ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
SCUOLE ITALIANE ALL'ESTERO (AMERICHE)
CORSO DI ORDINAMENTO
Tema di: MATEMATICA
a. s. 2010-2011

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Nel riferimento cartesiano Oxy si consideri il triangolo di vertici *O, B(1;0), A(0;a)* con $a > 0$. Preso un punto P interno al triangolo, si denotino con Q e con R i punti in cui la retta per P, parallela all'asse y, taglia i lati OB e AB rispettivamente.

1. Si dimostri che il luogo dei punti P, interno al triangolo OBA, tali che
$$\overline{QP} : \overline{QR} = \overline{OQ} : \overline{OB}$$

è un arco della parabola Γ d'equazione $y = ax(1-x)$

2. Si verifichi che il lato BA del triangolo e la mediana ad esso relativa sono tangenti a Γ rispettivamente in B e O
3. Si denoti con Ω la regione delimitata da Γ e da OB. In Ω, si inscriva un rettangolo con un lato su OB; si stabilisca per quale valore di a il rettangolo di perimetro massimo risulta essere un quadrato
4. Posto $a = \frac{1}{2}$, si indichi con r la retta otogonale a Γ nel punto B. Si calcoli l'area racchiusa tra r e Γ e si calcoli altresì il volume del solido generato dalla rotazione di Ω intorno alla retta $y = -1$

PROBLEMA 2

In una semicirconferenza di diametro AB di lunghezza 2, è inscritto un quadrilatero convesso ABCD avente il lato CD uguale al raggio. I prolungamenti dei lati AD e BC si incontrano inun punto E.

1. Si dimostri che, qualunque sia la posizione dei punti C e D sulla semicirconferenza, si ha:
$$D\hat{A}C = D\hat{B}C = \frac{\pi}{6} \quad \text{e} \quad A\hat{E}B = \frac{\pi}{3}$$
2. Se $x = D\hat{A}B$, si provi che la somma CE+DE in funzione di x è data da $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x$. Quale è l'intervallo di variabilità della *x*? Quale il valore massimo assunto da CE+DE?
3. Posto $g(x) = k\sin(x+\varphi)$ si trovino k e φ di modo che $g(x) = f(x)$

   Nel Punto 2 abbiamo mostrato che la funzione $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x$ può essere anche scritta come $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, per cui i valori (φ, k) tali per cui $g(x) = k\sin(x+\varphi) = f(x)$ sono $\varphi = \frac{\pi}{6}, k = 2$.
4. Si tracci, a prescindere dai limiti geometrici del problema, il grafico Γ di $f(x)$ e si denoti con R la regione delimitata, per $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$, dall'asse *x* e da Γ. Si calcoli l'area di R e si calcoli altresì il volume del solido generato da R nella rotazione attorno all'asse *x*.

QUESTIONARIO

1. Sia W il solido ottenuto facendo ruotare attorno all'asse y la parte di piano compresa, per $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, fra il grafico di $y = \sin x$ e l'asse x. Quale dei seguenti integrali definiti fornisce il volume di W?

   A) $2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$; B) $\pi \int_0^1 (\arcsin x)^2 dx$; C) $\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$; D) nessuno di questi

Si motivi la risposta.

2. Angelo siede in un punto A della piazza del suo paese e vi osserva un albero in B, una fontana in F e un lampione in L. Stima l'ampiezza dell'angolo sotto cui vede la congiungente B e F pari a 30° e l'ampiezza dell'angolo sotto cui vede FL pari a 45°. Sapendo che $\mathrm{BF} = 12\mathrm{m}$ e $\mathrm{FL} = 20\mathrm{m}$ e che $B\hat{F}L = 155°$, si spieghi ad Angelo come procedere per calcolare AB, AF e AL. Sono attendibili i risultati $\mathrm{AB} = \mathrm{AF} \cong 23{,}18\mathrm{m}$ e $\mathrm{AL} \cong 27{,}85\mathrm{m}$?
3. La base di un solido S è la regione triangolare compresa tra gli assi coordinati e la retta di equazione $4x + 5y = 20$. Si calcoli il volume di S sapendo che le sue sezioni con piani perpendicolari all'asse x sono semicerchi.
4. Si spieghi perché l'equazione $\cos x = x$ ha almeno una soluzione
5. Si risolva l'equazione $|x-1| = 1 - |x|$
6. Una sfera è inscritta in un cubo; quale è il rapporto fra il volume della sfera e quello del cubo?
7. Si dimostri che in un triangolo, il rapporto tra ciascun lato e il seno dell'angolo ad esso opposto è uguale al diametro del cerchio circoscritto al triangolo.
8. Sia $t \in [0, 2\pi]$; quale è la curva rappresentata dalle equazioni $x = a\cos t$ e $y = b\sin t$?

