

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

SESSIONE STRAORDINARIA

Tema di: MATEMATICA a.s. 2009-2010

Svolgimento a cura di Nicola De Rosa

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

In un triangolo ABC , l'angolo \hat{B} è doppio dell'angolo \hat{C} e inoltre è $BC = a$

1. Dette BH e CL , rispettivamente, le altezze del triangolo uscenti dai vertici B e C , si consideri il rapporto:

$$\frac{BH^2 + CL^2}{a^2}$$

espresso in funzione di $x = \hat{A}$.

2. Si studi la funzione $f(x)$ così ottenuta e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$, mettendo in evidenza poi la parte di grafico compatibile con i dati del problema.
3. Si dimostri che γ è simmetrica rispetto alla retta $x = \pi$.
4. Si calcoli il valore medio della funzione $f(x)$ nell'intervallo $0 \leq x \leq \pi$.

PROBLEMA 2

Sia data la funzione:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

1. Si verifichi che la curva che la rappresenta è simmetrica rispetto all'origine.
2. Si studi tale funzione e se ne tracci il grafico γ , su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy .
3. Si verifichi che $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \log|x^2 - 1|$ è una funzione primitiva di $f(x)$.
4. Si calcoli l'errore che si commette approssimando l'area racchiusa dalla curva γ , dall'asse x e dalle rette $x = 2$ e $x = 3$ con l'area del trapezio $ABCD$, essendo $A(2, 0)$, $B(3, 0)$, $C(3, f(3))$ e $D(2, f(2))$.

QUESTIONARIO

1. Due osservatori si trovano ai lati opposti di un grattacielo, a livello del suolo. La cima dell'edificio dista 1600 metri dal primo osservatore, che la vede con un angolo di elevazione di 15° . Se il secondo individuo si trova a 650 metri dalla cima del grattacielo, quale è la distanza tra i due osservatori (non tenendo conto dell'ostacolo grattacielo)?
2. Si calcoli il limite della funzione $(1 + \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$ quando x tende a 0.
3. In quanti modi 10 persone possono disporsi su dieci sedili allineati? E attorno ad un tavolo circolare?
4. Si dimostri che ogni funzione $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ dove a, b, c, d sono valori reali con $a \neq 0$, ha un massimo e un minimo relativi oppure non ha estremanti.
5. Si calcoli il volume del solido generato da una rotazione completa attorno all'asse x del triangolo di vertici $A(2, 2)$, $B(6, 4)$, $C(6, 6)$
6. Si dica se esistono numeri reali per i quali vale la seguente uguaglianza:
$$2 + 2^x = \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x + 6\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$$
7. Sia P un punto del piano di coordinate $\left(t + \frac{1}{t}, t - \frac{1}{t}\right)$. Al variare di t ($t \neq 0$), P descrive un luogo geometrico del quale si chiede l'equazione cartesiana e il grafico.
8. Si dimostri che il perimetro di un poligono regolare di n lati, inscritto in una circonferenza di raggio r , quando si fa tendere n all'infinito, tende alla lunghezza della circonferenza.
9. Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = \cos^3 x$ nell'intervallo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
10. Si dimostri che se le diagonali di un quadrilatero sono perpendicolari, la somma dei quadrati di due lati opposti è uguale alla somma dei quadrati degli altri due.

Durata massima della prova: 6 ore.

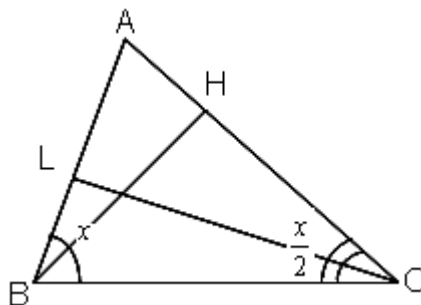
E' consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 1

Punto 1

Consideriamo la figura sottostante.



