

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO
LICEO DELLA COMUNICAZIONE
Tema di: MATEMATICA
a. s. 2009-2010

PROBLEMA 1

Sia λ la parabola d'equazione $f(x) = 1 + x^2$

- a) Sia F il fuoco di λ e r la sua retta direttrice. Si determinino le coordinate di F e l'equazione di r
- b) Siano A e B i punti di λ di ordinata 5 e S il segmento parabolico di base AB . Si determini la retta $y = k$ che dimezza l'area di S .
- c) Si determini il volume del solido generato dalla rotazione di S intorno all'asse x .
- d) Si calcoli $\int_0^1 \frac{dx}{f(x)}$ e lo si interpreti geometricamente.

PROBLEMA 2

Nel piano Oxy sono dati i punti $A(2, 0)$ e $B(4, k)$, con $k \in R$. Sia P il punto ottenuto dalla intersezione della retta $x = k$ con la perpendicolare per B alla retta AB .

- a) Si provi che il luogo geometrico γ descritto da P al variare di k ha equazione:

$$y = \frac{x^2 - 2x + 8}{x}$$

- b) Se disegni γ
- c) Si scriva l'equazione della retta r tangente a γ nel punto di ascissa 1
- d) Si calcoli l'area della parte di piano delimitata da r , da γ e dalla retta $x = 2$.

QUESTIONARIO

1. Sia $p(x)$ un polinomio di grado n . Si dimostri che la sua derivata n -esima è $p^{(n)}(x) = n! a_n$ dove a_n è il coefficiente di x^n
2. Siano ABC un triangolo rettangolo in A , r la retta perpendicolare in B al piano del triangolo e P un punto di r distinto da B . Si dimostri che i tre triangoli PAB , PBC , PCA sono triangoli rettangoli.
3. Sia γ il grafico di $f(x) = e^{3x} + 1$. Per quale valore di x la retta tangente a γ in $(x, f(x))$ ha pendenza uguale a 2?
4. Si calcoli:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 4x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

5. Un serbatoio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 80cm. Quale è la capacità in litri del serbatoio?
6. Si determini il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\cos x}$
7. Per quale o quali valori di k la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 11x - 4, & x \leq 4 \\ kx^2 - 2x - 1, & x > 4 \end{cases}$$

è continua in $x = 4$?

8. Se $n > 3$ e $\binom{n}{n-1}, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n ?
9. Si provi che non esiste un triangolo ABC con $AB=3$, $AC=2$ e $\widehat{A} = 45^\circ$. Si provi altresì che se $AB = 3$, $AC = 2$ e $\widehat{A} = 30^\circ$, allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.
10. Per la ricorrenza della festa della mamma, la sig.ra Luisa organizza una cena a casa sua, con le sue amiche che hanno almeno una figlia femmina. La sig.ra Anna è una delle invitate e perciò ha almeno una figlia femmina. Durante la cena, la sig.ra Anna dichiara di avere esattamente due figli. Si chiede: qual è la probabilità che anche l'altro figlio della sig.ra Anna sia femmina? Si argomenta la risposta.

PROBLEMA 1

Punto 1

La parabola di equazione $y = x^2 + 1$ ha l'asse di simmetria coincidente con l'asse delle ordinate, vertice in $V(0,1)$ e fuoco di coordinate $F\left(0, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$ cioè $F\left(0, \frac{5}{4}\right)$ e direttrice di equazione

$$y = -\frac{1+\Delta}{4a} = \frac{3}{4}.$$

Punto 2

La retta $y = 5$ interseca l'asse delle ordinate in $C(0,5)$. Le ascisse dei punti A e B si calcolano

risolvendo il seguente sistema $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A : \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases} \\ B : \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases} \end{cases}.$