PROBLEMA 1

Nel riferimento cartesiano Oxy si consideri il triangolo di vertici *O, B(1;0), A(0;a)* con $a > 0$. Preso un punto P interno al triangolo, si denotino con Q e con R i punti in cui la retta per P, parallela all'asse y, taglia i lati OB e AB rispettivamente.

<u>*Punto 1*</u>

Si dimostri che il luogo dei punti P, interno al triangolo OBA, tali che

$$\overline{QP} : \overline{QR} = \overline{OQ} : \overline{OB}$$

è un arco della parabola Γ d'equazione $y = ax(1-x)$

Sia $P(x, y), 0 < x < 1, 0 < y < a$ un generico punto P interno al triangolo AOB. Con queste convenzioni $\overline{QP} = y, \overline{OQ} = x, \overline{OB} = 1$ mentre $\overline{QR}$ lo ricaviamo dalla similitudine dei trinagoli rettangoli AOB e RQP: $\overline{QR} : \overline{QB} = \overline{AO} : \overline{OB}$ da cui $\overline{QR} = \frac{\overline{AO} \cdot \overline{QB}}{\overline{OB}} = a(1-x)$ per cui il luogo dei punti P per cui $\overline{QP} : \overline{QR} = \overline{OQ} : \overline{OB}$ diventa $y : a(1-x) = x : 1$ da cui $\Gamma : y = ax(1-x)$ che con la limitazione geometrica con $0 < x < 1, 0 < y < a$ rappresenta un ramo di parabola con vertice in $V\left(\frac{1}{2}, \frac{a}{4}\right)$ che interseca l'asse delle ascisse in $O(0,0), B(1,0)$.

<u>*Punto 2*</u>

Si verifichi che il lato BA del triangolo e la mediana ad esso relativa sono tangenti a Γ rispettivamente in B e O

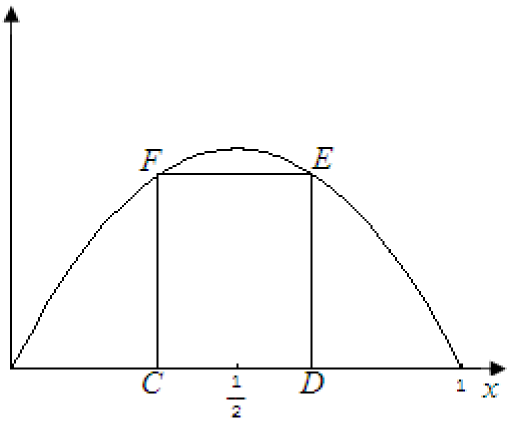
L'equazione generica della tangente al grafico Γ in un punto (x_0, y_0)è $y = m(x - x_0) + y_0$ con $m = f'(x_0)$. La derivata prima della parabola in esame è $y' = a(1-2x)$ per cui la tangente in $O(0,0)$ ha equazione $y = ax$ in quanto $m = f'(0) = a$; la tangente in $B(1,0)$ ha equazione $y = -ax + a$ in quanto $m = f'(1) = -a$. Notiamo che, oltre al punto $B(1,0)$, anche il punto $A(0, a)$ appartiene alla retta di equazione $y = -ax + a$ per cui la retta tangente in $B(1,0)$ di equazione $y = -ax + a$ coincide con la retta su cui giace il lato BA del triangolo. Dobbiamo solo provare ora che la retta $O(0,0)$ di equazione $y = ax$ coincide con la mediana relativa al lato BA. Tale mediana passerà per l'origine $O(0,0)$ e per il punto medio $\left(\frac{1}{2}, \frac{a}{2}\right)$ del lato BA. La retta passante per questi due punti ha effettivamente equazione $y = ax$ coincidente con la tangente in $O(0,0)$ alla parabola.

<u>*Punto 3*</u>

Si denoti con Ω la regione delimitata da Γ e da OB. In Ω, si inscriva un rettangolo con un

lato su OB; si stabilisca per quale valore di *a* il rettangolo di perimetro massimo risulta essere un quadrato

Consideriamo la figura sottostante.



