
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
SCUOLE ITALIANE ALL'ESTERO (EUROPA)

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

a. s. 2010-2011

PROBLEMA1

Nel sistema di riferimento cartesiano Oxy si consideri il quadrato $OABC$, dove $A = (1; 0)$ e $C = (0; 1)$.

1. Sia P un punto appartenente al lato AB . Si considerino le parabole, con asse parallelo all'asse y , passanti per O e per P e tangenti al lato BC . Quali sono i possibili vertici di tali parabole, al variare di P su AB ?
2. Tra quelle sopra indicate, si dimostri che la parabola Γ_1 , tale che il segmento parabolico limitato dalla corda OP abbia area pari alla metà del quadrato $OABC$, ha equazione:
$$y = -3x^2 + 2\sqrt{3}x$$
3. Si determini l'equazione della parabola Γ_2 simmetrica di Γ_1 rispetto all'asse y e si calcoli l'area della regione piana delimitata dalle due parabole e dalla comune retta tangente nei loro vertici.
4. Sia r una retta di equazione $y = k$, $k \in [0,1]$ e siano Q e R i punti (più vicini all'asse y) in cui r taglia, rispettivamente, le parabole Γ_1 e Γ_2 . Si determini il valore di k per cui risulti massima l'area del triangolo QCR .

PROBLEMA2

Una circonferenza di centro O e raggio 4 è tangente esternamente nel punto A ad un'altra circonferenza di raggio x minore di 4. Le tangenti comuni, non passanti per A , si incontrano in un punto B .

1. Si provi che, al variare di x , la distanza $f(x)$ di B da O è data da $f(x) = \frac{4x+16}{4-x}$; si disegni il grafico Γ di $f(x)$ prescindendo dai limiti posti ad x dal problema.
2. Sia P un punto di Γ . Si dimostri che la retta tangente a Γ in P incontra gli asintoti di Γ in due punti equidistanti da P . Si verifichi altresì che Γ ammette un centro di simmetria di cui si chiedono le coordinate.
3. Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra Γ e gli assi coordinati.
4. Sia infine $g(x) = f(|x|)$. Quale il grafico di $g(x)$? Si determini, al variare di k il numero delle radici dell'equazione $g(x) = k$

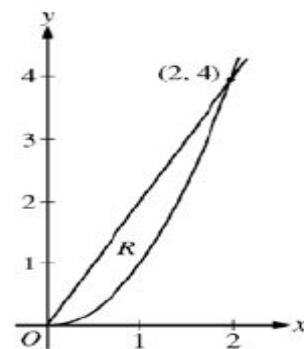
QUESTIONARIO

1. Si provi che se i lati di un triangolo rettangolo sono in progressione aritmetica di ragione d allora il raggio della circonferenza inscritta è uguale a d .
2. Sia W il solido ottenuto facendo ruotare attorno all'asse y la parte di piano compresa, per $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, fra il grafico di $y = \sin x$ e l'asse x . Quale dei seguenti integrali definiti fornisce il volume di W ?

A) $2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$; B) $\pi \int_0^1 (\arcsin x)^2 dx$; C) $\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$; D) nessuno di questi

Si motivi la risposta.

3. Fra tutti i parallelepipedi rettangoli, a base quadrata, di superficie totale a^2 quale è quello di volume massimo?
4. La curva di equazione $y = \sqrt{x \ln x}$ ammette punti con tangente parallela all'asse x ? Ammette punti con tangente parallela all'asse y ? In caso affermativo si determinino.
5. In una circonferenza di centro O e raggio r sono date due corde prive di punti comuni $AB = r$ e $CD = r\sqrt{3}$. Si dimostri che il quadrilatero $ABCD$ ha le diagonali perpendicolari.
6. Sia P un punto del piano di coordinate $\left(t + \frac{1}{t}, t - \frac{1}{t}\right)$. Quale è l'equazione cartesiana del luogo descritto da P al variare di t ($t \neq 0$)?
7. Si calcoli il valor medio della funzione $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ nell'intervallo $[-1, 1]$ e se ne indichi il significato geometrico.
8. La regione R è delimitata da $y = 2x$ e $y = x^2$ come mostrato nella figura a lato. R è la base di un solido W le cui sezioni, ottenute tagliando W con piani perpendicolari all'asse x , hanno area $A(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. Si determini il volume di W .



PROBLEMA 1

Nel sistema di riferimento cartesiano Oxy si consideri il quadrato $OABC$, dove $A = (1; 0)$ e $C = (0; 1)$.

Punto 1

Sia P un punto appartenente al lato AB . Si considerino le parabole, con asse parallelo all'asse y , passanti per O e per P e tangenti al lato BC . Quali sono i possibili vertici di tali parabole, al variare di P su AB ?

Il punto B ha coordinate $B = (1,1)$ e il punto P appartenente alla retta AB di equazione $x = 1$ ha coordinate $P(1, t), 0 < t < 1$.

Una parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate ha equazione $y = ax^2 + bx + c$. Imponendo il passaggio per $O = (0,0)$ otteniamo $c = 0$; imponendo, invece, il passaggio per $P(1, t)$ otteniamo $a + b + c = t$ e ricordando che $c = 0$ la condizione diventa $a + b = t \Rightarrow b = t - a$. Quindi l'equazione della famiglia di parabole diventa $y = ax^2 + (t - a)x$.