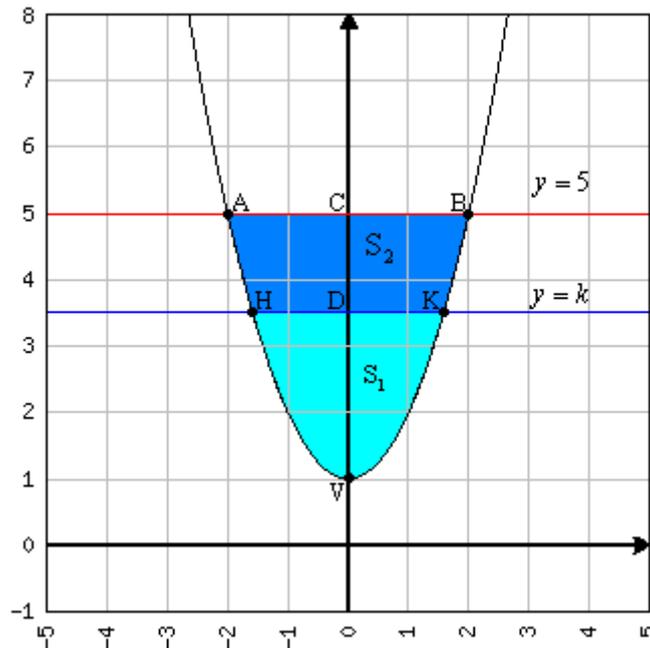
L'area di S è pari a

$$A(S) = \int_{-2}^2 [5 - (x^2 + 1)] dx \xrightarrow{\text{Integrando pari}} A(S) = \int_0^2 (4 - x^2) dx = 2 \cdot \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 2 \cdot \left(8 - \frac{8}{3} \right) = \frac{32}{3}.$$

Alternativamente, applicando il teorema di Archimede, l'area del segmento parabolico è pari ai $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo circoscritto; il rettangolo circoscritto ha area pari a $\overline{AB} \cdot \overline{VC} = 4 \cdot 4 = 16$, per cui il segmento parabolico avrà area $\frac{32}{3}$.

Sia $y = k$ una generica retta parallela all'asse delle ascisse che interseca il segmento parabolico nei punti $H(-\sqrt{k-1}, k), K(\sqrt{k-1}, k)$ con $1 < k < 5$ e che suddivide il segmento parabolico in S_1 ed S_2 .

Si consideri la figura sottostante.



Sia $D(0,k)$ l'intersezione della retta $y = k$ con l'asse delle ordinate. L'area di S_1 , applicando il teorema di Archimede è pari a $A(S_1) = \frac{2}{3} \cdot \overline{VD} \cdot \overline{HK} = \frac{2}{3} \cdot (k-1) \cdot 2\sqrt{k-1} = \frac{4}{3} \cdot (k-1)^{\frac{3}{2}}$.

Allo stesso modo per via integrale si ha

$$A(S_1) = \int_{-\sqrt{k-1}}^{\sqrt{k-1}} [k - (x^2 + 1)] dx \xrightarrow{\text{Integrando pari}} A(S_1) = 2 \int_0^{\sqrt{k-1}} [k - (x^2 + 1)] dx =$$

$$= 2 \left[(k-1)x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{k-1}} = 2 \left[(k-1)\sqrt{k-1} - \frac{(k-1)\sqrt{k-1}}{3} \right] = \frac{4}{3} (k-1)\sqrt{k-1} = \frac{4}{3} (k-1)^{\frac{3}{2}}$$

Imponendo $A(S_1) = \frac{A(S)}{2} = \frac{16}{3}$ otteniamo

$$\frac{4}{3} \cdot (k-1)^{\frac{3}{2}} = \frac{16}{3} \rightarrow (k-1)^{\frac{3}{2}} = 4 \rightarrow (k-1) = 2^{\frac{4}{3}} \rightarrow k = 1 + 2^{\frac{4}{3}}$$

Punto 3

Il volume richiesto per il teorema di Guldino è pari a:

$$V = \pi \int_{-2}^2 [5^2 - (x^2 + 1)^2] dx \xrightarrow{\text{Integrando pari}} V = 2\pi \int_0^2 (24 - x^4 - 2x^2) dx =$$

$$= 2\pi \left[24x - \frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^2 = 2\pi \left(48 - \frac{32}{5} - \frac{16}{3} \right) = \frac{1088}{15} \pi$$

Punto 4

L'integrale richiesto è pari a $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = [\arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$ che coincide con l'area di un quarto di cerchio di raggio unitario.