I vertici rettangolo CDEF per ovvi motivi di simmetria rispetto alla direttrice della parabola di equazione $x=\frac{1}{2}$ hanno le seguenti coordinate:

$C(x,0), D(1-x,0), E(1-x, ax-ax^2), F(x, ax-ax^2)$ con $0<x<\frac{1}{2}$. Il perimetro del rettangolo è $2p(x)=2(\overline{CD}+\overline{DE})$ dove $\overline{CD}=1-2x, \overline{DE}=ax-ax^2$ per cui $2p(x)=2[-ax^2+x(a-2)+1]$; quindi il perimetro è una parabola con concavità verso il basso la cui ascissa di massimo coincide con l'ascissa del vertice, cioè $x_M=\frac{a-2}{2a}$ cui corrisponde il valore massimo

$$2p(x_M)=2\left[-a\left(\frac{a-2}{2a}\right)^2+\left(\frac{a-2}{2a}\right)(a-2)+1\right]=2\left[-\frac{(a-2)^2}{4a}+\frac{(a-2)^2}{2a}+1\right]=2\left[1+\frac{(a-2)^2}{4a}\right]=\frac{a^2+4}{2a}.$$

La condizione $0<x<\frac{1}{2}$ con $x_M=\frac{a-2}{2a}$ espressa in funzione del parametro a diventa

$$0<\frac{a-2}{2a}<\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a-2}{2a}>0\\ \frac{a-2}{2a}<\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a-2}{2a}>0\\ \frac{a-2}{2a}-\frac{1}{2}<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a-2}{2a}>0\\ \frac{1}{a}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a<0\vee a>2\\ a>0\end{cases}\Leftrightarrow a>2.$$

I lati del rettangolo di perimetro massimo misurano: $\overline{CD}=\overline{FE}=\frac{2}{a}, \overline{DE}=\overline{CF}=\frac{a^2-4}{4a}$; notiamo che la misura del lato DE con la limitazione $a>2$ è positiva.

Affinchè il rettangolo di perimetro massimo sia un quadrato dobbiamo imporre $\overline{CD}=\overline{DE}$ e cioè $\frac{a^2-4}{4a}=\frac{2}{a}\Rightarrow a^2-4=8\Rightarrow a^2-12=0\Rightarrow a=\pm2\sqrt{3}$; poiché $a>2$ la soluzione accettabile è

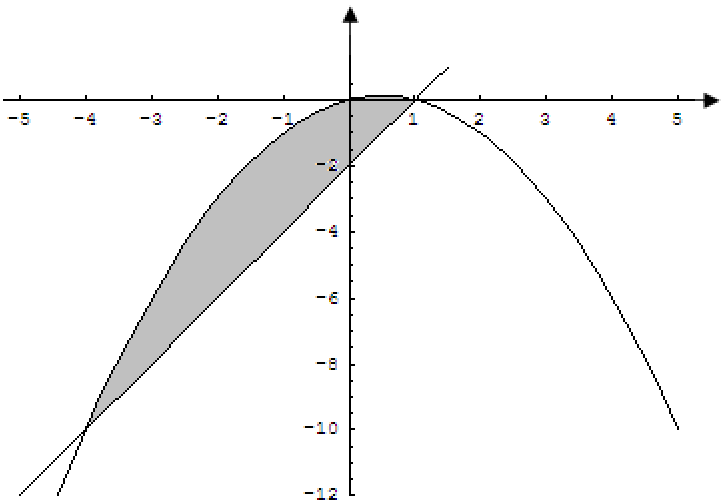
$a = 2\sqrt{3}$ cui corrisponde un perimetro massimo pari a $2p_{max} = \left[\frac{a^2+4}{2a}\right]_{a=2\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Punto 4

Posto $a = \frac{1}{2}$, si indichi con r la retta otogonale a Γ nel punto B. Si calcoli l'area racchiusa tra r e Γ e si calcoli altresì il volume del solido generato dalla rotazione di Ω intorno alla retta $y = -1$

La retta r ortogonale a Γ nel punto $B(1,0)$ ha equazione $y = m'(x-1)$ dove $m' = -\frac{1}{m}$ ed m è il coefficiente angolare della retta tangente a Γ nel punto $B(1,0)$; la retta tangente a Γ nel punto $B(1,0)$, come trovato al Punto 2, ha equazione $y = -ax + a$, per cui $m = -a \Rightarrow m' = \frac{1}{a}$, e posto $a = \frac{1}{2}$, la retta r ortogonale a Γ nel punto $B(1,0)$ ha equazione $r: y = 2(x-1)$.

L'area da calcolare è di seguito raffigurata in grigio:



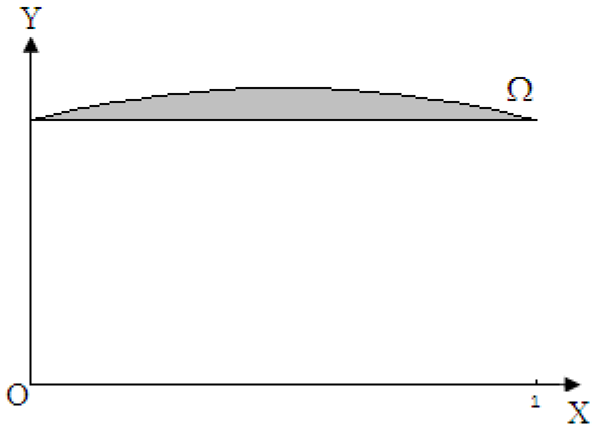
Le intersezioni tra la parabola e la retta $r: y = 2(x-1)$ si ricavano risolvendo l'equazione $\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} = 2x - 2 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4) = 0 \Rightarrow x = -4 \vee x = 1$.

