \rightarrow \frac{3x^2-6x+3}{x^2-4} = \frac{3x^2 + (\alpha+\beta)x + (2\alpha-2\beta-12)}{x^2-4}$$

e sfruttando il principio di identità dei polinomi ricaviamo il seguente sistema di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -6 \\ 2\alpha - 2\beta - 12 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 2\beta = -12 \\ 2\alpha - 2\beta = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{3}{4} \\ \beta = -\frac{27}{4} \end{cases} \rightarrow f(x) = \frac{3(x-1)^2}{x^2-4} = 3 + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{x-2} \right) - \frac{27}{4} \left(\frac{1}{x+2} \right)$$

Punto 4

Per calcolare le intersezioni della funzione con l'asintoto orizzontale basta risolvere l'equazione

$$\frac{3(x-1)^2}{x^2-4} = 3 \rightarrow (x-1)^2 = x^2 - 4 \rightarrow -2x + 1 = -4 \rightarrow x = \frac{5}{2}; \text{ quindi la funzione interseca l'asintoto}$$

orizzontale nel punto ad ascissa $x = \frac{5}{2}$.

L'area richiesta è quindi pari a

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{5}{2}}^4 \left[3 + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{x-2} \right) - \frac{27}{4} \left(\frac{1}{x+2} \right) \right] dx = \left[3x + \frac{3}{4} \ln|x-2| - \frac{27}{4} \ln|x+2| \right]_{\frac{5}{2}}^4 = \\ &= 12 + \frac{3}{4} \ln 2 - \frac{27}{4} \ln 6 - \frac{15}{2} - \frac{3}{4} \ln \frac{1}{2} + \frac{27}{4} \ln \frac{9}{2} = \\ &= 12 + \frac{3}{4} \ln 2 - \frac{27}{4} \ln 6 - \frac{15}{2} + \frac{3}{4} \ln 2 + \frac{27}{4} \ln \frac{9}{2} = \\ &= \frac{9}{2} + \frac{3}{2} \ln 2 + \frac{27}{4} \ln \frac{3}{4} = \frac{9}{2} + 3 \ln \frac{9\sqrt[4]{3}}{16} \end{aligned}$$

PROBLEMA 2

Punto 1

Il dominio della funzione $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ è dato da: $1-x^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$.

Nel dominio la funzione è continua.

La derivata prima è $f'(x) = \sqrt{1-x^2} + x \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ da cui

deduciamo che la funzione non è derivabile nei punti $x = \pm 1$ in cui presenta una tangente verticale; infatti $\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -\infty$. In conclusione la funzione è derivabile in tutti i punti del dominio esclusi i punti con ascisse $x = \pm 1$.

Punto 2

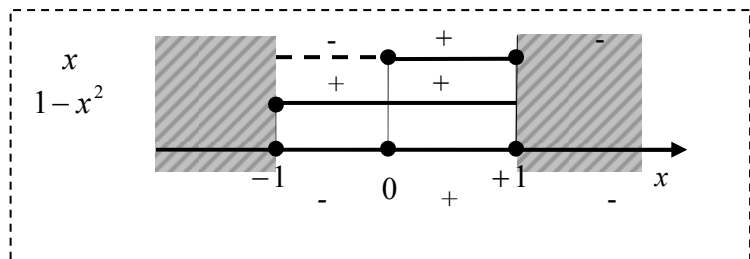
Studiamo la funzione $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

- *Dominio*: $-1 \leq x \leq 1$;
- *Intersezione asse ascisse*: $f(x) = x\sqrt{1-x^2} = 0 \rightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1$
- *Intersezione asse ordinate*: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0$
- *Simmetrie*: la funzione è dispari in quanto $f(-x) = -x\sqrt{1-(-x)^2} = -x\sqrt{1-x^2} = -f(x)$
- *Positività*:

$$x > 0$$

$$1-x^2 > 0 \Rightarrow -1 < x < 1$$

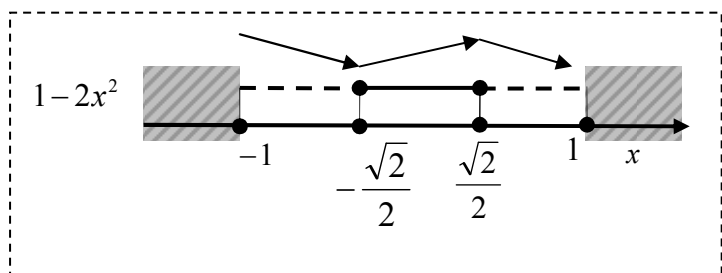
$$f(x) > 0 \Rightarrow 0 < x < 1$$



- *Asintoti verticali*: non ve ne sono in quanto $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$;
- *Asintoti orizzontali*: non esistono visto il dominio chiuso $[-1, 1]$;
- *Asintoti obliqui*: non esistono visto il dominio chiuso $[-1, 1]$;
- *Crescenza e decrescenza*: la