PROBLEMA 2

Punto 1

La retta AB ha coefficiente angolare $m = \frac{k}{2}$ per cui la perpendicolare alla retta AB passante per

$B(4, k)$ ha equazione $y - k = -\frac{1}{m}(x - 4) \rightarrow y = -\frac{2}{k}(x - 4) + k$. Intersecando la retta di equazione

$$y = -\frac{2}{k}(x - 4) + k \text{ con la retta } x = k \text{ otteniamo il luogo } y = -\frac{2}{k}(x - 4) + x = \frac{x^2 - 2x + 8}{x}.$$

Punto 2

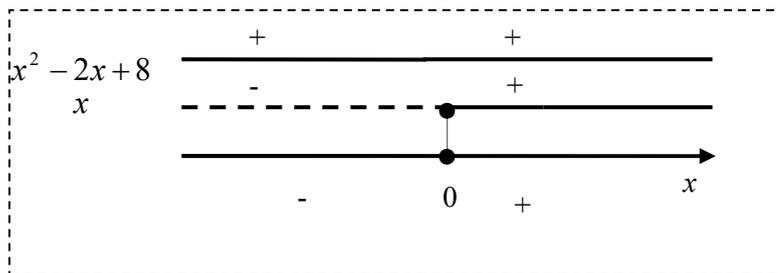
Studiamo la funzione $y = \frac{x^2 - 2x + 8}{x}$

- *Dominio*: $x \neq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;
- *Intersezione asse ascisse*: non ve ne sono in quanto $x^2 - 2x + 8 = (x - 1)^2 + 7 > 0 \forall x \in R$
- *Intersezione asse ordinate*: non ve ne sono perché $x = 0$ non appartiene al dominio
- *Positività*:

$$N : x^2 - 2x + 8 > 0 \forall x \in R$$

$$D : x > 0 \Rightarrow x > 0$$

$$y = \frac{x^2 - 2x + 8}{x} > 0 \Rightarrow x > 0$$



- *Asintoti verticali*: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 2x + 8}{x} = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 2x + 8}{x} = +\infty$ per cui $x = 0$ è asintoto verticale;
- *Asintoti orizzontali*: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 8}{x} = \pm\infty$ per cui non esistono asintoti orizzontali;
- *Asintoti obliqui*: trattandosi di funzione razionale fratta con grado del numeratore pari al grado del denominatore più 1, l'assenza dell'asintoto orizzontale implica la presenza di quello obliquo; esso ha equazione $y = mx + q$ con

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 8}{x^2} = 1,$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 8}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-2x + 8}{x} \right) = -2$$

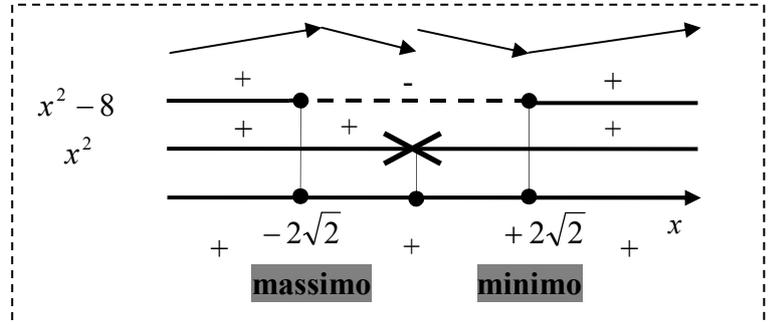
quindi l'asintoto obliquo ha equazione $y = x - 2$;