L'area richiesta, quindi, è pari a

$$S = \int_{-4}^{1}\left[\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}\right) - 2(x-1)\right]dx = S = \int_{-4}^{1}\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x + 2\right)dx = \left[-\frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{4} + 2x\right]_{-4}^{1} =$$

$$= \left(-\frac{1}{6} - \frac{3}{4} + 2\right) - \left(\frac{32}{3} - 12 - 8\right) = \frac{13}{12} + \frac{28}{3} = \frac{125}{12}$$

Per il calcolo del volume dovuto alla rotazione di Ω intorno alla retta $y=-1$ consideriamo la seguente trasformazione: $\begin{cases} X = x \\ Y = y+1 \end{cases}$. In questo modo la retta $y=-1$ verrà a coincidere nel sistema di riferimento OXY con l'asse delle ascisse mentre la parabola avrà equazione $Y = \frac{X}{2} - \frac{X^2}{2} + 1$.



La regione Ω in OXY è raffigurata in grigio nella figura soprastante. Il volume richiesto sarà quindi pari a

$$V = \pi \int_0^1 \left[\left(\frac{X}{2} - \frac{X^2}{2} + 1 \right)^2 - 1^2 \right] dX = \pi \int_0^1 \left(\frac{X^4}{4} - \frac{X^3}{2} - \frac{3X^2}{4} + X \right) dX =$$

$$= \pi \left[\frac{X^5}{20} - \frac{X^4}{8} - \frac{X^3}{4} + \frac{X^2}{2} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{7\pi}{40}$$

PROBLEMA 2

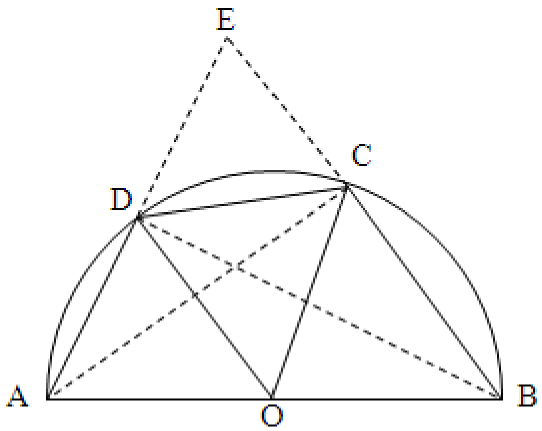
In una semicirconferenza di diametro AB di lunghezza 2, è inscritto un quadrilatero convesso ABCD avente il lato CD uguale al raggio. I prolungamenti dei lati AD e BC si incontrano inun punto E.

Punto 1

Si dimostri che, qualunque sia la posizione dei punti C e D sulla semicirconferenza, si ha:

$$D\hat{A}C = D\hat{B}C = \frac{\pi}{6} \quad \textbf{e} \quad A\hat{E}B = \frac{\pi}{3}$$

Si consideri la figura seguente rappresentante la geometria del problema.



Il triangolo COD è equilatero in quanto il lato CD per ipotesi ha la stessa lunghezza dei raggi CO e DO. Di conseguenza $C\hat{O}D = O\hat{D}C = D\hat{C}O = \frac{\pi}{3}$. Il triangolo COB è isoscele su base CB, per cui avrà gli angoli alla base uguali $O\hat{B}C = O\hat{C}B = \alpha$ e di conseguenza $C\hat{O}B = \pi - 2\alpha$; per differenza $D\hat{O}A = \pi - C\hat{O}D - C\hat{O}B = 2\alpha - \frac{\pi}{3}$. Anche il triangolo DOA è isoscele su base AB per cui avrà gli angoli alla base uguali $O\hat{A}D = O\hat{D}A = \frac{\pi - D\hat{O}A}{2} = \frac{2\pi}{3} - \alpha$; il triangolo CAB, essendo inscritto in una semicirconferenza, è rettangolo in C per cui $C\hat{A}B = \frac{\pi}{2} - O\hat{B}C = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Per differenza l'angolo $D\hat{A}C = O\hat{A}D - C\hat{A}B = \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$.