derivata prima è $f'(x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$;

il quadro dei segni è a lato presentato: da esso deduciamo la presenza di un minimo relativo



$$m = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2} \right) \text{ ed un massimo relativo } M = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right);$$

- *Concavità e convessità*: la derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{-4x\sqrt{1-x^2} - (1-2x^2) \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{-4x(1-x^2) + x(1-2x^2)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2x^3 - 3x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ per cui,}$$

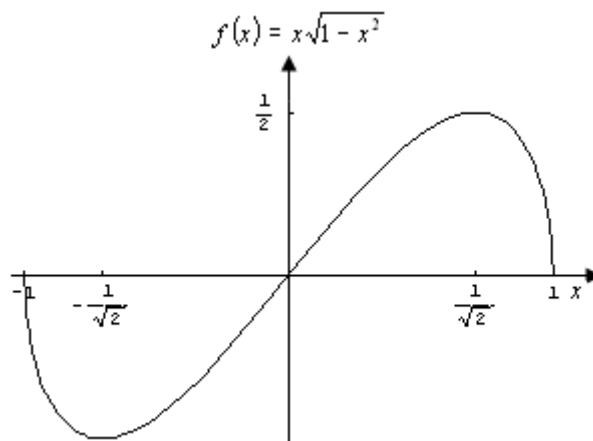
ricordando che il dominio è $-1 \leq x \leq 1$, si ha

$$f''(x) > 0 \rightarrow \begin{cases} 2x^3 - 3x > 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\sqrt{\frac{3}{2}} < x < 0 \vee x > \sqrt{\frac{3}{2}} \\ -1 < x < 1 \end{cases} \rightarrow -1 < x < 0 \text{ per cui la funzione}$$

presenta concavità verso l'alto in $(-1,0)$ e verso il basso in $(0,1)$; la funzione presenta

quindi un flesso a tangente obliqua $F = (0,0)$ con tangente inflessionale di equazione $y = x$.

Di seguito il grafico:



Punto 3

$$\text{L'area richiesta è pari a } S = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx = \int_0^1 -\frac{1}{2} \frac{d(1-x^2)}{dx} \sqrt{1-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Punto 4

Sia $P(x, x\sqrt{1-x^2})$ con $0 < x < 1$ un punto generico appartenente al ramo del primo quadrante della funzione $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$. Il raggio del cono inscritto sarà pari all'ordinata del punto P e cioè

$R = x\sqrt{1-x^2}$ mentre l'altezza sarà pari all'ascissa e cioè $h = x$. Il volume del cono sarà allora

$$V(x) = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot x^2 \cdot (1-x^2) \cdot x = \frac{\pi}{3} \cdot (x^3 - x^5). \text{ La massimizzazione la effettuiamo mediante}$$

derivazione: la derivata prima è $V'(x) = \frac{\pi}{3} \cdot (3x^2 - 5x^4)$ per cui la funzione volume, ricordando la limitazione geometrica $0 < x < 1$ è strettamente crescente in $\left(0, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$ e strettamente decrescente in $\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, 1\right)$ da cui deduciamo che il volume è massimo quando l'altezza è pari a $x = \sqrt{\frac{3}{5}}$ ed il raggio è pari a $R = \frac{\sqrt{6}}{5}$. Il valore massimo è pertanto pari a $V\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{3}{5} \sqrt{\frac{3}{5}} - \frac{9}{25} \sqrt{\frac{3}{5}}\right) = \frac{2\pi}{25} \sqrt{\frac{3}{5}}$.

