ESAME DI STATO DI LICEO DELLA COMUNICAZIONE
CORSO DI ORDINAMENTO
Tema di: MATEMATICA
a. s. 2010-2011

PROBLEMA 1

Nel sistema di riferimento *Oxy*, sia Γ il grafico della funzione definita su R da

$$f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$$

1. Si verifichi che Γ taglia l'asse delle ordinate nel punto A e l'asse delle ascisse nei punti B e C. Si calcolino le coordinate di A,B,C.
2. Si studi la funzione *f* e si disegni Γ
3. Si consideri la funzione *g* definita su R da $g(x) = (x^2 + 2x + 1)e^{-x}$. Si mostri che la funzione *g* è una primitiva della funzione *f* su R

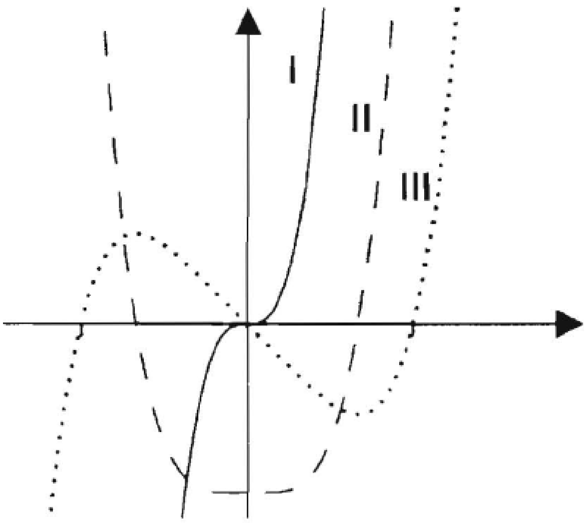
PROBLEMA 2

Nel piano, riferito ad assi cartesiani *Oxy*, sono dati i punti: A(2;1), B(-2;1), C(2;3), D(2;5), E(6;5)

1. Si verifichi che il quadrilatero convesso ABDE è un parallelogramma del quale C è il punto d'incontro delle diagonali. Si calcoli l'area del quadrilatero.
2. Si consideri il fascio di curve di equazione
$$y = \frac{x^2 + 2x + a}{2x - 4}$$
dove *a* è un parametro reale. Si verifichi che, qualunque sia *a*, la curva corrispondente ammette C come centro di simmetria e le rette AD e BE come asintoti.
3. Si determini la curva λ del fascio passante per il punto P(0,1) e si verifichi che le rette AB e DE sono tangenti a λ. Si tracci il grafico di λ.
4. Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata da λ, dalla retta BE, dalla retta di equazione $x = -2$ e dall'asse *y*.

QUESIONARIO

1. Si trovi l'area della regione delimitata dalla curva $y = \cos x$ e dall'asse x da $x = 1$ a $x = 2$ *radianti.*
2. Si trovi il punto della curva $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate $(4,0)$.
3. Si calcoli $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\tan x - \tan a}{x - a}$
4. Il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi n
5. In una delle sue opere G. Galilei fa porre da Salviati, uno dei personaggi, la seguente questione riguardante l'insieme N dei numeri naturali ("i numeri tutti"). Dice Salviati: «....se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?». Come si può rispondere all 'interrogativo posto e con quali argomentazioni?
6. Di tutti i coni inscritti in una sfera di raggio 10 cm, qual è quello di superficie laterale massima?
7. Un test d'esame consta di dieci domande, per ciascuna delle quali si deve scegliere l'unica risposta corretta fra quattro alternative. Quale è la probabilità che, rispondendo a caso alle dieci domande, almeno due risposte risultino corrette?
8. In che cosa consiste il problema della *quadratura del cerchio?* Perchè è così spesso citato?
9. Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell 'ipotenusa.
10. Nella figura a lato, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione *f,* un altro lo è della funzione derivata *f'* e l'altro ancora di *f''*.
Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?



	f	f'	f''
A)	I	II	III
B)	I	III	II
C)	II	III	I
D)	III	II	I
E)	III	I	II

Si motivi la risposta.

PROBLEMA 1

Nel sistema di riferimento *Oxy*, sia Γ il grafico della funzione definita su R da

$$f(x)=(1-x^2)e^{-x}$$

<u>*Punto 1*</u>

Si verifichi che Γ taglia l'asse delle ordinate nel punto A e l'asse delle ascisse nei punti B e C. Si calcolino le coordinate di A,B,C.

Le intersezioni di $f(x)=(1-x^2)e^{-x}$ con l'asse delle ordinate le ricaviamo risolvendo il sistema $\begin{cases} f(x)=(1-x^2)e^{-x} \\ x=0 \end{cases}$ da cui ricaviamo $A(0,1)$.

Le intersezioni di $f(x)=(1-x^2)e^{-x}$ con l'asse delle ordinate le ricaviamo risolvendo il sistema $\begin{cases} f(x)=(1-x^2)e^{-x} \\ f(x)=0 \end{cases}$ cioè risolvendo l'equazione $(1-x^2)=0$ da cui ricaviamo $B(-1,0),C(1,0)$.