Analogamente il triangolo ADB è rettangolo in D in quanto inscritto in una semicirconferenza per cui $D\hat{B}A = A\hat{D}B - O\hat{A}D = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) = \alpha - \frac{\pi}{6}$ e per differenza

$D\hat{B}C = O\hat{B}C - D\hat{B}A = \alpha - \left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Il triangolo ACE è rettangolo in C per cui $A\hat{E}B = A\hat{E}C = A\hat{C}E - C\hat{A}E = A\hat{C}E - D\hat{A}C = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Punto 2

Se $x = D\hat{A}B$, si provi che la somma CE+DE in funzione di *x* è data da $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x$. Quale è l'intervallo di variabilità della *x*? Quale il valore massimo assunto da CE+DE?

Poichè $D\hat{A}C = \frac{\pi}{6}$, la limitazione sull'angolo $D\hat{A}B = x$ è $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$.

Il triangolo ACE è rettangolo in C, per cui a norma del teorema dei trinagoli rettangoli $\overline{CE} = \overline{CA} \cdot \tan\left(C\hat{A}E\right) = \overline{CA} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \overline{CA}$ dove $\overline{CA}$, applicando il teorema dei triangoli rettangoli al triangolo ACB è $\overline{CA} = \overline{AB} \cdot \cos\left(C\hat{A}B\right) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\cos x + \sin x$ per cui $\overline{CE} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\sqrt{3}\cos x + \sin x\right) = \cos x + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin x$; analogamente il traingolo BED è rettangolo in D per cui a norma del teorema dei trinagoli rettangoli $\overline{DE} = \overline{DB} \cdot \tan\left(E\hat{B}D\right) = \overline{DB} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \overline{DB}$ dove $\overline{DB}$, applicando il teorema dei triangoli rettangoli al triangolo ADB è $\overline{DB} = \overline{AB} \cdot \sin\left(D\hat{A}B\right) = 2\sin x$ per cui $\overline{DE} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 2\sin x = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin x$. In conclusione $f(x) = \overline{CE} + \overline{DE} = \cos x + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin x + \frac{2\sqrt{3}}{3}\cos x = \cos x + \sqrt{3}\sin x$ con $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$. La funzione $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x$ può essere anche scritta come $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ e il valore massimo è assunto quando $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$ cioè quando $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$.

Quindi il valore massimo è raggiunto per $x = \frac{\pi}{3}$ e vale $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$ e il quadrilatero corrispondente è un trapezio isoscele. In particolare $M = \left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$ è massimo relativo ed assoluto per la funzione $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Punto 3

Posto $g(x)=k\sin(x+\varphi)$ si trovino k e φ di modo che $g(x)=f(x)$

Nel Punto 2 abbiamo mostrato che la funzione $f(x)=\cos x+\sqrt{3}\sin x$ può essere anche scritta come $f(x)=\cos x+\sqrt{3}\sin x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$, per cui i valori (φ,k) tali per cui $g(x)=k\sin(x+\varphi)=f(x)$ sono $\varphi=\frac{\pi}{6},k=2$.

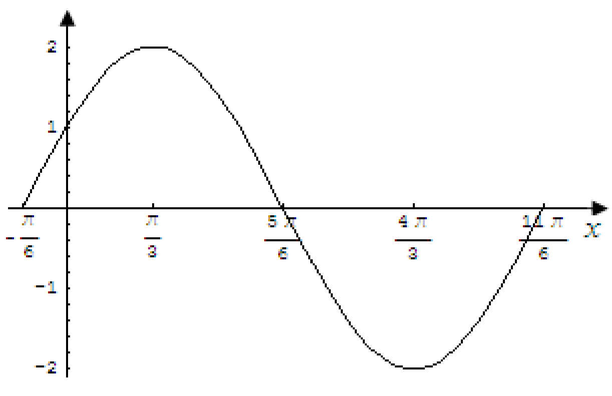
Punto 4

Si tracci, a prescindere dai limiti geometrici del problema, il grafico Γ di $f(x)$ e si denoti con R la regione delimitata, per $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right]$, dall'asse *x* e da Γ. Si calcoli l'area di R e si calcoli altresì il volume del solido generato da R nella rotazione attorno all'asse *x*.

Il grafico Γ della funzione $f(x)=\cos x+\sqrt{3}\sin x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ lo ricaviamo attraverso i seguenti passi:

1. Graficheremo la funzione elementare $h(x)=\sin x$;
2. Trasleremo il grafico del Punto 1 di $x=\frac{\pi}{6}$ verso le ascisse negative, ottenendo il grafico di $h_1(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$
3. Ricaveremo il grafico Γ di $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ moltiplicando per 2 le ordinate del grafico di $h_1(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

Di seguito il grafico:



Nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ la funzione $f(x)=\cos x+\sqrt{3}\sin x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ è positiva mentre in