La tangenza al lato BC impone tre condizioni sulla famiglia di parabole di equazione $y = ax^2 + (t - a)x$:

- devono avere concavità verso il basso e cioè $a < 0$, altrimenti se avessero concavità verso l'alto, il passaggio per O e P escluderebbe la tangenza al lato BC e viceversa;
- l'ascissa del vertice deve essere compresa tra 0 ed 1 , $0 < x_v < 1$, altrimenti le parabole potrebbero essere tangenti alla retta di equazione $y = 1$ esternamente al lato BC , cioè l'ascissa del vertice non appartenerrebbe all'intervallo $(0,1)$;
- l'ordinata del vertice sarà pari a 1 in quanto solo nel punto di vertice la famiglia di parabole può essere tangente al lato BC di equazione $y = 1$.

L'intersezione di $y = 1$ con la famiglia di parabole di equazione $y = ax^2 + (t - a)x$ fornisce $ax^2 + (t - a)x = 1 \Rightarrow ax^2 + (t - a)x - 1 = 0$ per cui imponendo la condizione di tangenza si ha:

$$(t - a)^2 + 4a = 0 \Rightarrow a^2 - 2a(t - 2) + t^2 = 0 \Rightarrow a_{\pm} = (t - 2) \pm 2\sqrt{1 - t}.$$

Le ascisse dei possibili vertici della famiglia di parabole sono quindi:

$$x_{v_+} = \frac{a - t}{2a} = \frac{\sqrt{1 - t} - 1}{t - 2 + 2\sqrt{1 - t}} = \frac{(\sqrt{1 - t} - 1)(t - 2 - 2\sqrt{1 - t})}{(t - 2 + 2\sqrt{1 - t})(t - 2 - 2\sqrt{1 - t})} = \frac{1 + \sqrt{1 - t}}{t} = \frac{1}{1 - \sqrt{1 - t}}$$

$$x_{v_-} = \frac{a - t}{2a} = \frac{-\sqrt{1 - t} - 1}{t - 2 - 2\sqrt{1 - t}} = \frac{(-\sqrt{1 - t} - 1)(t - 2 + 2\sqrt{1 - t})}{(t - 2 - 2\sqrt{1 - t})(t - 2 + 2\sqrt{1 - t})} = \frac{1 - \sqrt{1 - t}}{t} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - t}}$$

e poichè per ipotesi deve aversi $0 < x_v < 1$ con $0 < t < 1$, l'ascissa del vertice accettabile è

$$x_V = \frac{1 - \sqrt{1-t}}{t} = \frac{1}{1 + \sqrt{1-t}} \text{ in quanto } 1 + \sqrt{1-t} > 1 \quad \forall t \in (0,1) \text{ per cui } 0 < \frac{1}{1 + \sqrt{1-t}} < 1 \quad \forall t \in (0,1);$$

l'ordinata del vertice come già osservato è pari a 1 e possiamo ricavarlo anche attraverso il calcolo diretto: infatti

$$\begin{aligned} y\left(\frac{1}{1 + \sqrt{1-t}}\right) &= (t - 2 - 2\sqrt{1-t})\left(\frac{1}{1 + \sqrt{1-t}}\right)^2 + (2 + 2\sqrt{1-t})\left(\frac{1}{1 + \sqrt{1-t}}\right) = \\ &= (t - 2 - 2\sqrt{1-t}) \cdot \frac{1}{(2 - t + 2\sqrt{1-t})} + 2(1 + \sqrt{1-t}) \cdot \frac{1}{(1 + \sqrt{1-t})} = \\ &= -(2 - t + 2\sqrt{1-t}) \cdot \frac{1}{(2 - t + 2\sqrt{1-t})} + 2(1 + \sqrt{1-t}) \cdot \frac{1}{(1 + \sqrt{1-t})} = -1 + 2 = 1 \end{aligned}$$

Quindi al variare di $0 < t < 1$, i possibili vertici sono $V(t) = \left(\frac{1}{1 + \sqrt{1-t}}, 1\right)$ e la famiglia di parabole

ha equazione

$$y = (t - 2 - 2\sqrt{1-t})x^2 + (2 + 2\sqrt{1-t})x$$

Punto 2

Tra quelle sopra indicate, si dimostri che la parabola Γ_1 , tale che il segmento parabolico limitato dalla corda OP abbia area pari alla metà del quadrato $OABC$, ha equazione:

$$y = -3x^2 + 2\sqrt{3}x$$

La retta OP ha equazione $y = tx$. L'area del segmento parabolico limitato dalla corda OP e dalla parabola di equazione $y = (t - 2 - 2\sqrt{1-t})x^2 + (2 + 2\sqrt{1-t})x$ è pari a:

$$\begin{aligned} \int_0^1 [(t - 2 - 2\sqrt{1-t})x^2 + (2 + 2\sqrt{1-t})x - tx] dx &= \int_0^1 [(t - 2 - 2\sqrt{1-t})x^2 - (t - 2 - 2\sqrt{1-t})x] dx = \\ &= (t - 2 - 2\sqrt{1-t}) \int_0^1 (x^2 - x) dx = (t - 2 - 2\sqrt{1-t}) \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = (t - 2 - 2\sqrt{1-t}) \left(-\frac{1}{6} \right) = \left(\frac{2 - t + 2\sqrt{1-t}}{6} \right) \end{aligned}$$