Si ha:

$$\overline{BH}^2 = a^2 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\overline{CL}^2 = a^2 \cdot \sin^2(x)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\overline{BH}^2 + \overline{CL}^2}{a^2} = \overbrace{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2(x)}^{\frac{1-\cos(x)}{2}} = \frac{1-\cos(x)}{2} + 1 - \cos^2(x) = \\ &= -\cos^2(x) - \frac{\cos(x)}{2} + \frac{3}{2} = \frac{-2\cos^2(x) - \cos(x) + 3}{2} = \frac{(1-\cos(x)) \cdot (2\cos(x) + 3)}{2} \end{aligned}$$

Punto 2

Studiamo la funzione $f(x) = \frac{(1-\cos(x)) \cdot (2\cos(x) + 3)}{2}$ in $[0, 2\pi]$

- *Dominio:* $[0, 2\pi]$;

- *Intersezione asse ascisse:*

$$f(x) = 0 \rightarrow \frac{(1-\cos(x)) \cdot (2\cos(x) + 3)}{2} = 0 \xrightarrow[\forall x \in [0, 2\pi]]{2\cos(x) + 3 > 0} \cos(x) = 1 \rightarrow x = 0 \vee x = 2\pi$$

- *Intersezione asse ordinate:* $x = 0 \rightarrow f(0) = 0$

- *Simmetrie:* la funzione è periodica di periodo $T = 2\pi$ e pari in quanto

$$f(-x) = \frac{(1-\cos(-x)) \cdot (2\cos(-x) + 3)}{2} = \frac{(1-\cos(x)) \cdot (2\cos(x) + 3)}{2} = f(x);$$

- *Positività:* $f(x) > 0 \rightarrow 1 - \cos(x) > 0 \rightarrow \cos(x) < 1 \rightarrow \forall x \in (0, 2\pi)$;

- *Asintoti verticali:* non ve ne sono in quanto la funzione è periodica e limitata;

- *Asintoti orizzontali*: non ve ne sono in quanto la funzione è periodica e limitata;
- *Asintoti obliqui*: non ve ne sono in quanto la funzione è periodica e limitata;
- *Crescenza e decrescenza*: la derivata prima è

$f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) + \frac{\sin(x)}{2} = 2\sin(x) \cdot \left[\cos(x) + \frac{1}{4}\right]$; studiamo il segno dei singoli fattori e poi valutiamo il segno della derivata prima:

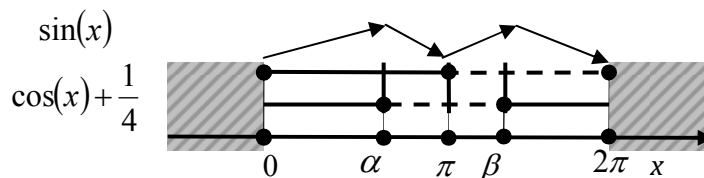
$$\sin(x) > 0 \Rightarrow 0 < x < \pi$$

$$\cos(x) > -\frac{1}{4} \Rightarrow 0 < x < \pi - \arccos\left(\frac{1}{4}\right) \vee \pi + \arccos\left(\frac{1}{4}\right) < x < 2\pi$$

Di conseguenza:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow 0 < x < \pi - \arccos\left(\frac{1}{4}\right) \vee \pi < x < \pi + \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$$

Di seguito il quadro dei segni in cui $\alpha = \pi - \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$, $\beta = \pi + \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$



Dal quadro soprastante deduciamo che la funzione presenta un minimo relativo in

$$m = (\pi, 1) \text{ e due massimi relativi in } M_1 = \left(\alpha, \frac{25}{16}\right), M_2 = \left(\beta, \frac{25}{16}\right);$$

Concavità e convessità: la derivata seconda è

$$f''(x) = 2\cos(2x) + \frac{\cos(x)}{2} = 4\cos^2(x) + \frac{\cos(x)}{2} - 2 = \frac{8\cos^2(x) + \cos(x) - 4}{2} \quad \text{per cui}$$

$$f''(x) > 0 \rightarrow \cos(x) < \frac{-1 - \sqrt{33}}{8} \vee \cos(x) > \frac{-1 + \sqrt{33}}{8} \rightarrow$$

$$0 < x < \arccos\left(\frac{-1 + \sqrt{33}}{8}\right) \vee \pi - \arccos\left(\frac{1 + \sqrt{33}}{8}\right) < x < \pi + \arccos\left(\frac{1 + \sqrt{33}}{8}\right) \vee$$