<u>*Punto 2*</u>

Si studi la funzione *f* e si disegni Γ

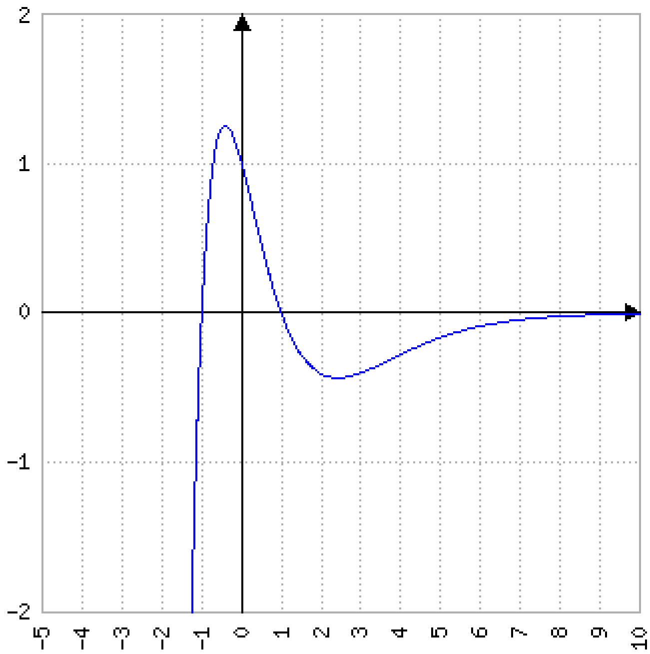
Studiamo la funzione $f(x)=(1-x^2)e^{-x}$:

- *Dominio*: R
- *Intersezione ascisse*: $x=-1,1$
- *Intersezioni ordinate*:(0,1);
- *Simmetrie*: la funzione non è nè pari nè dispari;
- *Positività*: $f(x)=(1-x^2)e^{-x}>0 \to (1-x^2)>0 \to -1<x<1$
- *Asintoti verticali*: non ve ne sono in quanto il dominio è R
- *Asintoti orizzontali*: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(1-x^2)e^{-x}=-\infty\cdot+\infty=-\infty$, mentre $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(1-x^2)e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-x^2)}{e^x}\xrightarrow{\text{2 volte De L'Hospital}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-x^2)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{e^x}=0$ per cui la retta $y=0$ è asintoto orizzontale destro;
- *Asintoti obliqui*: non ve ne sono in quanto $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty, \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$
- *Crescenza e decrescenza*: la derivata prima è $f'(x)=-2x\cdot e^{-x}-(1-x^2)e^{-x}=(x^2-2x-1)e^{-x}$ per cui è strettamente crescente in $(-\infty,1-\sqrt{2})\cup(1+\sqrt{2},+\infty)$ e strettamente decrescente in $(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})$ per cui $x_M=1-\sqrt{2}$ è l'ascissa del massimo e $x_m=1+\sqrt{2}$ è l'ascissa del

minimo;

- *Concavità e convessità*: $f''(x)=(2x-2)\cdot e^{-x}-(x^2-2x-1)e^{-x}=(-x^2+4x-1)e^{-x}$ per cui $f''(x)>0 \Rightarrow x^2-4x+1<0 \Rightarrow 2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$; quindi la funzione ha concavità verso l'alto in $(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$ e verso il basso in $(-\infty,2-\sqrt{3})\cup(2+\sqrt{3},+\infty)$; i punti $\left(2-\sqrt{3},(4\sqrt{3}-6)e^{\sqrt{3}-2}\right)$ e $\left(2+\sqrt{3},(-4\sqrt{3}-6)e^{-\sqrt{3}-2}\right)$ sono flessi a tangente obliqua.

Il grafico Γ è di seguito presentato:



Punto 3

Si consideri la funzione *g* definita su R da $g(x)=(x^2+2x+1)e^{-x}$. Si mostri che la funzione *g* è una primitiva della funzione *f* su R

Calcoliamo l'integrale indefinito $F(x)=\int(1-x^2)e^{-x}dx$ utilizzando l'integrazione per parti:

$$F(x)=\int(1-x^2)e^{-x}dx=-(1-x^2)e^{-x}-\int 2xe^{-x}dx=-(1-x^2)e^{-x}+2xe^{-x}-\int 2e^{-x}dx=$$
$$=-(1-x^2)e^{-x}+2xe^{-x}+2e^{-x}=(x^2+2x+1)e^{-x}+K$$

Posto $K=0$ ricaviamo $g(x)=(x^2+2x+1)e^{-x}=(x+1)^2e^{-x}$

Punto 4

Si calcoli l'area della parte di piano compresa tra Γ e l'asse x sull'intervallo [-1,2]. Si calcoli altresì

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_1^{\alpha}(1-x^2)e^{-x}dx$$

e si interpreti geometricamente il risultato.