L'area del quadrato di lato unitario è pari a 1, per cui imponendo che l'area del segmento parabolico sia la metà di quella del quadrato si ha:

$$\left(\frac{2 - t + 2\sqrt{1-t}}{6} \right) = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 - t + 2\sqrt{1-t} = 3 \Rightarrow 2\sqrt{1-t} = 1 + t.$$

Tale equazione ha senso di esistere in quanto per ipotesi $0 < t < 1$, per cui elevando ambo i membri al quadrato si ha:

$$4(1-t) = (1+t)^2 \Rightarrow t^2 + 6t - 3 = 0 \Rightarrow t_{\pm} = -3 \pm 2\sqrt{3} \text{ e la soluzione accettabile che rispetta la condizione } 0 < t < 1 \text{ è } t_+ = -3 + 2\sqrt{3}.$$

Con tale valore di t , calcoliamo i coefficienti della parabola

dati dalle seguenti espressioni:

$$\left[t - 2 - 2\sqrt{1-t} \right]_{t=-3+2\sqrt{3}} = -3 + 2\sqrt{3} - 2 - 2\sqrt{4-2\sqrt{3}} = -3 + 2\sqrt{3} - 2 - 2(\sqrt{3}-1) = -3$$

$$\left[2 + 2\sqrt{1-t} \right]_{t=-3+2\sqrt{3}} = 2 + 2\sqrt{4-2\sqrt{3}} = 2 + 2(\sqrt{3}-1) = 2\sqrt{3}$$

in cui abbiamo sfruttato che $(4 - 2\sqrt{3}) = (\sqrt{3} - 1)^2$.

In conclusione l'equazione della parabola Γ_1 è $y = -3x^2 + 2\sqrt{3}x$ così come indicato dalla traccia.

Punto 3

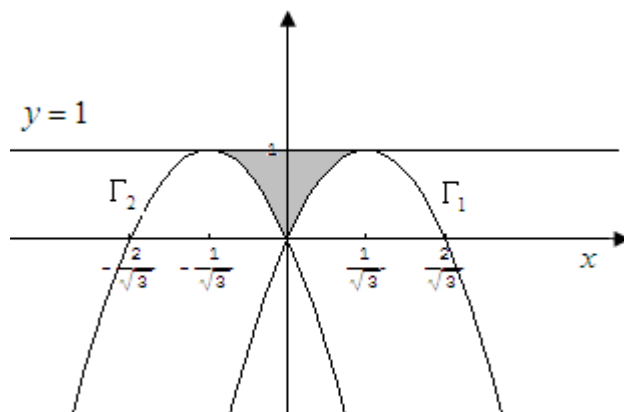
Si determini l'equazione della parabola Γ_2 simmetrica di Γ_1 rispetto all'asse y e si calcoli l'area della regione piana delimitata dalle due parabole e dalla comune retta tangente nei loro vertici.

L'equazione di Γ_2 simmetrica di Γ_1 rispetto all'asse y si ottiene da $y = -3x^2 + 2\sqrt{3}x$ con la

trasformazione $\begin{cases} X = -x \\ Y = y \end{cases}$ per cui Γ_2 è $Y = -3X^2 - 2\sqrt{3}X$ e ritornando al formalismo con ascissa ed

ordinate minuscole l'equazione di Γ_2 è $y = -3x^2 - 2\sqrt{3}x$.

L'area da calcolare è raffigurata in grigio nella figura sottostante:



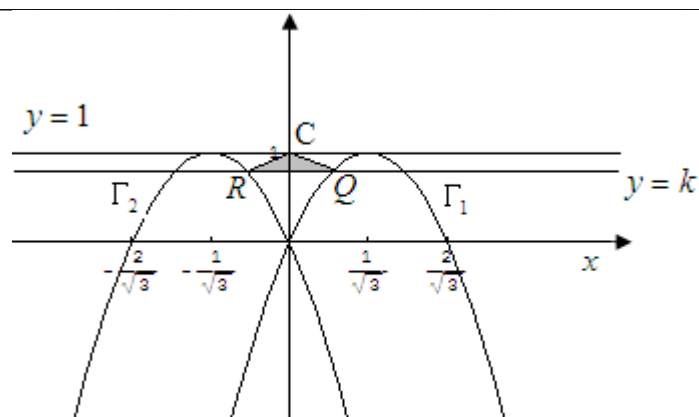
Per simmetria l'area da calcolare è pari a

$$Area = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left[1 - (-3x^2 + 2\sqrt{3}x) \right] dx = 2 \left[x + x^3 - \sqrt{3}x^2 \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right] = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Punto 4

Sia r una retta di equazione $y = k$, $k \in [0,1]$ e siano Q e R i punti (più vicini all'asse y) in cui r taglia, rispettivamente, le parabole Γ_1 e Γ_2 . Si determini il valore di k per cui risulti massima l'area del triangolo QCR .

Consideriamo la figura sottostante.



Siano R l'intersezione della retta $y = k$ con la parabola di equazione $y = -3x^2 - 2\sqrt{3}x$ e Q con la parabola di equazione $y = -3x^2 + 2\sqrt{3}x$. Calcoliamo le ascisse di suddetti punti.