$$\vee 2\pi - \arccos\left(\frac{-1 + \sqrt{33}}{8}\right) < x < 2\pi$$

Quindi la funzione presenta concavità verso l'alto in

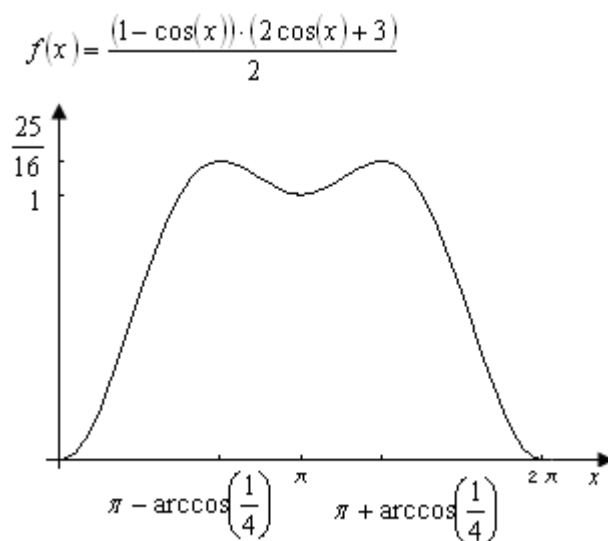
$$\left(0, \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\right)\right) \cup \left(\pi - \arccos\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right), \pi + \arccos\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\right) \cup \\ \cup \left(2\pi - \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\right), 2\pi\right)$$

e presenta quattro flessi a tangente obliqua in

$$x = \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\right) \cong 53,6^\circ, x = \pi - \arccos\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right) \cong 147,5^\circ,$$

$$x = \pi + \arccos\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right) \cong 212,5^\circ, x = 2\pi - \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\right) \cong 306,4^\circ$$

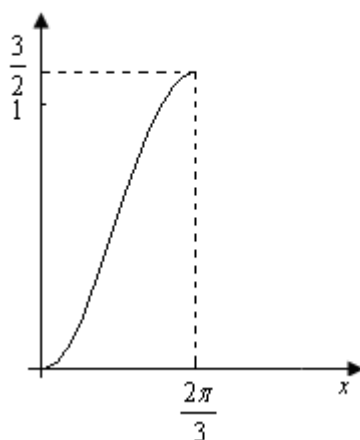
Il grafico è di seguito presentato nell'intervallo $[0, 2\pi]$:



Se consideriamo i limiti geometrici, dobbiamo imporre che l'angolo al vertice $\hat{BAC} = \pi - \frac{3}{2}x$ deve essere compreso tra 0 e π , cioè $0 < \pi - \frac{3}{2}x < \pi \rightarrow 0 < x < \frac{2\pi}{3}$.

Di seguito il grafico per $0 < x < \frac{2\pi}{3}$:

$$f(x) = \frac{(1 - \cos(x)) \cdot (2 \cos(x) + 3)}{2}$$



Punto 3

Una funzione è simmetrica rispetto alla retta $x = k$ se $f(x) = f(2k - x)$. Nel caso in esame

$$f(2\pi - x) = \frac{(1 - \cos(2\pi - x)) \cdot (2 \cos(2\pi - x) + 3)}{2} = \frac{(1 - \cos(x)) \cdot (2 \cos(x) + 3)}{2} = f(x) \text{ per cui } f(x) \text{ è}$$

simmetrica rispetto alla retta $x = \pi$.

Punto 4

Il valor medio di una funzione $f(x)$ in $[a, b]$ è $V_M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$. Nel caso in esame

$$\begin{aligned} V_M &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[-\cos^2(x) - \frac{\cos(x)}{2} + \frac{3}{2} \right] dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[-\left(\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right) - \frac{\cos(x)}{2} + \frac{3}{2} \right] dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[-\frac{\cos(2x)}{2} - \frac{\cos(x)}{2} + 1 \right] dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\sin(2x)}{4} - \frac{\sin(x)}{2} + x \right]_0^\pi = \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1 \end{aligned}$$