QUESTIONARIO

Quesito 1

Il dominio della funzione $y = \frac{\sqrt{2\sin(2x) - \sqrt{3}}}{\log \cos x}$, limitandoci all'intervallo $[0, 2\pi]$, è dato dalla risoluzione del seguente sistema:

$$D: \begin{cases} 2\sin(2x) - \sqrt{3} \geq 0 \\ \cos x > 0 \\ \log \cos x \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sin(2x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x > 0 \\ \cos x \neq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ 0 < x < \frac{\pi}{2} \vee \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \\ x \neq 0 \wedge x \neq 2\pi \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \vee \frac{7\pi}{6} \leq x \leq \frac{4\pi}{3} \\ 0 < x < \frac{\pi}{2} \vee \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \\ x \neq 0 \wedge x \neq 2\pi \end{cases} \rightarrow D: \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right]$$

Quesito 2

Scriviamo il limite nel seguente modo:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}} \right]$$

Il termine $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}}$ può essere così razionalizzato:

$$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}} = \frac{(\sqrt{x-1}) \cdot (\sqrt{x+1})}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1} \cdot (\sqrt{x+1})} = \frac{x-1}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1} \cdot (\sqrt{x+1})} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} \cdot (\sqrt{x+1})}$$

Il limite così diventa:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} \cdot (\sqrt{x+1})} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} \cdot (\sqrt{x+1})} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{0}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Quesito 3

La derivata della funzione $f(x) = \cos^2 x$ è $f'(x) = 2 \cdot \cos x \cdot \frac{d(\cos x)}{dx} = -2 \cdot \sin x \cdot \cos x$;

analogamente la derivata della funzione $g(x) = -\sin^2 x$ è

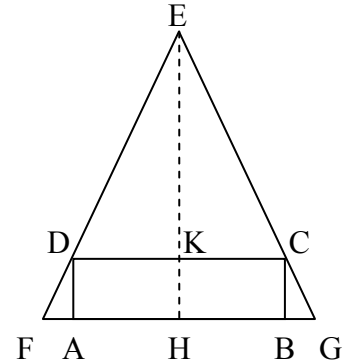
$f(x) = -2 \cdot \sin x \cdot \frac{d(\sin x)}{dx} = -2 \cdot \sin x \cdot \cos x$; le due derivate coincidono in quanto le due funzioni

differiscono per una costante la cui derivata è nulla: infatti $f(x) = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 + g(x)$.

Quesito 4

Consideriamo la figura a lato.

Poniamo $\overline{EK} = x$ con $x > 0$. I triangoli EKC ed EHG sono simili, essendo rettangoli con un angolo in comune, per cui vale la seguente proporzione tra lati omologhi $\overline{EK} : \overline{KC} = \overline{EH} : \overline{HG}$, cioè $x : 2 = (x+1) : \overline{HG}$ da cui $\overline{HG} = 2\left(\frac{x+1}{x}\right)$. L'area del triangolo EFG è



dunque pari a $S(x) = \frac{\overline{FG} \cdot \overline{EH}}{2} = \frac{4\left(\frac{x+1}{x}\right) \cdot (x+1)}{2} = 2\frac{(x+1)^2}{x}$.

La minimizzazione la effettuiamo mediante derivazione: la derivata prima è

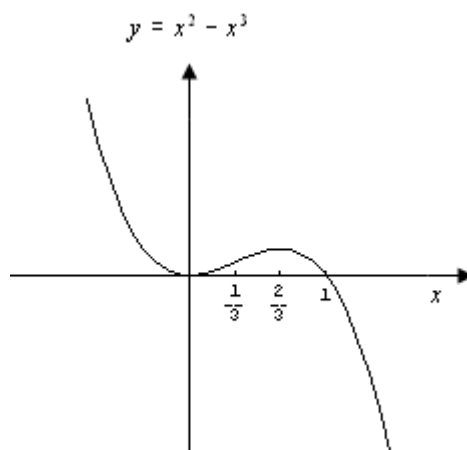
$S'(x) = 2\left[\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}\right]$ che risulta essere positiva per $x < -1 \vee x > 1$; ricordando la limitazione

geometrica $x > 0$, possiamo affermare che la funzione è strettamente decrescente in $(0,1)$ e strettamente crescente in $(1,+\infty)$ per cui è presente un minimo per $x = 1$ cui corrisponde il valore minimo dell'area pari a $S(1) = 8$.

Quesito 5

La cubica $y = x^2 - x^3$ interseca l'asse delle ascisse nei punti $(0,0)$ e $(1,0)$, quello delle ordinate in $(0,0)$, è positiva in $(-\infty,0) \cup (0,1)$, presenta un minimo relativo in $m(0,0)$, un massimo relativo in

$M\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{27}\right)$ ed un flesso a tangente obliqua in $F\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{27}\right)$. Il suo grafico è presentato di seguito.