$\left[\frac{5\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right]$ è negativa ed è simmetrica rispetto alla retta $x=\frac{5\pi}{6}$; da ciò deduciamo che l'area della regione R è pari a:

$$S(R)=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)dx-\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}}2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)dx=\left[-2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}+\left[2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}}=$$

$$=\left[-2\cos(\pi)+2\cos(0)\right]+\left[2\cos(2\pi)-2\cos(\pi)\right]=(2+2)+(2+2)=8$$

Il volume del solido dovuto alla rotazione di R intorno all'asse delle ascisse è $V(R)=\pi\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}}4\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)dx$. Effettuando la sostituzione $t=x+\frac{\pi}{6}$ l'integrale diventa

$$V(R)=\pi\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}}4\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)dx=\pi\int_0^{2\pi}4\sin^2 t\,dt=\pi\int_0^{2\pi}(2-2\cos 2t)dt=\pi\left[2t-\sin 2t\right]_0^{2\pi}=4\pi^2$$

QUESTIONARIO

Quesito 1

Sia W il solido ottenuto facendo ruotare attorno all’asse y la parte di piano compresa, per $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, fra il grafico di $y = \sin x$ e l’asse x. Quale dei seguenti integrali definiti fornisce il volume di W?

B) $2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$ **; B)** $\pi \int_0^1 (\arcsin x)^2 dx$ **; C)** $\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ **; D) nessuno di questi**

Si motivi la risposta.

La risposta esatta è la A).

Pensiamo la regione R decomposta in tanti ognuno dei quali genera un solido pari alla differenza di due cilindretti, in modo che, intuitivamente potremo pensare W come somma progressiva di infiniti gusci cilindrici coassiali di spessore dx, dove il raggio x varia da 0 a $\frac{\pi}{2}$.

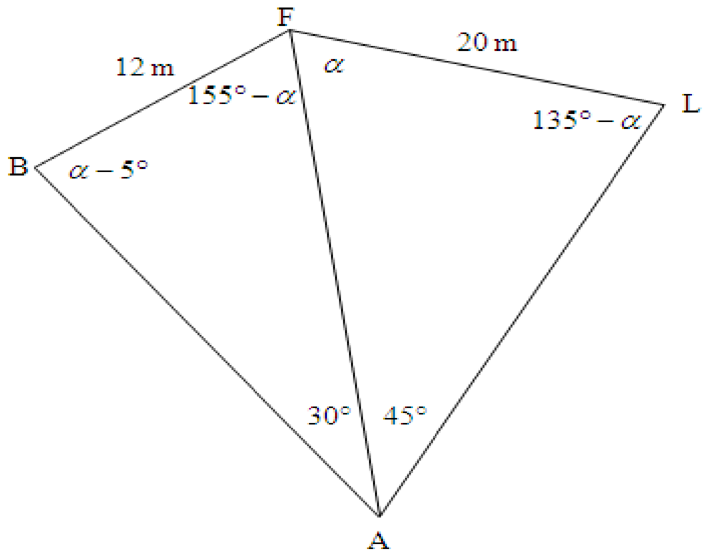
Il volume del guscio (infinitesimo) può essere calcolato come prodotto dell’area circolare di base di raggio esterno $(x_i + \Delta x_i)$ e raggio interno x_i , per l’altezza: $V_i = \pi \cdot \left[(x_i + \Delta x_i)^2 - x_i^2\right] \cdot \sin x_i$. Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore a Δx_i^2 il volume infinitesimo sarà $V_i = 2\pi \cdot x_i \cdot \sin x_i \cdot \Delta x_i$. Se il numero di gusci cilindrici in cui suddividiamo l’intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ è N il volume richiesto sarà:

$$V = \lim_{N \to +\infty} \sum_{i=1}^{N} V_i = \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{i=1}^{N} 2\pi \cdot x_i \cdot \sin x_i \cdot \Delta x_i \right) = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = 2\pi [-x \cos x + \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi \cdot 1 = 2\pi .$$

Quesito 2

Angelo siede in un punto A della piazza del suo paese e vi osserva un albero in B, una fontana in F e un lampione in L. Stima l’ampiezza dell’angolo sotto cui vede la congiungente B e F pari a 30° e l’ampiezza dell’angolo sotto cui vede FL pari a 45°. Sapendo che $\mathrm{BF} = 12\mathrm{m}$ **e** $\mathrm{FL} = 20\mathrm{m}$ **e che** $B\hat{F}L = 155°$**, si spieghi ad Angelo come procedere per calcolare AB, AF e AL. Sono attendibili i risultati** $\mathrm{AB} = \mathrm{AF} \cong 23{,}18\mathrm{m}$ **e** $\mathrm{AL} \cong 27{,}85\mathrm{m}$ **?**

Consideriamo la figura seguente rappresentante la geometria del problema.