- *Crescenza e decrescenza*: la derivata prima è $y' = \frac{(2x-2) \cdot x - (x^2 - 2x + 8) \cdot 1}{x^2} = \frac{x^2 - 8}{x^2}$ il cui quadro dei segni è rappresentato a lato;

$$N: x^2 - 8 > 0 \Rightarrow x < -2\sqrt{2} \vee x > 2\sqrt{2}$$

$$D: x^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

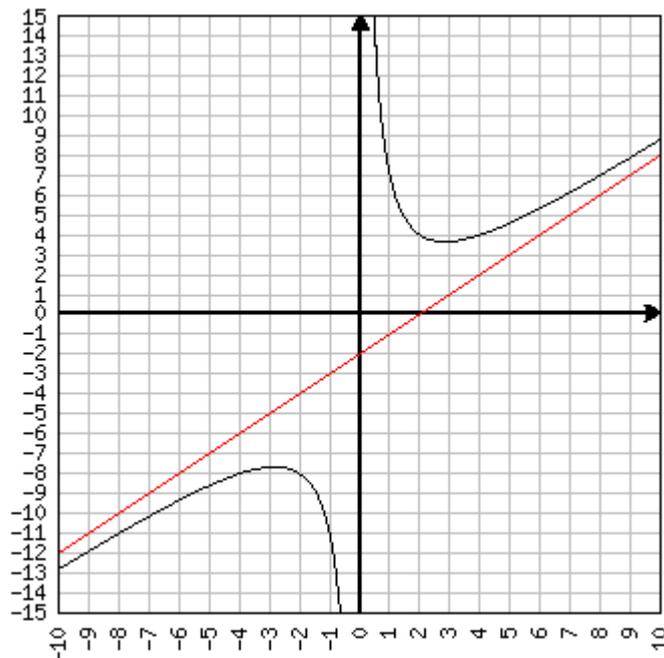
$$\frac{x^2 - 8}{x^2} > 0 \Rightarrow x < -2\sqrt{2} \vee x > 2\sqrt{2}$$



Quindi la funzione è strettamente crescente in $(-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$ e strettamente decrescente in $(-2\sqrt{2}, 0) \cup (0, 2\sqrt{2})$ e presenta un massimo relativo nel punto $M(-2\sqrt{2}, -2 - 4\sqrt{2})$ ed un minimo relativo in $m(2\sqrt{2}, -2 + 4\sqrt{2})$;

- *Concavità e convessità*: la derivata seconda è $y'' = \frac{16}{x^3}$ per cui la funzione presenta concavità verso l'alto in $(0, +\infty)$ e verso il basso in $(-\infty, 0)$; non esistono flessi.

Il grafico è di seguito presentato:



Alternativamente avremmo potuto trovare il grafico a partire dalla seguente considerazione: la

funzione $y = \frac{x^2 - 2x + 8}{x}$ può essere scritta come $y = (x - 2) + \frac{8}{x}$ da cui deduciamo che il grafico è

una iperbole centro $(0, -2)$, di asintoto verticale $x = 0$ ed asintoto obliquo $y = x - 2$.