1. Calcolo punto R:

Bisogna risolvere l'equazione $-3x^2 - 2\sqrt{3}x = k \Rightarrow 3x^2 + 2\sqrt{3}x + k = 0 \Rightarrow x_{\pm} = \frac{\sqrt{3}}{3}(-1 \pm \sqrt{1-k})$

e l'ascissa accettabile è $x_R = x_+ = \frac{\sqrt{3}}{3}(-1 + \sqrt{1-k})$ per cui il punto R ha coordinate

$$R = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}(-1 + \sqrt{1-k}), k \right);$$

2. Calcolo punto Q:

Bisogna risolvere l'equazione $-3x^2 + 2\sqrt{3}x = k \Rightarrow 3x^2 - 2\sqrt{3}x + k = 0 \Rightarrow x_{\pm} = \frac{\sqrt{3}}{3}(1 \pm \sqrt{1-k})$ e

l'ascissa accettabile è $x_Q = x_- = \frac{\sqrt{3}}{3}(1 - \sqrt{1-k})$ per cui il punto Q ha coordinate

$$Q = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}(1 - \sqrt{1-k}), k \right);$$

La base RQ del triangolo QCR misura $|RQ| = |x_Q - x_R| = \frac{2\sqrt{3}}{3}|1 - \sqrt{1-k}|$ mentre l'altezza misura

$$h = (1-k) \text{ per cui l'area è pari a } S(k) = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}|1 - \sqrt{1-k}| \cdot (1-k)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}|1 - \sqrt{1-k}| \cdot (1-k).$$

Per $k \in [0,1]$ $|1 - \sqrt{1-k}| = 1 - \sqrt{1-k}$ per cui l'area da massimizzare diventa

$$S(k) = \frac{\sqrt{3}}{3}(1 - \sqrt{1-k}) \cdot (1-k).$$

La derivata prima della funzione area è

$$S'(k) = \frac{\sqrt{3}}{3} \left[\frac{1}{2\sqrt{1-k}} \cdot (1-k) - (1-\sqrt{1-k}) \right] = \frac{\sqrt{3}}{3} \left[\frac{(1-k) - 2\sqrt{1-k} + 2(1-k)}{2\sqrt{1-k}} \right] = \frac{\sqrt{3}}{6} (3\sqrt{1-k} - 2) \quad \text{ed}$$

è positiva se $\sqrt{1-k} > \frac{2}{3} \Rightarrow 1-k > \frac{4}{9} \Rightarrow 0 \leq k < \frac{5}{9}$ e negativa se $\frac{5}{9} < k \leq 1$ per cui l'area massima è

raggiunta per $k = \frac{5}{9}$ e vale $S\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{5}{9}}\right) \cdot \left(1 - \frac{5}{9}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{81}$.

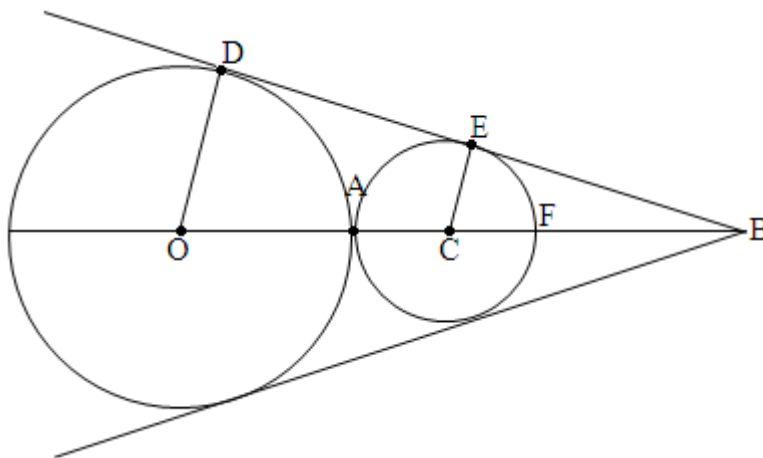
PROBLEMA 2

Una circonferenza di centro O e raggio 4 è tangente esternamente nel punto A ad un'altra circonferenza di raggio x minore di 4. Le tangenti comuni, non passanti per A , si incontrano in un punto B .

Punto 1

Si provi che, al variare di x , la distanza $f(x)$ di B da O è data da $f(x) = \frac{4x+16}{4-x}$; si disegni il grafico Γ di $f(x)$ prescindendo dai limiti posti ad x dal problema.

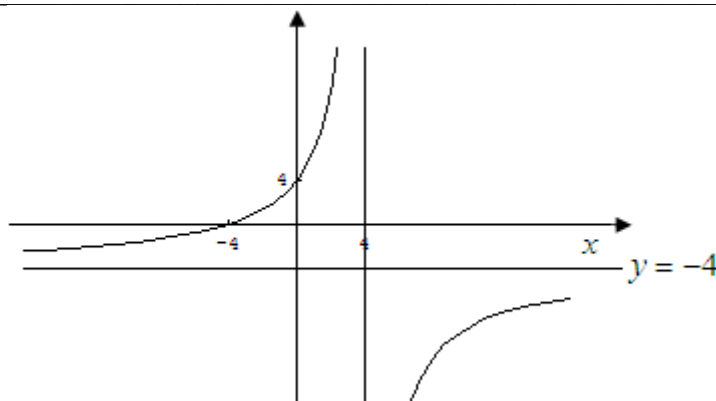
Consideriamo la figura sottostante.