Il volume richiesto è pari a

$$V = \pi \int_0^1 (x^2 - x^3)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^6 - 2x^5 + x^4) dx = \pi \left[\frac{x^7}{7} - \frac{x^6}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{\pi}{105}.$$

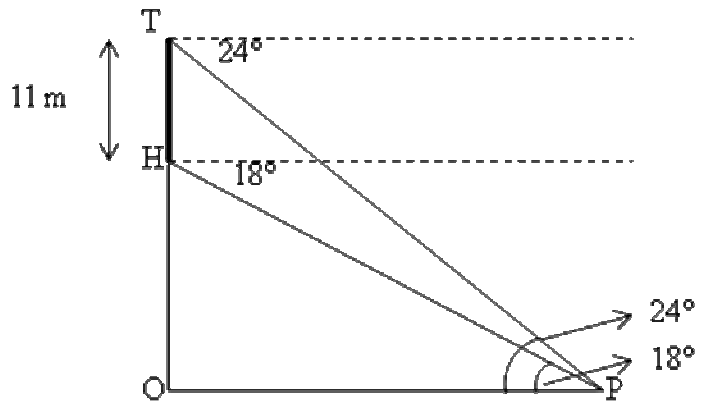
Quesito 6

Consideriamo la figura a lato.

Dobbiamo calcolare la lunghezza del segmento PO. Applicando il teorema dei triangoli rettangoli ai triangoli POT e OH si ha la relazione

$$\overline{PO} \cdot \tan(24^\circ) - \overline{PO} \cdot \tan(18^\circ) = 11 \text{ da cui}$$

$$\overline{PO} \cong 91 \text{ m}$$



Quesito 7

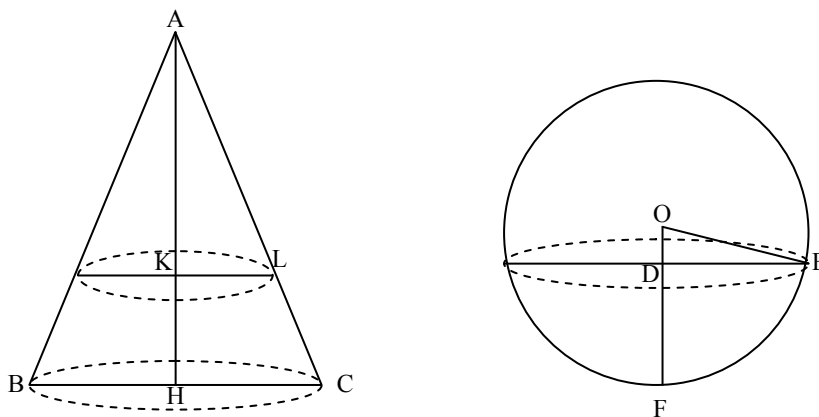
Il limite richiesto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ per cui possiamo applicare il teorema di

de l'Hospital: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{3x} - a^x}{6^x - 5^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \ln 3 \cdot 3^{3x} - \ln a \cdot a^x}{\ln 6 \cdot 6^x - \ln 5 \cdot 5^x} = \frac{3 \ln 3 - \ln a}{\ln 6 - \ln 5} = \frac{\ln \frac{27}{a}}{\ln \frac{6}{5}}.$ Imponendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{3x} - a^x}{6^x - 5^x} = 2 \text{ si ha } \frac{\ln \frac{27}{a}}{\ln \frac{6}{5}} = 2 \rightarrow \ln \frac{27}{a} = 2 \ln \frac{6}{5} \rightarrow \ln \frac{27}{a} = \ln \frac{36}{25} \rightarrow \frac{27}{a} = \frac{36}{25} \rightarrow a = \frac{75}{4}.$$

Quesito 8

Si consideri la figura seguente:



Indichiamo con x , $0 < x < 2r$, la distanza tra piani α e β .