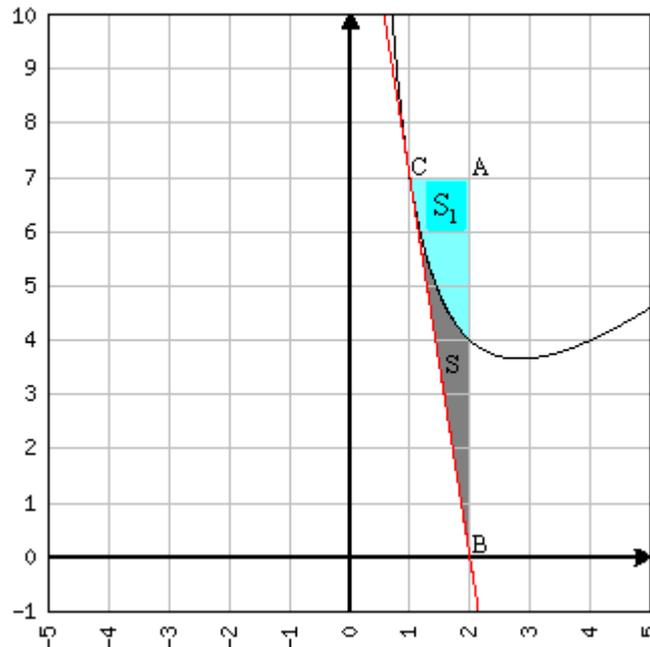
Punto 3

Il punto ad ascissa unitaria è $P(1,7)$; la derivata prima in $x = 1$ vale $y'(1) = \left[\frac{x^2 - 8}{x^2} \right]_{x=1} = -7$, per cui

la tangente alla funzione nel punto $P(1,7)$ ha equazione $y = -7(x-1) + 7 = -7x + 14$.

Punto 4

L'area da calcolare è rappresentata in grigio nella figura seguente:



L'area richiesta è pari all'area del triangolo ABC cui va sottratta l'area S_1 .

L'area del triangolo ABC è pari a $A(ABC) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{2} = \frac{7}{2}$ mentre

$$A(S_1) = \int_1^2 \left[7 - \left(\frac{x^2 - 2x + 8}{x} \right) \right] dx = \int_1^2 \left(9 - x - \frac{8}{x} \right) dx =$$

$$= \left[-\frac{(9-x)^2}{2} - 8 \ln|x| \right]_1^2 = \left(-\frac{49}{2} - 8 \ln 2 \right) - (-32) = \frac{15}{2} - 8 \ln 2$$

In conclusione $A(S) = A(ABC) - A(S_1) = \frac{7}{2} - \left(\frac{15}{2} - 8 \ln 2 \right) = 8 \ln 2 - 4$.

QUESTIONARIO

Quesito 1

Un generico polinomio $p(x)$ di grado n può essere scritto nel seguente modo:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \text{ con } a_i \in R, i = 0, 1, \dots, n$$

Calcoliamo le derivate prima, seconda e così via sino all'n-esima:

$$p'(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 \cdot a_2 x + a_1$$

$$p''(x) = n \cdot (n-1) \cdot a_n x^{n-2} + (n-1) \cdot (n-2) \cdot a_{n-1} x^{n-3} + \dots + 2 \cdot a_2$$

$$p'''(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a_n x^{n-3} + (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot a_{n-1} x^{n-4} + \dots + 6 \cdot a_3$$

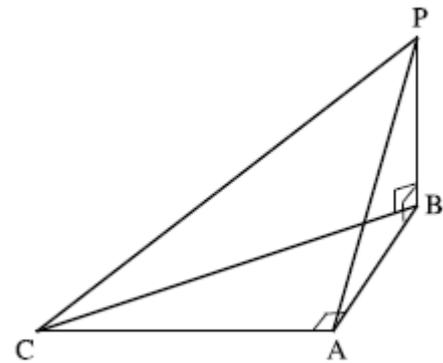
⋮

$$p^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n = n! a_n$$

Quesito 2

Consideriamo la figura a lato rappresentante la geometria del problema.

Poiché la retta PB è ortogonale al piano del triangolo, essa è ortogonale a tutte le rette del piano passanti per B, quindi è ortogonale a BA e BC, da cui deduciamo che i triangoli PBC e PBA sono entrambi rettangoli in B. Ci resta da dimostrare che anche PAC è rettangolo; in particolare vogliamo dimostrare che PAC è rettangolo in A. Ciò è vero se, applicando il teorema



di Pitagora, si ha $\overline{PC}^2 = \overline{PA}^2 + \overline{AC}^2$.