Sia $\overline{FB} = y$; i triangoli DOB ed ECB sono simili per cui vale la seguente proporzione tra lati omologhi $OD:OB = EC:CB$ che può essere riscritta come $4:(4+2x+y) = x:(x+y)$; uguagliando il prodotto dei medi e degli estremi si ha $4x+4y = 4x+2x^2+xy$ da cui $y(4-x) = 2x^2 \Rightarrow y = \frac{2x^2}{(4-x)}$. La funzione $f(x)$ di conseguenza vale

$$f(x) = 4 + 2x + y = 4 + 2x + \frac{2x^2}{(4-x)} = \frac{(4+2x)(4-x) + 2x^2}{(4-x)} = \frac{16+4x}{(4-x)}.$$

La funzione $f(x) = \frac{4x+16}{4-x}$ è una classica funzione omografica definita in $\mathbb{R} - \{4\}$, positiva in $(-4, 4)$, con asintoti di equazione $x = 4$ e $y = -4$ e centro di simmetria $(4, -4)$. Il grafico è di seguito mostrato:



Punto 2

Sia P un punto di Γ . Si dimostri che la retta tangente a Γ in P incontra gli asintoti di Γ in due punti equidistanti da P. Si verifichi altresì che Γ ammette un centro di simmetria di cui si chiedono le coordinate.

Un generico punto P di Γ ha coordinate $P = \left(t, \frac{4t+16}{4-t}\right)$ e la retta tangente a Γ in P ha equazione

$y = m(x-t) + \frac{4t+16}{4-t}$ dove $m = f'(t) = \frac{32}{(4-t)^2}$ per cui $y = \frac{32}{(4-t)^2}(x-t) + \frac{4t+16}{4-t}$. Tale tangente

incontra l'asintoto di equazione $x = 4$ in $y = \frac{32}{(4-t)^2}(4-t) + \frac{4t+16}{4-t} = \frac{4t+48}{4-t}$ e l'asintoto $y = -4$

all'ascissa tale per cui $\frac{32}{(4-t)^2}(x-t) + \frac{4t+16}{4-t} = -4$ e cioè all'ascissa

$x = t + \frac{(4-t)^2}{32} \left(-4 - \frac{4t+16}{4-t}\right) = t + \frac{(4-t)^2}{32} \left(\frac{-32}{4-t}\right) = 2t-4$. I punti di incontro sono quindi

$A = \left(4, \frac{4t+48}{4-t}\right)$ e $B = (2t-4, -4)$. Calcoliamo ora le distanze PA e PB. Si ha:

$$\overline{PA} = \sqrt{(4-t)^2 + \left(\frac{4t+48}{4-t} - \frac{4t+16}{4-t}\right)^2} = \sqrt{(4-t)^2 + \left(\frac{32}{4-t}\right)^2}$$

$$\overline{PB} = \sqrt{(2t-4-t)^2 + \left(-4 - \frac{4t+16}{4-t}\right)^2} = \sqrt{(4-t)^2 + \left(\frac{32}{4-t}\right)^2}$$

Poichè le due distanze coincidono i punti A e B sono equidistanti da P.

Il centro di simmetria di una qualsiasi funzione omografica è data dal punto di incontro degli asintoti, e nel caso in esame è $(4, -4)$. Per dimostrarlo consideriamo la trasformazione

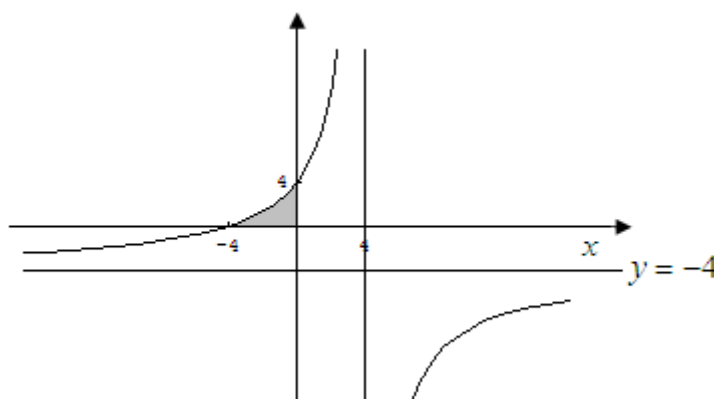
$\begin{cases} X = 2 \cdot 4 - x = 8 - x \\ Y = 2 \cdot (-4) - y = -8 - y \end{cases}$ e sostituiamo in essa la funzione $y = \frac{4x+16}{4-x}$. Si ha:

$$Y = -8 - \frac{4(8-X)+16}{4-(8-X)} = -8 - \frac{48-4X}{X-4} = \frac{-8X+32-48+4X}{X-4} = \frac{16+4X}{4-X}$$
 e poichè la funzione trasformata coincide con la funzione di partenza, possiamo affermare che il punto $(4,-4)$ è centro di simmetria per $y = \frac{4x+16}{4-x}$.

Punto 3

Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra Γ e gli assi coordinati.

L'area da calcolare è di seguito raffigurata in grigio.