L'area richiesta, ricordando che una primitiva della funzione integranda è $(x+1)^2 e^{-x}$ come dimostrato al Punto 3, è pari a

$$S = \int_{-1}^{1} (1-x^2)e^{-x}dx - \int_{1}^{2} (1-x^2)e^{-x}dx = \left[(x+1)^2 e^{-x}\right]_{-1}^{1} - \left[(x+1)^2 e^{-x}\right]_{1}^{2} =$$

$$= 4e^{-1} - 9e^{-2} + 4e^{-1} = 8e^{-1} - 9e^{-2}$$

Calcoliamo ora invece il limite $\lim_{\alpha\to+\infty}\int_{1}^{\alpha}(1-x^2)e^{-x}dx$. Si ha:

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_{1}^{\alpha}(1-x^2)e^{-x}dx = \lim_{\alpha\to+\infty}\left[(x+1)^2 e^{-x}\right]_{1}^{\alpha} = \lim_{\alpha\to+\infty}\left[(\alpha+1)^2 e^{-\alpha}\right] - 4e^{-1}$$

Il limite applicando due volte il teorema di De L'Hospital è $\lim_{\alpha\to+\infty}\left[(\alpha+1)^2 e^{-\alpha}\right] = \lim_{\alpha\to+\infty}\left[\frac{(\alpha+1)^2}{e^{\alpha}}\right] = \lim_{\alpha\to+\infty}\frac{2}{e^{\alpha}} = 0$ per cui $\lim_{\alpha\to+\infty}\int_{1}^{\alpha}(1-x^2)e^{-x}dx = -4e^{-1}$.

Questo integrale, se fosse stato preceduto dal segno "-" , non era altro che l'area della regione di piano compresa tra Γ e l'asse x nell'intervallo $[1,+\infty)$ in quanto in questo intervallo la funzione è negativa; infatti il valore dell'integrale così proposto è negativo e in quanto tale non può identificare un'area che per definizione è non negativa; col segno "-" davanti questo integrale definito sarebbe positivo e identificherebbe l'area sopra indicata.

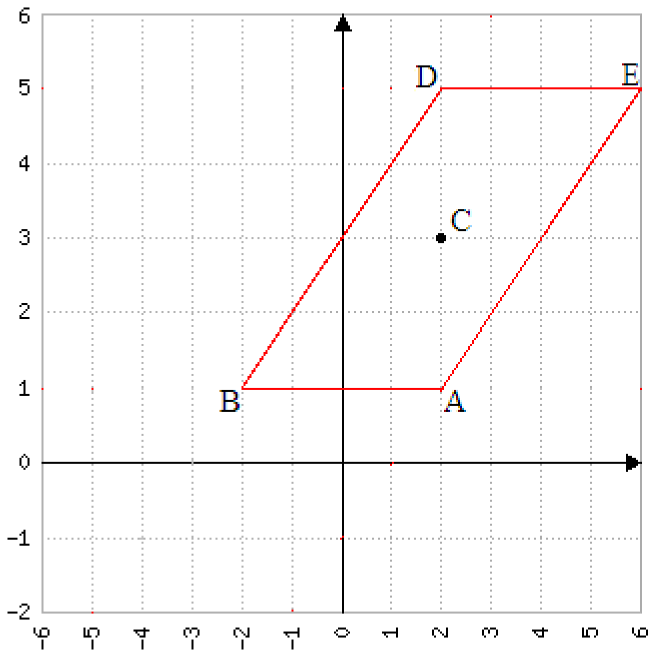
PROBLEMA 2

Nel piano, riferito ad assi cartesiani *Oxy*, sono dati i punti: A(2;1), B(-2;1), C(2;3), D(2;5), E(6;5)

Punto 1

Si verifichi che il quadrilatero convesso ABDE è un parallelogramma del quale C è il punto d'incontro delle diagonali. Si calcoli l'area del quadrilatero.

Si consideri la figura seguente raffigurante il parallelogramma ABDE:



Le equazioni delle rette componenti il parallelogramma, ricordando la formula $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ della retta passante per due punti $(x_1, y_1),(x_2, y_2)$, sono:

- AB : $y=1$ (si ricava senza applicare la formula soprastante ma notando che i punti A e B hanno stessa ordinata)
- DE: $y=5$ (si ricava senza applicare la formula soprastante ma notando che i punti D e E hanno stessa ordinata)
- BD: $y=x+3$
- AE: $y=x-1$

Notiamo dalle equazioni delle rette che i lati opposti del quadrilatero sono paralleli e due lati consecutivi non sono perpendicolari per cui il quadrilatero può essere un rombo o un parallelogramma; ma poichè le lunghezze di due lati consecutivi sono differenti in quanto

$\overline{\mathrm{AB}} = 4, \overline{\mathrm{BD}} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ allora deduciamo che il quadrilatero ABDE è un parallelogramma.

Sempre tendno presente la formula che esprime l'equazione di una retta passante per due punti ricaviamo che le diagonali hanno equazioni:

- AD: $x = 2$ (si ricava senza applicare la formula soprastante ma notando che i punti A e D hanno stessa ascissa)
- BE: $y = \frac{x}{2} + 2$

che si incontrano nel punto $(2,3)$ coincidente con C.

La base del parallelogramma misura $\overline{\mathrm{AB}} = 4$ e l'altezza $\overline{\mathrm{AD}} = 4$ per cui l'area del parallelogramma è 16.