PROBLEMA 2

Punto 1

Per dimostrare la simmetria rispetto all'origine bisogna provare che $f(x) = -f(-x)$. In effetti

$$-f(-x) = -\frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = -\frac{-x^3}{x^2 - 1} = \frac{x^3}{x^2 - 1} = f(x).$$

Punto 2

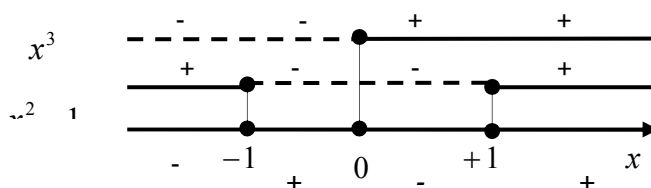
Studiamo la funzione $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

- *Dominio*: $x \neq \pm 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$;
- *Intersezione asse ascisse*: $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow x = 0$
- *Intersezione asse ordinate*: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0$
- *Simmetrie*: la funzione è dispari come dimostrato al Punto 1
- *Positività*:

$$x^3 > 0 \Rightarrow x > 0$$

$$x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x < -1 \vee x > 1$$

$$f(x) > 0 \Rightarrow -1 < x < 0 \vee x > 1$$



- *Asintoti verticali*:
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ per cui le rette di equazione $x = \pm 1$ sono asintoti verticali;
- *Asintoti orizzontali*: non esistono in quanto $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$;
- *Asintoti obliqui*: se esistono hanno equazione $y = mx + q$ con
 $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right], q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx];$ nel caso in esame
 $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^3 - x} \right) = 1, q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x}{x^2 - 1} \right) = 0$ per cui
l'asintoto obliquo ha equazione $y = x$;
- *Crescenza e decrescenza*: la derivata prima è $f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$;

studiamo il segno dei singoli fattori e poi valutiamo il segno della derivata prima:

$$x^2 > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

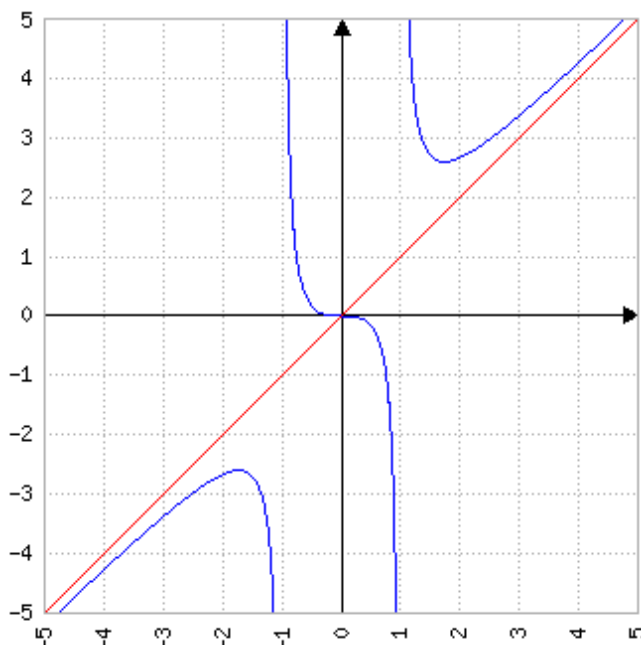
$$x^2 - 3 > 0 \Rightarrow x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}$$

$$(x^2 - 1)^2 > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

Di conseguenza: $f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ per cui c'è un massimo in $M\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ ed un minimo in $m\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$;

- *Concavità e convessità:* la derivata seconda è $f''(x) = \frac{(4x^3 - 6x) \cdot (x^2 - 1)^2 - (x^4 - 3x^2) \cdot 4x \cdot (x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$ per cui, la funzione presenta concavità verso l'alto in $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ e verso il basso in $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$; la funzione presenta un flesso a tangente orizzontale in $F = (0, 0)$.