L'area è pari a

$$\begin{aligned} \int_{-4}^0 \left(\frac{4x+16}{4-x} \right) dx &= \int_{-4}^0 \left(-4 + \frac{32}{4-x} \right) dx = \int_{-4}^0 (-4) dx + \int_{-4}^0 \left(\frac{32}{4-x} \right) dx = \\ &= -16 - \left[32 \ln|4-x| \right]_{-4}^0 = -16 - 32 \ln 4 + 32 \ln 8 = 32 \ln 2 - 16 \end{aligned}$$

Punto 4

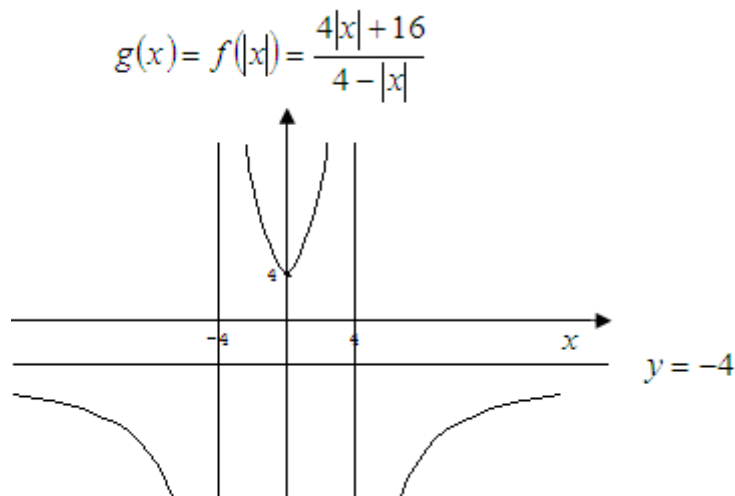
Sia infine $g(x) = f(|x|)$. Quale il grafico di $g(x)$? Si determini, al variare di k il numero delle radici dell'equazione $g(x) = k$

La funzione $g(x) = f(|x|) = \frac{4|x|+16}{4-|x|} = \begin{cases} g_1(x) = \frac{4x+16}{4-x} & \text{se } x \geq 0 \wedge x \neq 4 \\ g_2(x) = g_1(-x) = \frac{-4x+16}{4+x} & \text{se } x < 0 \wedge x \neq -4 \end{cases}$

Quindi

1. nell'intervallo $[0,4) \cup (4,+\infty)$ il grafico di $g_1(x) = \frac{4x+16}{4-x}$ coincide con quello di $f(x)$;
2. nell'intervallo $(-\infty,-4) \cup (-4,0)$ il grafico di $g_2(x) = g_1(-x) = \frac{4x+16}{4-x}$ è il simmetrico rispetto all'asse delle ordinate del grafico di $g_1(x)$ del punto 1) per la parità della funzione $g(x)$.

Di seguito il grafico:



Dal grafico soprastante possiamo anche individuare quali sono le radici dell'equazione $g(x) = k$.

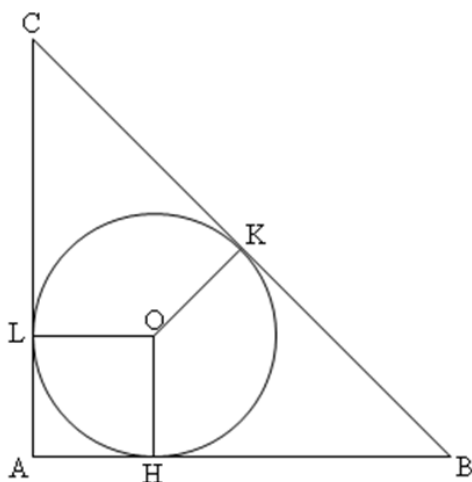
1. Se $k < -4$ l'equazione $g(x) = k$ ha due soluzioni reali simmetriche rispetto all'asse delle ordinate, una positiva α appartenente all'intervallo $(4, +\infty)$ e l'altra negativa $\beta = -\alpha$ appartenente a $(-\infty, -4)$;
2. Se $-4 \leq k < 4$ l'equazione $g(x) = k$ non ha soluzioni reali;
3. Se $k = 4$ l'equazione $g(x) = k$ ha una soluzione reale corrispondente a $x = 0$;
4. Se $k > 4$ l'equazione $g(x) = k$ ha due soluzioni reali simmetriche rispetto all'asse delle ordinate, una positiva δ appartenente all'intervallo $(0, 4)$ e l'altra negativa $\gamma = -\delta$ appartenente a $(-4, 0)$.

QUESTIONARIO

Quesito 1

Si provi che se i lati di un triangolo rettangolo sono in progressione aritmetica di ragione d allora il raggio della circonferenza inscritta è uguale a d .

Consideriamo la figura seguente.



I lati del triangolo rettangolo sono in progressione aritmetica di ragione d , per cui misurano rispettivamente $\overline{AB} = x$, $\overline{AC} = x + d$, $\overline{BC} = x + 2d$. Per il teorema di Pitagora deve aversi

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ per cui otteniamo:

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 &= \overline{BC}^2 \Rightarrow x^2 + (x + d)^2 = (x + 2d)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2x^2 + 2xd + d^2 &= x^2 + 4xd + 4d^2 \Rightarrow x^2 - 2xd - 3d^2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (x + d)(x - 3d) &= 0 \Rightarrow x = -d \vee x = 3d\end{aligned}$$

Escludendo la soluzione $x = -d$, i lati del triangolo rettangolo in progressione aritmetica di ragione d misurano $\overline{AB} = 3d$, $\overline{AC} = 4d$, $\overline{BC} = 5d$.