Applicando il teorema di Pitagora ai triangoli PBA, PBC ed ABC otteniamo:

$$\overline{PB}^2 = \overline{PA}^2 - \overline{AB}^2 \quad (1)$$

$$\overline{PC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{BC}^2 \quad (2)$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \quad (3)$$

Sostituendo le espressioni (1) e (3) in (2) si ha:

$$\overline{PC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{BC}^2 = (\overline{PA}^2 - \overline{AB}^2) + (\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2) = \overline{PA}^2 + \overline{AC}^2 \text{ cioè il triangolo PAC è rettangolo in A.}$$

Quesito 3

La pendenza della retta tangente in x a una funzione $f(x)$ è la derivata prima di $f(x)$. Nel caso in esame la derivata prima di $f(x) = e^{3x} + 1$ è $f'(x) = 3e^{3x}$, per cui imponendo $f'(x) = 3e^{3x} = 2$ si

ricava $e^{3x} = \frac{2}{3} \rightarrow 3x = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \rightarrow x = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)$. In corrispondenza di $x = \ln\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)$ si ha

$f\left(\ln\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)\right) = e^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} + 1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$. Quindi la funzione $f(x) = e^{3x} + 1$ ha tangente in $\left(\ln\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right), \frac{5}{3}\right)$

con pendenza pari a 2.

Quesito 4

Effettuiamo il cambio di variabile $y = \frac{1}{x}$; se $x \rightarrow \infty$ $y \rightarrow 0$, per cui

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 4x \sin \frac{1}{x} = 4 \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 4$$

in cui si è sfruttato il limite notevole $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$.

Quesito 5

Consideriamo la figura a lato in cui è rappresentato in sezione un cono di apotema $a = 80\text{cm}$, altezza h e raggio di base r .

Poniamo $\overline{CH} = x$, $0 < x < 80$. Il raggio di base per il teorema

di Pitagora misura $\overline{HB} = r = \sqrt{6400 - x^2}$.

Il volume del cono è $V(x) = \frac{\pi hr^2}{3} = \frac{\pi}{3} x(6400 - x^2)$.

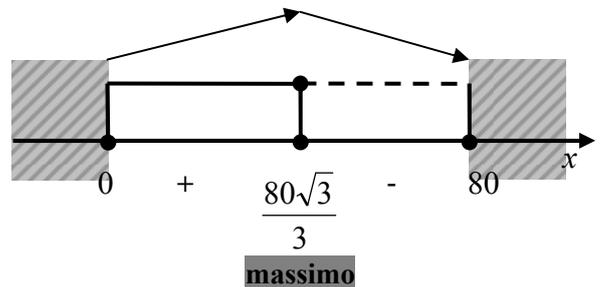
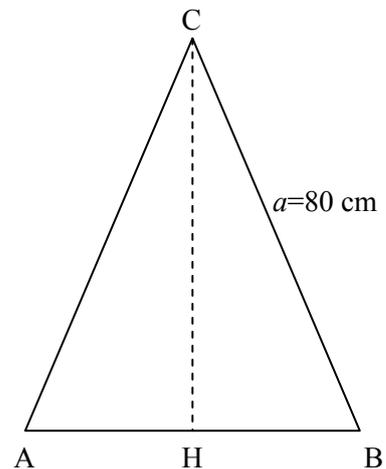
La massimizzazione del volume la effettuiamo mediante derivazione.

Si ha:

$$V'(x) = \frac{\pi}{3}(6400 - 3x^2)$$

$$V'(x) > 0 \rightarrow 0 < x < \frac{80\sqrt{3}}{3}$$

$$V'(x) < 0 \rightarrow \frac{80\sqrt{3}}{3} < x < 80$$



quindi il volume è strettamente crescente in $\left(0, \frac{80\sqrt{3}}{3}\right)$ e strettamente decrescente in $\left(\frac{80\sqrt{3}}{3}, 80\right)$.