Punto 2

Si consideri il fascio di curve di equazione

$$y = \frac{x^2 + 2x + a}{2x - 4}$$

dove *a* è un parametro reale. Si verifichi che, qualunque sia *a*, la curva corrispondente ammette C come centro di simmetria e le rette AD e BE come asintoti.

Notiamo innanziutto che il fascio di curve di equazione $y = \frac{x^2 + 2x + a}{2x - 4}$ degenera nella retta di equazione $y = \frac{x}{2} + 2$ se $a = -8$. Consideriamo la seguente trasformazione $\begin{cases} X = 4 - x \\ Y = 6 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - X \\ y = 6 - Y \end{cases}$ e sostituiamo nella curva di equazione $y = \frac{x^2 + 2x + a}{2x - 4}$. Si ha:

$$6 - Y = \frac{(4 - X)^2 + 2(4 - X) + a}{2(4 - X) - 4} = \frac{X^2 - 10X + 24 + a}{4 - 2X} \rightarrow$$

$$\rightarrow Y = 6 - \frac{X^2 - 10X + 24 + a}{4 - 2X} = \frac{-X^2 - 2X - a}{4 - 2X} = \frac{X^2 + 2X + a}{2X - 4}$$

per cui l'espressione della funzione trasformata coincide con quella di partenza; quindi C è centro di simmetria al variare di *a*.

La funzione $y = \frac{x^2 + 2x + a}{2x - 4}$ è definita in $R - \{2\}$; il limite per $x \rightarrow 2$ è $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + a}{2x - 4} = \begin{cases} \infty & \text{se } a \neq -8 \\ 3 & \text{se } a = -8 \end{cases}$ per cui $x = 2$ è asintoto verticale se e solo se $a \neq -8$ mentre se $a = -8$ il punto di ascissa $x = 2$ è una discontinuità eliminabile. Supponiamo quindi da ora in avanti $a \neq -8$.

Poichè $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2x+a}{2x-4} = \pm\infty$ non ci sono asintoti orizzontali; vediamo se esistono asintoti obliqui.

Essi avranno equazione $y = mx + q$ con $m = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right], q = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - mx\right]$; nel caso in esame

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x+a}{2x^2-4x} = \frac{1}{2},$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2x+a}{2x-4} - \frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x+a}{2x-4} = 2$$

per cui l'asintoto obliquo ha equazione $y = \frac{x}{2} + 2$.

Gli asintoti, quindi, posto $a \neq -8$, hanno equazioni $x = 2$ e $y = \frac{x}{2} + 2$ che coincidono con le rette AD e BE.

Punto 3

Si determini la curva λ del fascio passante per il punto P(0,1) e si verifichi che le rette AB e DE sono tangenti a λ. Si tracci il grafico di λ.

La curva λ del fascio passante per il punto P(0,1) è quella per cui $\frac{a}{-4} = 1 \Rightarrow a = -4$.

La retta AB ha equazione $y = 1$ mentre la retta DE ha equazione $y = 5$.

Per verificare che le rette AB e DE sono tangenti a λ calcoliamo i punti a tangente orizzontale della funzione $y = \frac{x^2+2x-4}{2x-4}$ cioè i punti in cui si annulla la derivata prima. La derivata prima è: $y' = \frac{(2x+2)(2x-4) - 2(x^2+2x-4)}{(2x-4)^2} = \frac{2x^2-8x}{(2x-4)^2}$ per cui $y' = \frac{2x^2-8x}{(2x-4)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 4$. I punti a tangente orizzontale sono, quindi, $(0,1)$ e $(4,5)$ che appartengono alle rette di equazione $y = 1$ e $y = 5$.

Studiamo la funzione $y = \frac{x^2+2x-4}{2x-4}$:

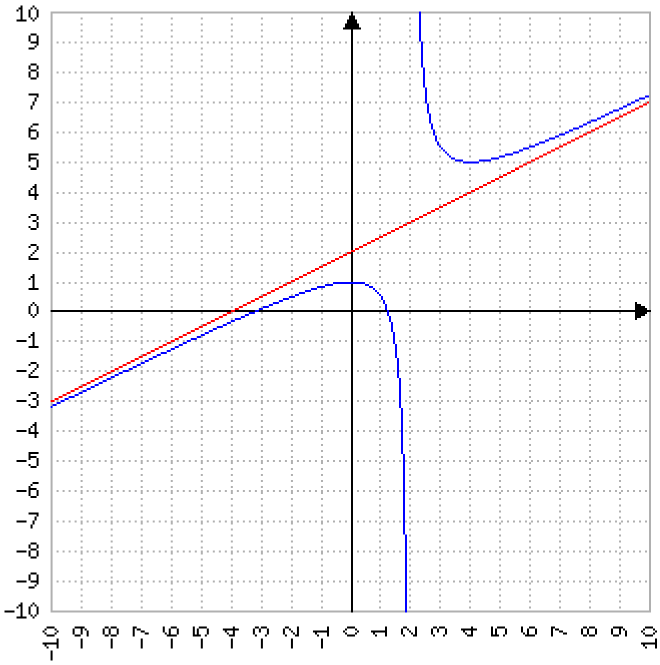
- *Dominio*: $R - \{2\}$
- *Intersezione ascisse*: $y = \frac{x^2+2x-4}{2x-4} = 0 \Rightarrow x^2+2x-4 = 0 \Rightarrow x_\pm = -1 \pm \sqrt{5}$;
- *Intersezioni ordinate*:(0,1);
- *Simmetrie*: la funzione non è nè pari nè dispari;