Per il teorema delle tangenti condotte a una circonferenza si ha $\overline{BH} = \overline{BK}$ e $\overline{LC} = \overline{KC}$ per cui l'ipotenusa del triangolo è $\overline{BC} = \overline{BK} + \overline{KC} = (\overline{AB} - \overline{AH}) + (\overline{AC} - \overline{AL}) = \overline{AB} + \overline{AC} - 2\overline{AL}$ in quanto $\overline{AH} = \overline{AL}$ poiché coincidenti con il raggio della circonferenza inscritta. Di conseguenza il raggio della circonferenza inscritta è pari a $\overline{AL} = \frac{\overline{AB} + \overline{AC} - \overline{BC}}{2} = \frac{3d + 4d - 5d}{2} = d$.

Quesito 2

Sia W il solido ottenuto facendo ruotare attorno all'asse y la parte di piano compresa, per

$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, fra il grafico di $y = \sin x$ e l'asse x . Quale dei seguenti integrali definiti fornisce il

volume di W?

B) $2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$; **B)** $\pi \int_0^1 (\arcsin x)^2 dx$; **C)** $\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$; **D) nessuno di questi**

Si motivi la risposta.

La risposta esatta è la A).

Pensiamo la regione R decomposta in tanti ognuno dei quali genera un solido pari alla differenza di due cilindretti, in modo che, intuitivamente potremo pensare W come somma progressiva di infiniti gusci cilindrici coassiali di spessore dx , dove il raggio x varia da 0 a $\frac{\pi}{2}$.

Il volume del guscio (infinitesimo) può essere calcolato come prodotto dell'area circolare di base di raggio esterno $(x_i + \Delta x_i)$ e raggio interno x_i , per l'altezza: $V_i = \pi \cdot [(x_i + \Delta x_i)^2 - x_i^2] \cdot \sin x_i$.

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore a Δx_i^2 il volume infinitesimo sarà

$V_i = 2\pi \cdot x_i \cdot \sin x_i \cdot \Delta x_i$. Se il numero di gusci cilindrici in cui suddividiamo l'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ è N

il volume richiesto sarà:

$$V = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N V_i = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^N 2\pi \cdot x_i \cdot \sin x_i \cdot \Delta x_i \right) = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = 2\pi \left[-x \cos x + \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi \cdot 1 = 2\pi.$$

Quesito 3

Fra tutti i parallelepipedi rettangoli, a base quadrata, di superficie totale a^2 quale è quello di volume massimo?

Indichiamo con $0 < x < a$ il lato del quadrato di base del parallelepipedo; il perimetro di base e l'area di base sono di conseguenza rispettivamente $2p(x) = 4x$ e $A_b(x) = x^2$. La superficie totale è somma della superficie laterale e del doppio dell'area di base, dove la superficie laterale è il prodotto del perimetro di base per l'altezza:

$S_T(x) = S_L(x) + 2A_b(x) = 2p(x) \cdot h(x) + 2A_b(x) = 4x \cdot h(x) + 2x^2$. Imponendo che la superficie totale

sia pari ad a^2 si ha che l'altezza del parallelepipedo è pari a $h(x) = \frac{S_T(x) - 2x^2}{4x} = \frac{a^2 - 2x^2}{4x}$; il

volume del parallelepipedo è pari al prodotto delle tre dimensioni, cioè dell'area di base per

l'altezza: $V(x) = A_b(x) \cdot h(x) = x^2 \cdot \frac{a^2 - 2x^2}{4x} = \frac{a^2 x - 2x^3}{4}$. La massimizzazione del volume la

effettuiamo mediante derivazione:

$$V'(x) = \frac{a^2 - 6x^2}{4} > 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$V'(x) = \frac{a^2 - 6x^2}{4} < 0 \Rightarrow \frac{a\sqrt{6}}{6} < x < a$$

$$V'(x) = \frac{a^2 - 6x^2}{4} = 0 \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Il volume è quindi massimo quando il lato del quadrato di base è pari a $x = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ e vale

$$V\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{a^2\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right) - 2\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^3}{4} = \frac{\frac{a^3\sqrt{6}}{6} - \frac{a^3\sqrt{6}}{18}}{4} = \frac{a^3\sqrt{6}}{36}.$$

Quesito 4

La curva di equazione $y = \sqrt{x \ln x}$ ammette punti con tangente parallela all'asse x? Ammette punti con tangente parallela all'asse y? In caso affermativo si determinino.

Il dominio della funzione $y = \sqrt{x \ln x}$ è dato da:

$$D_f : \begin{cases} x \ln x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1, +\infty).$$

I punti con tangente parallela all'asse x o a tangente orizzontale sono i punti in cui si annulla la

derivata prima; quest'ultima è pari a $y' = \frac{\ln x + x \cdot \frac{1}{x}}{2\sqrt{x \ln x}} = \frac{\ln x + 1}{2\sqrt{x \ln x}}$ e si annulla nei punti in cui

$\ln x + 1 = 0 \Rightarrow x = e^{-1}$ ma poiché tale ascissa non appartiene al dominio $[1, +\infty)$ possiamo dire che la funzione non presenta punti a tangente orizzontale. Infatti la funzione $y = \sqrt{x \ln x}$ è strettamente crescente in tutto il dominio $[1, +\infty)$.