Di seguito il grafico:



Punto 3

Le primitive della funzione $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ sono

$$\int f(x) dx = \int \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} \right) dx = \int \left(x + \frac{x}{x^2 - 1} \right) dx = \int \left(x + \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 - 1} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| + c$$

e una di esse la ricaviamo per $c = 0$ ed è $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1|$

Punto 4

L'area della regione racchiusa dalla curva γ , dall'asse x e dalle rette $x = 2$ e $x = 3$ è pari a:

$$S = \int_2^3 f(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| \right]_2^3 = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} \ln 8 - 2 - \frac{1}{2} \ln 3 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{8}{3}$$

L'area del trapezio rettangolo è, invece, pari a

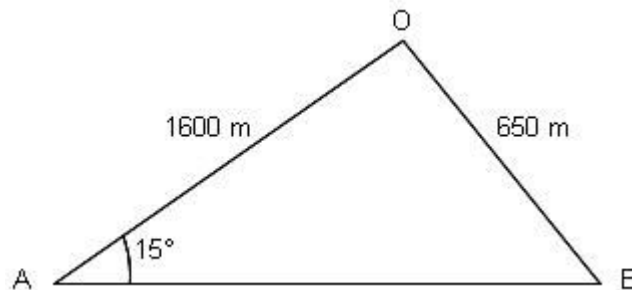
$$S_T = \frac{(B_m + B_M) \cdot h}{2} = \frac{[f(2) + f(3)] \cdot (3 - 2)}{2} = \frac{\left(\frac{8}{3} + \frac{27}{8}\right)}{2} = \frac{145}{48}. \text{ L'errore commesso rispetto al valore}$$

$$\text{non approssimato è } \varepsilon = \frac{\frac{145}{48} - \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{8}{3}\right)}{\frac{5}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{8}{3}} = \frac{\frac{25}{48} - \frac{1}{2} \ln \frac{8}{3}}{\frac{5}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{8}{3}} \cong 1,02\%$$

QUESTIONARIO

Quesito 1

Si consideri la figura seguente rappresentante la geometria del problema.



Bisogna calcolare la distanza \overline{AB} ; posto $\overline{AB} = x$ ed applicando il teorema di Carnot al triangolo AOB si ha $\overline{AB}^2 + \overline{AO}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AO} \cdot \cos(\widehat{OAB}) = \overline{OB}^2$; sostituendo i valori l'equazione diventa

$$\begin{aligned} x^2 + 1600^2 - 2 \cdot x \cdot 1600 \cdot \cos(15^\circ) &= 650^2 \rightarrow x^2 - 3200x \cdot \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right) + (1600^2 - 650^2) = 0 \rightarrow \\ \rightarrow x^2 - 800x(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + 2137500 &= 0 \rightarrow x = 400(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \pm \sqrt{160000(8 - 4\sqrt{3}) - 2137500} \rightarrow \\ \rightarrow x &= 400(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \pm \sqrt{2500(256\sqrt{3} - 343)} = 400(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \pm 50\sqrt{256\sqrt{3} - 343} \rightarrow \\ \rightarrow x &= 50(8\sqrt{6} + 8\sqrt{2} \pm \sqrt{256\sqrt{3} - 343}) \rightarrow \begin{cases} x_+ = 2046,49 \text{ m} \\ x_- = 1044,47 \text{ m} \end{cases} \end{aligned}$$

Poiché i due osservatori si trovano ai lati opposti del grattacielo, la soluzione accettabile è $\overline{AB} = 2046,49 \text{ m}$.

Quesito 2

Posto $\tan x = \frac{1}{t}$, se $x \rightarrow 0$ allora $t \rightarrow \infty$, per cui il limite sarà:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\cot ax} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$

Quesito 3

E' un problema classico del calcolo combinatorio. Nei tanti modi in cui le persone possono sedersi conta l'ordine quindi stiamo parlando di disposizioni. Poiché devo fare gruppi ordinati di 10 persone disponendo proprio 10 persone stiamo parlando di permutazioni. La soluzione è data da

$$D_{10,10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$$

Consideriamo ora il caso in cui debbano sedersi in cerchio. Per ciascuno dei modi sedersi esistono altri nove modi del tutto equivalenti ottenuti ruotando tutti i posti allo stesso modo. In sostanza i possibili modi possono essere raggruppati a 10 a 10 quindi i possibili modi di sedersi in cerchio sono

$$\frac{D_{10,10}}{10} = \frac{10!}{10} = 9! = 9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 362880$$

Quesito 4

La cubica di equazione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ha come derivata prima la parabola $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. L'equazione $y' = 0$ presenta le seguenti soluzioni:

- 2 soluzioni reali distinte $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$ se $\Delta = b^2 - 3ac > 0$;
- 2 soluzioni reali coincidenti $x_{1,2} = -\frac{b}{3a}$ se $\Delta = b^2 - 3ac = 0$;
- 2 soluzioni complesse coniugate $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-b^2 + 3ac}}{3a}$ se $\Delta = b^2 - 3ac < 0$.