- *Positività*: $y = \frac{x^2 + 2x - 4}{2x - 4} > 0 \Rightarrow -1 - \sqrt{5} < x < -1 + \sqrt{5} \vee x > 2$;
- *Asintoti verticali*: come dimostrato al Punto 2, poichè $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 + 2x - 4}{2x - 4} = +\infty, \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 + 2x - 4}{2x - 4} = -\infty$, la retta $x = 2$ è asintoto verticale destro e sinistro;
- *Asintoti orizzontali*: come dimostrato al Punto 2, non vi sono asintoti orizzontali;
- *Asinoti obliqui*: come dimostrato al Punto 2, l'asintoto obliquo destro e sinostro coincidono con $y = \frac{x}{2} + 2$;
- *Crescenza e decrescenza*: la derivata prima è $y' = \frac{2x^2 - 8x}{(2x - 4)^2}$ il cui segno è di seguito presentato:

  $$y' = \frac{2x^2 - 8x}{(2x - 4)^2} > 0 \Rightarrow x < 0 \vee x > 4$$
  $$y' = \frac{2x^2 - 8x}{(2x - 4)^2} < 0 \Rightarrow 0 < x < 2 \vee 2 < x < 4$$

  per cui la funzione è strettamente crescente in $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ e strettamente decrescente in $(0,2) \cup (2,4)$ per cui $M(0,1)$ è massimo relativo e $m(4,5)$ è minimo relativo;
- <u>Concavità e convessità</u>: la derivata seconda è $y'' = \frac{(4x-8)(2x-4)^2 - 4(2x-4)(2x^2 - 8x)}{(2x-4)^4} = \frac{16(x-2)^3 - 16(x-2)^2(x-4)}{16(x-2)^4} = \frac{2}{(x-2)^2}$ per cui la funzione nel dominio ha sempre concavità verso l'alto e non presenta pertanto flessi.

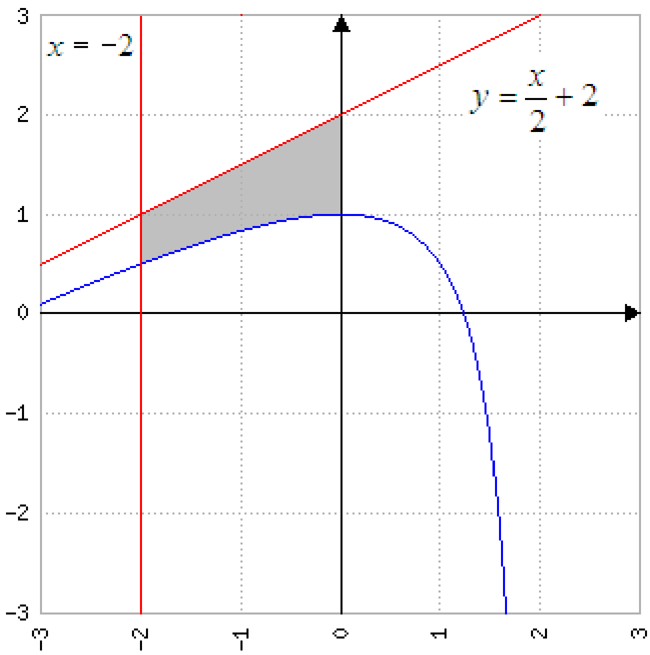
Il grafico Γ è di seguito presentato:



Punto 4

Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata da λ, dalla retta BE, dalla retta di equazione $x = -2$ e dall'asse *y*.

L'area da calcolare è di seguito rappresentata in grigio:



L'area richiesta è $S = \int_{-2}^{0} \left(\frac{x}{2} + 2 - \frac{x^2 + 2x - 4}{2x - 4} \right) dx$; poichè $\left(\frac{x^2 + 2x - 4}{2x - 4} \right) = \left(\frac{x}{2} + 2 + \frac{4}{2x - 4} \right)$ essa diventa