Inoltre $V''(x) = -2\pi x$ e $V''\left(\frac{80\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{160\pi\sqrt{3}}{3} < 0$ per cui il volume è massimo per $x = \frac{80\sqrt{3}}{3}$ e

vale
$$V_{MAX} = V\left(\frac{80\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{80\sqrt{3}}{3}\right)\left(6400 - \frac{6400}{3}\right) = \frac{1024000\sqrt{3}}{27}\pi [\text{cm}^3] = \frac{1024\sqrt{3}}{27}\pi [\text{dm}^3].$$

Ricordando che $1\text{ l} = 1\text{ dm}^3$, il volume massimo in litri è $V_{MAX} = \frac{1024\sqrt{3}}{27}\pi$ litri $\cong 206,4$ litri.

Quesito 6

Il dominio di $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$ è l'insieme degli $x \in R$ che soddisfano la disequazione $\cos(x) \geq 0$,

cioè $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in Z$.

Quesito 7

Affinché la funzione $h(x)$ sia continua in $x = 4$ deve aversi $\lim_{x \rightarrow 4^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} h(x)$. Per il caso in

esame i limiti sinistro e destro valgono rispettivamente:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (3x^2 - 11x - 4) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (kx^2 - 2x - 1) = 16k - 9$$

Imponendone l'uguaglianza si ha $16k - 9 = 0 \Rightarrow k = \frac{9}{16}$.

In $x = 4$ la funzione è tuttavia non derivabile e presenta un punto angoloso in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (6x - 11) = 13$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{9}{8}x - 2\right) = \frac{5}{2}$$

Quesito 8

Una progressione aritmetica è una successione di numeri tali che la differenza tra ciascun termine e il suo precedente sia una costante. Tale costante viene detta *ragione* della progressione.

Nel caso in esame i tra numeri $\binom{n}{n-1}, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica se

$$\binom{n}{n-1} - \binom{n}{n-2} = \binom{n}{n-2} - \binom{n}{n-3} \rightarrow \binom{n}{n-3} - 2\binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} = 0.$$

Esplicitiamo i singoli coefficienti binomiali:

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = \frac{n!}{(n-1)!} = n$$

$$\binom{n}{n-2} = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{n-3} = \frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!} = \frac{n!}{(n-3)! \cdot 6} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6}$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} & \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} - 2 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} + n = 0 \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} - n \cdot (n-1) + n = 0 \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} - n \cdot (n-2) = 0 \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{n \cdot (n-2)}{6} (n-1-6) = \frac{n \cdot (n-2) \cdot (n-7)}{6} = 0 \rightarrow \begin{cases} n = 0 < 3 \text{ non acc.} \\ n = 2 < 3 \text{ non acc.} \\ n = 7 > 3 \text{ acc.} \end{cases} \end{aligned}$$

In conclusione il valore accettabile è $n = 7$ cui corrispondono i tre valori

$$\binom{7}{6} = 7, \binom{7}{5} = 21, \binom{7}{4} = 35.$$

Quesito 9

Consideriamo la figura a lato, rappresentante il triangolo

ABC con $\overline{AC} = 2, \overline{AB} = 3, \hat{A}BC = \alpha$ e consideriamo i

casi corrispondenti ad $\alpha = 45^\circ$ ed $\alpha = 30^\circ$.

- $\alpha = 45^\circ$

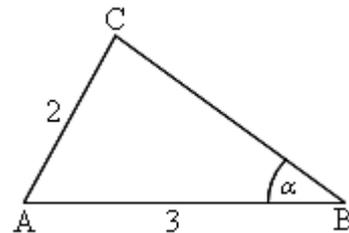
Applicando il teorema dei seni si ha:

$$\begin{aligned} & \frac{\overline{AB}}{\sin(\hat{A}CB)} = \frac{\overline{AC}}{\sin(\alpha)} \rightarrow \\ & \rightarrow \sin(\hat{A}CB) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \sin(\alpha) \rightarrow \\ & \rightarrow \sin(\hat{A}CB) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Poiché $\frac{3\sqrt{2}}{4} > 1$, un triangolo con $\overline{AC} = 2, \overline{AB} = 3, \hat{A}BC = 45^\circ$ non esiste.