Nel caso in cui le soluzioni fossero reali e distinte, la funzione sarebbe:

- se $a > 0$

- crescente in $\left(-\infty, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}\right) \cup \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}, +\infty\right)$

- decrescente in $\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}\right)$

- se $a < 0$

- decrescente in $\left(-\infty, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}\right) \cup \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}, +\infty\right)$

- crescente in $\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}\right)$

Nel caso $a > 0$ la cubica presenterebbe quindi un massimo relativo all'ascissa

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$ e un minimo relativo all'ascissa $x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$, mentre se $a < 0$ un

minimo relativo all'ascissa $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$ e un massimo relativo all'ascissa

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$. In questi casi la funzione presenterebbe, oltre ai due estremanti suddetti,

anche un flesso a tangente obliqua all'ascissa $x_F = -\frac{b}{3a}$.

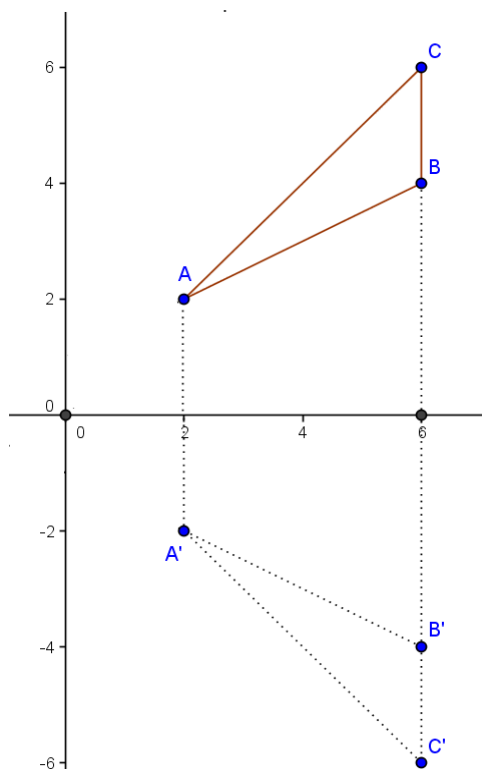
Se le due soluzioni fossero reali e coincidenti o complesse coniugate, la funzione sarebbe strettamente crescente in tutto il dominio \mathbb{R} , per cui non vi sarebbero estremanti in questi casi; in particolare in presenza di soluzioni reali la funzione presenterebbe solo un flesso a tangente

orizzontale all'ascissa $x_F = -\frac{b}{3a}$ mentre in presenza di soluzioni complesse coniugate la funzione

presenterebbe solo un flesso a tangente obliqua all'ascissa $x_F = -\frac{b}{3a}$.

Quesito 5

Si consideri la figura sottostante:



Il volume richiesto è dato dalla differenza tra i volumi dei tronchi di cono AA'C'C e AA'B'B:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + Rr) - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot (R'^2 + r'^2 + R'r') =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4 \cdot (36 + 4 + 12) - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4 \cdot (16 + 4 + 8) = \frac{208}{3} \pi - \frac{112}{3} \pi = \frac{96}{3} \pi = 32\pi$$

Quesito 6

L'equazione può essere così riscritta:

$$2 + 2^x = [\sin^4(x) + \cos^4(x) + 2\sin^2(x)\cos^2(x)] + 4\sin^2(x)\cos^2(x) =$$

$$= \left[\overbrace{\sin^2(x) + \cos^2(x)}^{=1} \right]^2 + \left[\overbrace{2\sin(x)\cos(x)}^{=\sin(2x)} \right]^2 = 1 + \sin^2(2x) \Rightarrow \sin^2(2x) = 1 + 2^x$$

Poiché $1 + 2^x > 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, l'equazione $\sin^2(2x) = 1 + 2^x$ non ha soluzioni in \mathbb{R} in quanto $|\sin(2x)| \leq 1$.