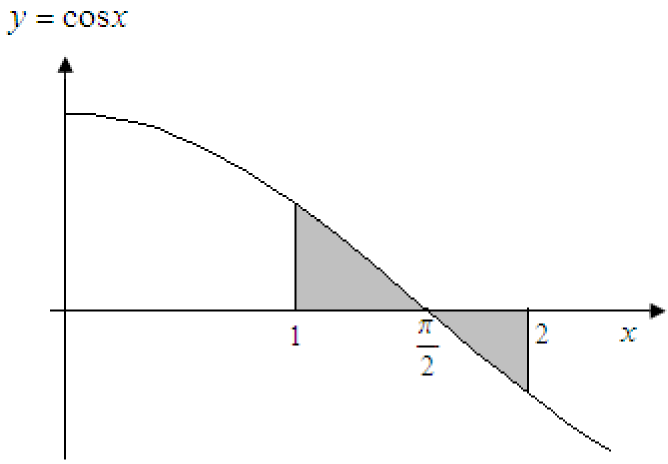
$$S = \int_{-2}^{0} \left(\frac{x}{2} + 2 - \frac{x^2 + 2x - 4}{2x - 4} \right) dx = \int_{-2}^{0} \left(-\frac{4}{2x - 4} \right) dx = \int_{-2}^{0} \left(-\frac{2}{x - 2} \right) dx = \left[-2 \ln |x - 2| \right]_{-2}^{0} = -2 \ln 2 + 2 \ln 4 = 2 \ln 2$$

QUESTIONARIO

Quesito 1

Si trovi l'area della regione delimitata dalla curva $y = \cos x$ e dall'asse *x* da *x* = 1 a *x* = 2 *radianti.*

L'area richiesta è raffigurata in grigio di seguito:



Ricordando che il coseno cambia segno, da negativo a positivo in corrispondenza di $\frac{\pi}{2}$ l'area

$$S = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{2} \cos x dx = [\sin x]_1^{\frac{\pi}{2}} - [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{2} = 1 - \sin(1) - \sin(2) + 1 = 2 - \sin(1) - \sin(2) \cong 0{,}25.$$

Quesito 2

Si trovi il punto della curva $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate $(4{,}0)$.

Un punto P della curva ha coordinate $(x, \sqrt{x})$ e la distanza dal punto (4,0) è $d(x) = \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{x})^2} = \sqrt{x^2 - 7x + 16}$. Massimizzare la funzione distanza è equivalente a massimizzare la funzione quadrato della distanza, per cui massimizzeremo la funzione $h(x) = d^2(x) = x^2 - 7x + 16$; la derivata prima è $h'(x) = 2x - 7$ per cui la funzione $h(x)$ è strettamente crescente in $\left(\frac{7}{2}, +\infty\right)$ e strettamente decrescente in $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right)$ per cui presenta un minimo all'ascissa $x = \frac{7}{2}$. Il punto più vicino è quindi $\left(\frac{7}{2}, \frac{\sqrt{14}}{2}\right)$ e la distanza minima è

$$d_{\min} = \sqrt{\left(\frac{7}{2}-4\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Quesito 3

Si calcoli $\lim_{x\to a}\frac{\tan x - \tan a}{x-a}$

Il problema si pone per a appartenente al dominio della funzione tangente e cioè per $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$. Il limite $\lim_{x\to a}\frac{\tan x - \tan a}{x-a}$ si presenta nella forma indeterminata 0/0 per cui applicando de l'Hopital si ha $\lim_{x\to a}\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 a}$. Un risultato del genere era prevedibile in quanto il limite richiesto coincide con la definizione di derivata della funzione $\tan x$ in $x = a$.

Quesito 4

Il numero delle combinazioni di *n* oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi *n*

Si deve risolvere l'equazione $C_{n,4} = C_{n,3}, n \in N$. La condizione di esistenza è $\begin{cases} n \geq 4 \\ n \geq 3 \end{cases} \Rightarrow n \geq 4$.

Ricordando che $C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\dots\cdot(n-k+1)}{k!}$, con $n \geq k$. Nel caso in esame $C_{n,4} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)}{4!}, C_{n,3} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{3!}$ e imponendo l'uguaglianza si ha:

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \to \frac{n(n-1)(n-2)}{24}(n-3-4) = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-7)}{24} = 0$$ da cui $n = 0,1,2,7$. Poichè per la condizione di esistenza deve essere $n \geq 4$ la soluzione accettabile è $n = 7$.

Alternativamente, ricordando la proprietà di simmetria dei coefficienti binomiali $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, essendo $k = 4$ ed $n-k = 3$, l'uguaglianza è soddisfatta se $n-4 = 3$ e quindi se $n = 7$.

Quesito 5

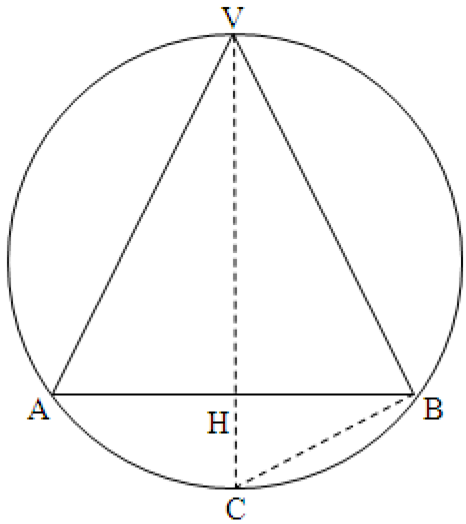
In una delle sue opere G. Galilei fa porre da Salviati, uno dei personaggi, la seguente questione riguardante l'insieme N dei numeri naturali ("i numeri tutti"). Dice Salviati: «....se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?». Come si può rispondere all 'interrogativo posto e con quali argomentazioni?