- $\alpha = 30^\circ$

Applicando ancora una volta il teorema dei seni si ricava



$$\frac{\overline{AB}}{\sin(\widehat{ACB})} = \frac{\overline{AC}}{\sin(\alpha)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sin(\widehat{ACB}) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \sin(\alpha) \rightarrow$$

$$\rightarrow \sin(\widehat{ACB}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow \widehat{ACB} = \arcsin\left(\frac{3}{4}\right) \cong 48,6^\circ \vee \widehat{ACB} = 180^\circ - \arcsin\left(\frac{3}{4}\right) \cong 131,4^\circ$$

In tal caso esistono due triangoli che soddisfano le condizioni $\overline{AC} = 2, \overline{AB} = 3, \widehat{ABC} = 30^\circ$.

Per calcolare la misura del terzo lato si può procedere in due modi distinti:

➤ Teorema dei seni: si ha

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\alpha)} = \frac{\overline{BC}}{\sin(\widehat{CAB})} \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \frac{\sin(\widehat{CAB})}{\sin(\alpha)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \frac{\sin(150^\circ - \widehat{ACB})}{\frac{1}{2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{BC} = 2 \cdot \overline{AC} \cdot \sin(150^\circ - \widehat{ACB}) = 4 \cdot [\sin(150^\circ)\cos(\widehat{ACB}) - \cos(150^\circ)\sin(\widehat{ACB})] \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{BC} = 4 \cdot \left[\frac{\cos(\widehat{ACB})}{2} + \frac{\sqrt{3}\sin(\widehat{ACB})}{2} \right] = 4 \cdot \left[\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2(\widehat{ACB})}}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot \sin(\widehat{ACB})}{2} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{BC} = 4 \cdot \left(\frac{\pm\sqrt{1-\frac{9}{16}}}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{3}{4}}{2} \right) = 4 \cdot \left(\pm\frac{\sqrt{7}}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) = \frac{(3\sqrt{3} \pm \sqrt{7})}{2}$$

➤ Teorema di Carnot: posto $\overline{BC} = x$ si ha

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + x^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot x \cdot \cos(\alpha) \rightarrow$$

$$\rightarrow 4 = 9 + x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 3\sqrt{3} \cdot x + 5 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \overline{BC} = \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{7}}{2}$$

Quesito 10

Anna ha due figli F_1 ed F_2 e sappiamo per certo che almeno uno dei due è femmina. Si possono presentare quindi 3 casi possibili:

1. F_1 maschio ed F_2 femmina
2. F_1 femmina ed F_2 maschio
3. F_1 femmina ed F_2 femmina

Ricordando la definizione frequentista della probabilità come rapporto tra casi favorevoli sui totali,

la probabilità di avere due figlie femmine è pari a $p = \frac{1}{3}$.

Il quesito può essere risolto alternativamente nel seguente modo. Indichiamo con X la variabile aleatoria indicante il numero di figlie femmine della signora Anna e indichiamo con p la probabilità che un figlio sia di sesso femminile. Il quesito ci chiede di calcolare la probabilità che Anna abbia due figlie femmine sapendo che la prima è femmina, cioè $P(X = 2 | X \geq 1)$.

In particolare le probabilità che il numero di figlie femmine sia pari a 0, 1 o 2 sono:

$$P(X = 0) = (1 - p)^2,$$

$$P(X = 2) = p^2,$$

$$P(X = 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 2) = 1 - (1 - p)^2 - p^2 = 2p(1 - p)$$

La probabilità richiesta è quindi

$$P(X = 2 | X \geq 1) = \frac{P(X = 2 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X = 2)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X = 2)}{P(X = 1) + P(X = 2)} = \frac{p^2}{2p(1 - p) + p^2} = \frac{p}{2 - p}$$

e se assumiamo uguale probabilità per i due sessi si ha $P(X = 2 | X \geq 1) = \frac{p}{2 - p} = \frac{\frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$.

Svolgimento a cura di Nicola De Rosa