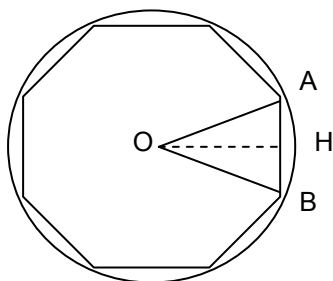
Quesito 7

Poniamo $\begin{cases} x = t + \frac{1}{t} \\ y = t - \frac{1}{t} \end{cases}$. Sommando e sottraendo membro a membro si ha: $\begin{cases} x + y = 2t \\ x - y = \frac{2}{t} \end{cases}$ da cui,

eliminando il parametro t , ricaviamo $x + y = 2 \cdot \left(\frac{2}{x - y} \right) \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 4$; il luogo è, quindi, una iperbole equilatera con asintoti le bisettrici di equazione $y = \pm x$.

Quesito 8

Si consideri la figura sottostante di un poligono inscritto in una circonferenza di centro O e raggio r .



Il perimetro del poligono è pari a n volte la lunghezza del segmento AB , $2p_n = n \cdot \overline{AB}$; se i lati del poligono sono n l'angolo \widehat{AOB} misura $\frac{2\pi}{n}$ per cui $\widehat{AOH} = \widehat{BOH} = \frac{\pi}{n}$. La lunghezza del lato AB è pari al doppio di quella del segmento AH poiché AOB è isoscele per cui applicando il teorema dei triangoli rettangoli si ha $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AH} = 2r \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Il perimetro sarà quindi $2p_n = 2rn \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Calcoliamo tale perimetro quando $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} 2p_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[2rn \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[2\pi r \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\left(\frac{\pi}{n}\right)} \right] = \\ &= 2\pi r \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\left(\frac{\pi}{n}\right)} \right] \stackrel{t = \frac{\pi}{n}}{=} 2\pi r \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \underbrace{\left[\frac{\sin(t)}{(t)} \right]}_{\rightarrow 1} = 2\pi r \end{aligned}$$

cioè il perimetro, al tendere all'infinito del numero dei lati, tende alla lunghezza della circonferenza circoscritta ad esso.

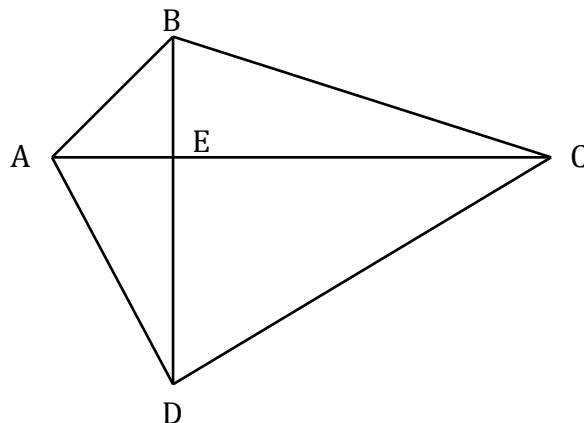
Quesito 9

Il valor medio di una funzione $f(x)$ in $[a, b]$ è $V_M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$. Nel caso in esame

$$V_M = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos(x) - \cos(x) \cdot \sin^2(x)] dx = \frac{2}{\pi} \left[\sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3\pi}$$

Quesito 10

Consideriamo la figura sottostante.



Applicando il teorema di Pitagora ai triangoli AED, BEC, AEB e EDC si ha:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{ED}^2 \quad (1)$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{EC}^2 \quad (2)$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2 \quad (3)$$

$$\overline{DC}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{EC}^2 \quad (4)$$

Sommando membro a membro le prime due e le ultime due si ha:

$$\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{ED}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{EC}^2$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{ED}^2 + \overline{EB}^2 + \overline{EC}^2$$

cioè la somma dei quadrati di due lati opposti coincide.