Non è corretto quanto esposto da Salviati, e l'inganno viene dal fatto che si sta ragionando su insiemi infiniti. Più precisamente se N è l'insieme dei numeri naturali e $Q \subset N$ è l'insieme dei quadrati perfetti allora l'applicazione $f : N \to Q,\ f(n) = n^2$ è biiettiva. Ne segue che i due insiemi N e Q hanno la stessa cardinalità o, in altre parole, lo stesso numero di elementi.

Quesito 6

Di tutti i coni inscritti in una sfera di raggio 10 cm, qual è quello di superficie laterale massima?

Consideriamo la figura sottostante:

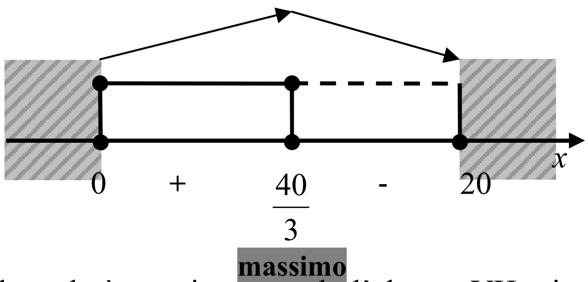


Sia $\overline{VH} = x$ con $0 < x < 20$. Per il teorema di Euclide $\overline{VB} = \sqrt{\overline{VH} \cdot \overline{VC}} = \sqrt{20x}$ e per il teorema di Pitagora $\overline{HB} = \sqrt{\overline{VB}^2 - \overline{VH}^2} = \sqrt{20x - x^2}$; la superficie laterale del cono è $S_l(x) = \pi \cdot \overline{HB} \cdot \overline{VB} = \sqrt{20}\pi \cdot \sqrt{20x^2 - x^3}$ con $0 < x < 20$. La massimizzazione di $S_l(x)$ equivale alla massimizzazione di $h(x) = \sqrt{20x^2 - x^3}$ il che equivale alla massimizzazione del quadrato della funzione ausiliaria $h(x) = \sqrt{20x^2 - x^3}$; va quindi massimizzata la funzione $g(x) = h^2(x) = 20x^2 - x^3$ la cui derivata prima è $g'(x) = 40x - 3x^2$ e il cui segno è il seguente:

$$g'(x) = 40x - 3x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{40}{3}$$

$$g'(x) = 40x - 3x^2 < 0 \Rightarrow \frac{40}{3} < x < 20$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = \frac{40}{3}$$



Dal segno soprastante deduciamo che la superficie laterale è massima quando l'altezza VH misura

$x_{\max} = \frac{40}{3}$ cui corrisponde $S_l(x_{\max}) = \sqrt{20}\pi \cdot \sqrt{20\left(\frac{40}{3}\right)^2 - \left(\frac{40}{3}\right)^3} = \frac{800\sqrt{3}}{9}\pi \cong 483{,}68cm^2$

Quesito 7

Un test d'esame consta di dieci domande, per ciascuna delle quali si deve scegliere l'unica risposta corretta fra quattro alternative. Quale è la probabilità che, rispondendo a caso alle dieci domande, almeno due risposte risultino corrette?

Si tratta di un classico problema di n prove ripetute di tipo bernoulliano dove la probabilità di successo in una singola prova è $p = \frac{1}{4}$ e di insuccesso $q = 1 - p = \frac{3}{4}$. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di risposte esatte. La distribuzione di probabilità (o funzione masse di probabilità, *pmf*) è di tipo binomiale $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Nel caso in esame la probabilità richiesta è $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$ dove $P(X = 0) = \binom{10}{0} p^0 (1-p)^{10} = \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$ e $P(X = 1) = \binom{10}{1} p^1 (1-p)^9 = 10 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9 = \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9$ per cui $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10} - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9 = 1 - 13 \cdot \frac{3^9}{4^{10}} \cong 0{,}75597$.

Quesito 8

In che cosa consiste il problema della *quadratura del cerchio?* Perchè è così spesso citato?

La quadratura del cerchio, assieme al problema della trisezione dell'angolo e a quello della duplicazione del cubo, costituisce un problema classico della geometria greca. In sostanza quello della quadratura del cerchio non è altro che un classico problema di matematica (più precisamente di geometria) il cui scopo è costruire un quadrato che abbia la stessa area di un dato cerchio, con uso esclusivo di riga e compasso. Dal punto di vista algebrico, indicati con r il raggio del cerchio e con l il lato del quadrato da trovare, vale la relazione:

$$\pi \cdot r^2 = l^2 \rightarrow l = \sqrt{\pi} \cdot r$$

Nel 1882 fu dimostrato che non era possibile costruire un lato di misura $l = \sqrt{\pi} \cdot r$ solo con riga e compasso e ciò deriva dal fatto che il numero π è trascendente.