Indicando l'angolo $A\hat{F}L = \alpha$, gli altri angoli di conseguenza saranno $A\hat{L}F = 135° - \alpha, A\hat{F}B = 155° - \alpha, A\hat{B}F = \alpha - 5°$ con $5° \leq \alpha \leq 135°$.

Applichiamo il teorema dei seni ai due triangoli ABF ed AFL per ricavare in ambo i casi la misura del lato $\overline{AF}$ e dei lati $\overline{AL}$ e $\overline{AB}$:

$$\frac{\overline{AF}}{\sin(135° - \alpha)} = \frac{\overline{FL}}{\sin(45°)} \Rightarrow \overline{AF} = \frac{20\sin(135° - \alpha)}{\sin(45°)} = 20\sqrt{2} \cdot \sin(135° - \alpha) \quad (1)$$

$$\frac{\overline{AF}}{\sin(\alpha - 5°)} = \frac{\overline{BF}}{\sin(30°)} \Rightarrow \overline{AF} = \frac{12\sin(\alpha - 5°)}{\sin(30°)} = 24 \cdot \sin(\alpha - 5°) \quad (2)$$

$$\frac{\overline{AL}}{\sin(\alpha)} = \frac{\overline{FL}}{\sin(45°)} \Rightarrow \overline{AL} = \frac{\overline{FL}\sin(\alpha)}{\sin(45°)} = 20\sqrt{2} \cdot \sin(\alpha) \quad (3)$$

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(155° - \alpha)} = \frac{\overline{BF}}{\sin(30°)} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{\overline{BF}\sin(155° - \alpha)}{\sin(30°)} = 24 \cdot \sin(155° - \alpha) \quad (4)$$

Uguagliando le due espressioni (1) e (2) si ha:

$$20\sqrt{2} \cdot \sin(135° - \alpha) = 24 \cdot \sin(\alpha - 5°) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20\sqrt{2}(\sin 135° \cos\alpha - \cos 135° \sin\alpha) = 24(\sin\alpha\cos 5° - \cos\alpha \sin 5°) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right) = 24(\sin\alpha\cos 5° - \cos\alpha\sin 5°) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20(\cos\alpha + \sin\alpha) = 24(\sin\alpha\cos 5° - \cos\alpha\sin 5°) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (24\cos 5° - 20)\sin\alpha - (20 + 24\sin 5°)\cos\alpha = 0 \Rightarrow \text{posto } \cos\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Rightarrow (24\cos 5° - 20)\cos\alpha \cdot \left[\tan\alpha - \left(\frac{20 + 24\sin 5°}{24\cos 5° - 20}\right)\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \left(\frac{20 + 24\sin 5°}{24\cos 5° - 20}\right) \cong 5{,}652$$

Ricordiamo ora le formule trigonometriche che esprimono il seno e il coseno in funzione della tangente: $\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}, \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$.

Dalla (1) ricaviamo

$$\overline{AF} = 20\sqrt{2}\cdot\sin(135° - \alpha) = 20(\sin\alpha + \cos\alpha) = \frac{20(1+\tan\alpha)}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{20(1+5{,}652)}{\sqrt{1+(5{,}652)^2}} \cong 23{,}18m$$

Dalla (3) ricaviamo $\overline{AL} = 20\sqrt{2}\cdot\sin(\alpha) = \frac{20\sqrt{2}\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{20\sqrt{2}\cdot 5{,}652}{\sqrt{1+(5{,}652)^2}} \cong 27{,}85m$

Dalla (4) ricaviamo

$$\overline{AB} = 24\cdot\sin(155° - \alpha) = 24\cdot(\sin 155°\cos\alpha - \cos 155°\sin\alpha) =$$
$$= \frac{24\sin 155° - 24\cos 155°\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{24\sin 155° - 24\cos 155°\cdot 5{,}652}{\sqrt{1+(5{,}652)^2}} \cong 23{,}18m$$

In conclusione sono attendibili i risultati proposti dalla traccia.

Quesito 3

La base di un solido S è la regione triangolare compresa tra gli assi coordinati e la retta di equazione $4x + 5y = 20$. Si calcoli il volume di S sapendo che le sue sezioni con piani perpendicolari all'asse *x* sono semicerchi.

Fissato *x*, il raggio del semicerchio sarà $r(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{20-4x}{5}\right) = \left(\frac{10-2x}{5}\right)$ con $0 \le x \le 5$ cui corrisponde un' area pari a $A(x) = \frac{\pi}{2}r^2(x) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{10-2x}{5}\right)^2 = \frac{2\pi}{25}(5-x)^2$. Integrando l'area otteniamo il volume richiesto: $V = \int_0^5 A(x)dx = \frac{2\pi}{25}\int_0^5 (5-x)^2\,dx = \frac{2\pi}{75}\left[-(5-x)^3\right]_0^5 = \frac{2\pi}{75}\cdot 125 = \frac{10\pi}{3}$.