Le intersezioni del piano β con il cono e la sfera sono due circonferenze rispettivamente di raggio $R_C = \overline{KL}$ e $R_S = \overline{DE}$. La somma delle aree delle sezioni è quindi $S = \pi \cdot R_C^2 + \pi \cdot R_S^2$. Calcoliamo ora i due raggi:

- Raggio R_C

I triangoli AKL e AHC sono simili essendo entrambi rettangoli con un angolo in comune per cui vale la seguente proporzione tra lati omologhi: $\overline{AK} : \overline{KL} = \overline{AH} : \overline{HC}$ da cui

$$\overline{KL} = \frac{\overline{AK} \cdot \overline{HC}}{\overline{AH}} = \frac{(2r-x) \cdot r}{2r} = \left(r - \frac{x}{2}\right) \text{ per cui l'area della circonferenza di raggio}$$

$$\overline{KL} = \left(r - \frac{x}{2}\right) \text{ è } A_C = \pi \cdot R_C^2 = \pi \cdot \left(r - \frac{x}{2}\right)^2;$$

- Raggio R_S

Il triangolo ODE è rettangolo per cui $R_S = \overline{DE} = \sqrt{\overline{OE}^2 - \overline{OD}^2} = \sqrt{r^2 - (r-x)^2} = \sqrt{2rx - x^2}$

per cui l'area della circonferenza di raggio $R_S = \overline{DE} = \sqrt{2rx - x^2}$ è $A_S = \pi \cdot R_S^2 = \pi \cdot (2rx - x^2)$.

La somma delle aree è quindi $S(x) = \pi \cdot \left(r - \frac{x}{2}\right)^2 + \pi \cdot (2rx - x^2) = \pi \cdot \left(-\frac{3}{4}x^2 + rx + r^2\right)$ con

$0 < x < 2r$. Notiamo che la funzione $S(x)$ è una parabola con concavità verso il basso che presenta

il massimo nell'ascissa del vertice $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{r}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}r$; quindi la somma delle due aree è

massima per $x_V = \frac{2}{3}r$ e vale $S\left(\frac{2}{3}r\right) = \pi \cdot \left(-\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9}r^2 + r \cdot \frac{2}{3}r + r^2\right) = \frac{4}{3}\pi r^2$.

Alternativamente possiamo proseguire mediante derivazione: la derivata prima della funzione $S(x)$

è $S'(x) = \pi \cdot \left(-\frac{3}{2}x + r\right)$ per cui $S'(x) > 0 \rightarrow x < \frac{2}{3}r$ da cui deduciamo che $S(x)$ è strettamente

crescente in $\left(0, \frac{2}{3}r\right)$ e strettamente decrescente in $\left(\frac{2}{3}r, 2r\right)$; inoltre $S''(x) = -\frac{3}{2}\pi < 0$ per cui

$x = \frac{2}{3}r$ è l'ascissa del massimo.

Quesito 9

Gli zeri dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ sono $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; la

derivata prima di $f(x) = ax^2 + bx + c$ è $f'(x) = 2ax + b$ per cui

$$f'(x_1) = 2a \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) + b = -\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$f'(x_2) = 2a \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) + b = +\sqrt{b^2 - 4ac}$$

da cui deduciamo che $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$.

Per dare un'interpretazione geometrica al risultato ottenuto riscriviamo la somma $[f'(x_1) + f'(x_2)]$:

essa è pari a $f'(x_1) + f'(x_2) = (2ax_1 + b) + (2ax_2 + b) = 2a(x_1 + x_2) + 2b$ e imponendo che sia nulla

otteniamo $(x_1 + x_2) = -\frac{b}{a}$ o equivalentemente $\frac{(x_1 + x_2)}{2} = -\frac{b}{2a}$. La relazione appena ricavata ci

dice che la semisomma delle soluzioni è pari a $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ che è l'ascissa del vertice; in altri termini gli

zeri della parabola sono simmetrici rispetto alla retta $x = -\frac{b}{2a}$ coincidente con l'asse di simmetria

della parabola.

Quesito 10

Il valor medio di una funzione $f(x)$ in $[a, b]$ è $V_M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$. Nel caso in esame

$V_M = \int_1^2 \left[\frac{e^x(x-1)}{x^2} \right] dx$; applicando l'integrazione per parti si ha

$$\begin{aligned} V_M &= \int_1^2 \left[\frac{e^x(x-1)}{x^2} \right] dx = \left[-\frac{e^x(x-1)}{x} \right]_1^2 + \int_1^2 \left[\frac{1}{x} \cdot (x \cdot e^x + e^x - e^x) \right] dx = \\ &= -\frac{e^2}{2} + \int_1^2 e^x dx = -\frac{e^2}{2} + e^2 - e = \frac{e^2}{2} - e = \frac{e^2 - 2e}{2} \end{aligned}$$