I punti a tangente verticale sono i punti in cui la derivata prima diverge, e poiché

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x + 1}{2\sqrt{x \ln x}} = \frac{\ln 1 + 1}{2 \cdot 0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty \text{ deduciamo che } x = 1 \text{ è un flesso a tangente verticale crescente.}$$

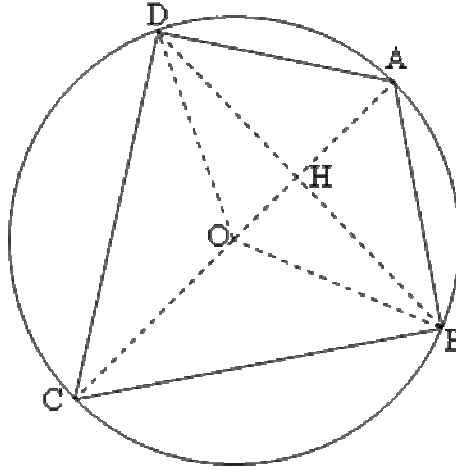
In conclusione la funzione $y = \sqrt{x \ln x}$ non presenta punti a tangente orizzontale e presenta $x = 1$ come punto a tangente verticale.

Quesito 5

In una circonferenza di centro O e raggio r sono date due corde prive di punti comuni

$AB = r$ e $CD = r\sqrt{3}$. Si dimostri che il quadrilatero $ABCD$ ha le diagonali perpendicolari.

Consideriamo la figura sottostante.



Il triangolo OAB è equilatero in quanto per ipotesi AB ha la stessa lunghezza del raggio per cui

$$\widehat{AOB} = \widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \frac{\pi}{3}; \text{ per il teorema della corda } \widehat{DOC} = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{CD}{2r}\right) = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

per cui essendo il triangolo DOC isoscele $\widehat{DCO} = \widehat{CDO} = \frac{\pi}{6}$. L'angolo $\widehat{DBC} = \frac{\widehat{DOC}}{2} = \frac{\pi}{3}$ in

quanto angolo alla circonferenza è metà dell'angolo al centro che insiste sullo stesso arco; inoltre

$$\widehat{DBC} = \widehat{DAC} = \frac{\pi}{3} \text{ in quanto angoli che insistono sullo stesso arco. Di conseguenza il triangolo}$$

DAC è rettangolo in D in quanto $\widehat{CDA} = \pi - \widehat{DAC} - \widehat{DCO} = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ e in quanto tale è

inscritto nella semicirconferenza con ipotenusa coincidente con il diametro AC. Stessi ragionamenti valgono per il triangolo ABC rettangolo in B e inscritto nella semicirconferenza con ipotenusa

coincidente con il diametro AC. L'angolo \widehat{DOA} per differenza è pari a $\widehat{DOA} = \pi - \widehat{DOC} = \frac{\pi}{3}$ per

cui il triangolo DOA è anch'esso equilatero. L'angolo \widehat{BDC} è metà dell'angolo al centro

$$\widehat{COB} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ che insiste sullo stesso arco per cui } \widehat{BDC} = \frac{\pi}{3}; \text{ di conseguenza per differenza}$$

$$\widehat{ODH} = \widehat{BDC} - \widehat{CDO} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}. \text{ Il triangolo DOH a questo punto è rettangolo in H in quanto}$$

$$\widehat{DHO} = \pi - \widehat{ODH} - \widehat{DOA} = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}. \text{ Ricordando che H è il punto di incontro delle}$$

diagonali, deduciamo che queste ultime sono perpendicolari.

Quesito 6

Sia P un punto del piano di coordinate $\left(t + \frac{1}{t}, t - \frac{1}{t}\right)$. Quale è l'equazione cartesiana del luogo descritto da P al variare di t ($t \neq 0$)?

Poniamo $\begin{cases} x = t + \frac{1}{t} \\ y = t - \frac{1}{t} \end{cases}$. Sommando e sottraendo membro a membro si ha: $\begin{cases} x + y = 2t \\ x - y = \frac{2}{t} \end{cases}$ da cui,

eliminando il parametro t , ricaviamo $x + y = 2 \cdot \left(\frac{2}{x - y}\right) \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 4$; il luogo è, quindi, una iperbole equilatera con asintoti le bisettrici di equazione $y = \pm x$.

Quesito 7

Si calcoli il valor medio della funzione $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ nell'intervallo $[-1, 1]$ e se ne indichi il significato geometrico.

Il valor medio della funzione $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ nell'intervallo $[-1, 1]$ è pari a

$$V_M = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

in cui abbiamo sfruttato la parità della funzione

integranda. Geometricamente tale valore è pari all'area di un quarto di cerchio di raggio unitario.

Quesito 8

La regione R è delimitata da $y = 2x$ e $y = x^2$ come mostrato nella figura a lato. R è la base di un solido W le cui sezioni, ottenute tagliando W con piani perpendicolari all'asse x , hanno area $A(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. Si determini il volume di W .

Il volume richiesto è pari a

$$V = \int_0^2 A(x) dx = \int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \left[-\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^2 = \left[\left(\frac{2}{\pi}\right) - \left(-\frac{2}{\pi}\right)\right] = \frac{4}{\pi}$$