Quesito 4

Si spieghi perchè l'equazione $\cos x = x$ ha almeno una soluzione

La funzione $f(x) = x - \cos x$ è definita e continua in tutto R ed è strettamente crescente nel dominio R in quanto ha derivata prima $f'(x) = 1 + \sin x$ non negativa. Poichè, inoltre, $f(0) = -1 < 0, f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ a norma del teorema degli zeri esiste un'unica soluzione dell'equazione $f(x) = 0$ e cioè di $\cos x = x$.

Quesito 5

Si risolva l'equazione $|x-1| = 1-|x|$

Per risolvere l'equazione richiesta bisogna considerare che:

- per $x<0$ si ha: $|x-1| = 1-x, |x| = -x$
- per $0 \le x < 1$ si ha: $|x-1| = 1-x, |x| = x$
- per $x \ge 1$ si ha: $|x-1| = x-1, |x| = x$

Risolviamo l'equazione considerando gli intervalli soprastanti:

- $x<0$: $1-x=1+x \Rightarrow x=0$ non accettabile;
- $0 \le x < 1$: $1-x=1-x \Rightarrow 0=0$ per cui tutti i numeri reali appartenenti all'intervallo $[0,1)$ sono soluzioni dell'equazione;
- $x \ge 1$: $x-1=1-x \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1$ accettabile

In conclusione l'equazione presenta infinite soluzioni e sono gli infiniti numeri reali appartenenti all'intervallo $[0,1]$.

Quesito 6

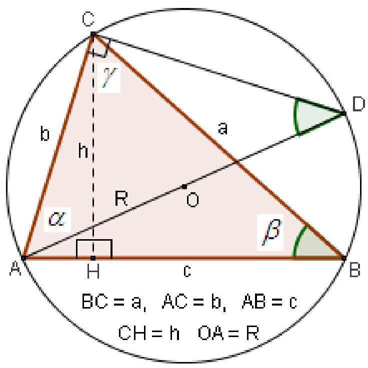
Una sfera è inscritta in un cubo; quale è il rapporto fra il volume della sfera e quello del cubo?

Sia r il raggio della sfera inscritta il cui volume è $V_{Sfera} = \frac{4\pi}{3} r^3$. Il cubo circoscritto ha lato pari al diametro della sfera $l = 2r$, di conseguenza il volume è $V_{Cubo} = l^3 = 8r^3$. Il rapporto tra i volumi è quindi $R = \frac{V_{Sfera}}{V_{Cubo}} = \frac{\frac{4\pi}{3} r^3}{8r^3} = \frac{\pi}{6}$.

Quesito 7

Si dimostri che in un triangolo, il rapporto tra ciascun lato e il seno dell'angolo ad esso opposto è uguale al diametro del cerchio circoscritto al triangolo.

Si consideri la figura seguente.



Siano $\alpha = C\hat{A}B, \beta = C\hat{B}A, \gamma = B\hat{C}A$ gli angoli opposti rispettivamente ai lati a, b, c del triangolo ABC inscritto e sia R il raggio della circonferenza circoscritta.

Il triangolo ACD è inscritto in una semicirconferenza per cui è rettangolo in C; inoltre $A\hat{D}C = A\hat{B}C$ in quanto sono angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco.

I triangoli ACD e CHB sono, quindi, simili in quanto entrambi rettangoli con un angolo acuto uguale, per cui vale la proporzione tra lati omologhi: $h : b = a : 2R$ da cui $2R = \frac{ab}{h}$. Per il teorema sui triangoli rettangoli applicato a CHB si ha $h = a \sin\beta = b \sin\alpha$ per cui sostituendo in $2R = \frac{ab}{h}$ ricaviamo $2R = \frac{\cancel{a}b}{\cancel{a}\sin\beta} = \frac{b}{\sin\beta}$ e $2R = \frac{a\cancel{b}}{\cancel{b}\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha}$; dobbiamo quindi solo dimostrare che $2R = \frac{c}{\sin\gamma}$; applicando il teorema dei seni al triangolo ABC si ha $\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$ per cui sostituendo nella formula del diametro si ha in definitiva $2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

Quesito 8

Sia $t \in [0, 2\pi]$; quale è la curva rappresentata dalle equazioni $x = a\cos t$ e $y = b\sin t$?

Si tratta di trovare l'equazione cartesiana del luogo a partire dalle seguenti equazioni parametriche:

$$\begin{cases} \cos t = \frac{x}{a} \\ \sin t = \frac{x}{b} \end{cases}$$

Elevando ambo i membri al quadrato e ricordando l'identità goniometrica fondamentale $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ il luogo avrà equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ che corrisponde all'equazione dell'ellisse di semiassi *a* e *b*.