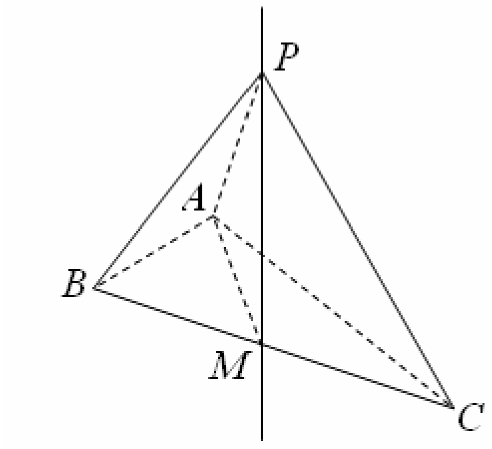
Quesito 9

Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell 'ipotenusa.

Forniamo due tipi di soluzione al quesito, una con metodo sintetico ed una con metodo analitico.

- *Metodo sintetico*

Consideriamo la figura sottostante:



Ogni triangolo rettangolo è inscrivibile in una circonferenza di centro M, punto medio dell'ipotenusa BC, e raggio $\overline{BM} = \overline{MC} = \overline{AM}$. Per questo motivo, preso un qualsiasi punto P sulla perpendicolare per M al piano del triangolo, le tre distanze PA, PB e PC sono uguali in quanto ipotenuse di tre triangoli rettangoli, PAM – PBM - PMC, aventi cateti congruenti.

Per dimostrare che la retta in questione è il luogo richiesto dobbiamo dimostrare che ogni punto equidistante da A, B e C si trova su tale retta. A tale scopo basta notare che il luogo dei punti equidistanti da A e B è il piano perpendicolare ad AB nel suo punto medio, analogamente per A e C e per B e C: i punti equidistanti da A, B e C appartengono contemporaneamente a questi tre piani, che hanno in comune proprio la retta perpendicolare al piano del triangolo ABC nel punto medio M dell'ipotenusa BC.

- *Metodo analitico*

Consideriamo un sistema di coordinate nello spazio in modo che i vertici del triangolo rettangolo sono $O(0,0,0), A(a,0,0), B(0,b,0)$ e sia $P(x,y,z)$ un generico punto dello spazio. La condizione $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}} = \overline{\mathrm{OP}}$, ricordando la formula della distanza tra due punti, si riconduce a:

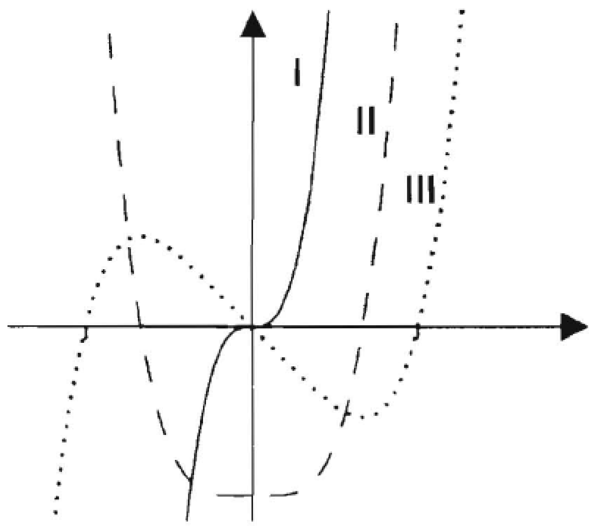
$$\underset{(1)}{(x-a)^2 + y^2 + z^2} = \underset{(2)}{x^2 + (y-b)^2 + z^2} = \underset{(3)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Uguagliando la (1) e la (3) ricaviamo $x = \frac{a}{2}$ mentre uguagliando la (2) e la (3) ricaviamo $y = \frac{b}{2}$, cioè otteniamo le equazioni della retta perpendicolare al triangolo, appartenente al piano $z = 0$, e passante per il punto $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right)$ coincidente con il punto medio del lato AB.

Quesito 10

Nella figura a lato, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione *f*, un altro lo è della funzione derivata *f'* e l'altro ancora di *f''*.

Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?



	f	f'	f''
A)	I	II	III
B)	I	III	II
C)	II	III	I
D)	III	II	I
E)	III	I	II

Si motivi la risposta.

La risposta esatta è D.

Infatti se assumiamo come f la funzione III ci rendiamo conto che la derivata prima si annulla in due punti in corrispondenza del massimo e del minimo relativo che assume f. Inoltre deve avvenire che la derivata prima deve essere positiva tra meno infinito e il massimo di f, negativa tra massimo e minimo, e poi di nuovo positiva dal minimo in poi. E ciò è quello che succede nella funzione II. Inoltre la derivata seconda deve azzerarsi solo in zero che è flesso per f, passando da valori negativi a valori positivi, cosa che accade per la funzione I.

Alternativamente possiamo notare come delle tre funzioni, due sono dispari e cioè I e III e una è pari, la II. Visto che la derivata di una funzione dispari è pari e viceversa, la funzione derivata prima non può essere che la II. In questo modo le alternativi possibili restano la A e la D. Ma la A va scartata in quanto la funzione II assume sia valori positivi che negativi e quindi non può essere la derivata della I, perchè derivando la I si ottiene una funzione sempre positiva. Pertanto l'alternativa corretta è la D.