Funzioni Seno e Coseno

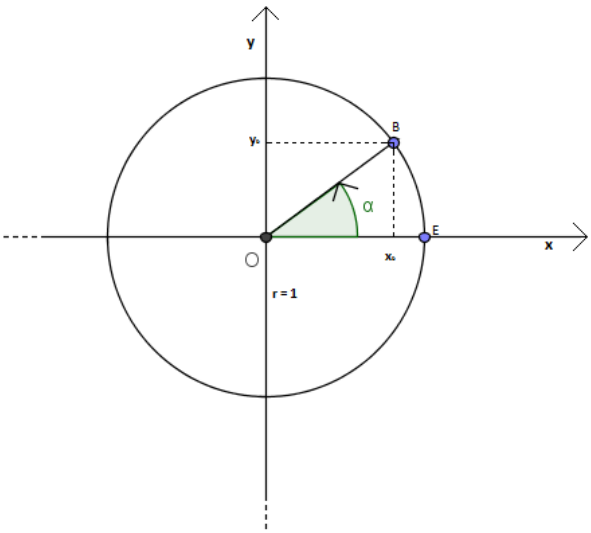
Definizione

Consideriamo la circonferenza goniometrica e un angolo orientato α e sia B il puto della circonferenza associato ad α.
Definiamo coseno e seno dell'angolo α, e indichiamo con cosα e senα, le funzioni che ad α associano rispettivamente il valore dell'ascissa e dell'ordinata del punto B.

$cos\ \alpha = x_B$

B(cos α ; sen α)

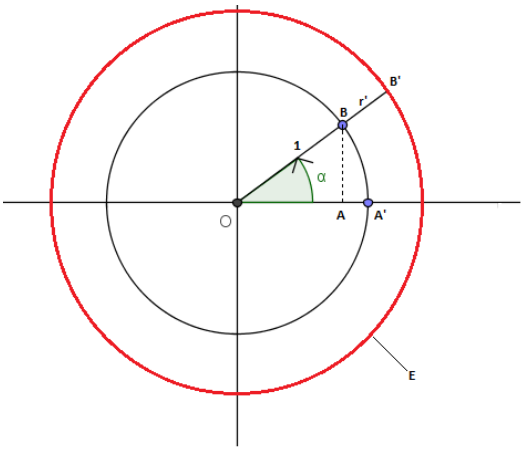
$sen\ \alpha = y_B$



Seno e coseno di un angolo α sono funzioni che hanno come campo di esistenza ℝ, perché per ogni valore di α ∈ ℝ esiste uno e un solo punto sulla circonferenza.

Consideriamo la circonferenza goniometrica e una circonferenza E di raggio r' ≠ 1 e il punto B' corrispondente su E all'angolo α.

(C) 2013 - StudentVille.it - La ripubblicazione senza autorizzazione è vietata



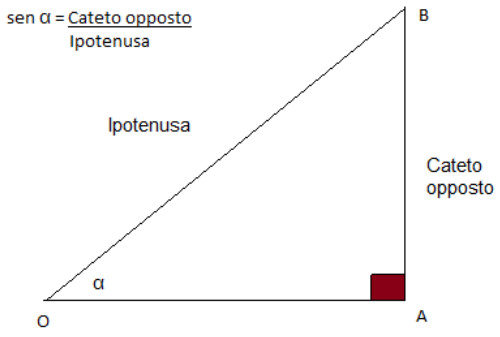
Prendiamo per semplicità un angolo appartenente al primo quadrante. Dette (x'; y') le coordinate di B', dalla similitudine dei triangoli OBA e OB'A' deduciamo:

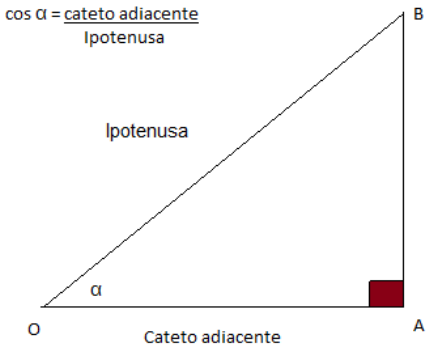
$\frac{x'}{r'} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{OA}{OB} = \cos \alpha$

$\frac{y'}{r'} = \frac{B'A'}{OB'} = \frac{BA}{OB} = \text{sen } \alpha$

I due rapporti non dipendono dalla particolare circonferenza considerata, ma esclusivamente dall'angolo α.

Consideriamo ora un triangolo rettangolo OAB. Possiamo pensare all'ipotenusa OB come al raggio di una circonferenza di centro O, quindi il seno di α è uguale al rapporto tra il cateto opposto all'angolo α e l'ipotenusa, il coseno è uguale al rapporto fra il cateto adiacente ad α e l'ipotenusa.

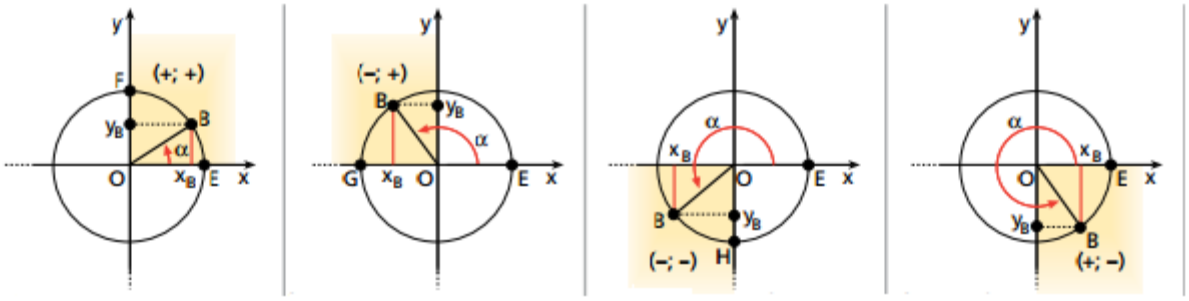




Le variazioni delle funzioni seno e coseno

Supponiamo che un punto B percorra l'intera circonferenza goniometrica, a partire da E, in senso antiorario. Le variazioni di sen α e cos α al variare di B sono le seguenti:

(C) 2013 - StudentVille.it - La ripubblicazione senza autorizzazione è vietata



a. Finchè B percorre il primo quarto di circonferenza, la sua ascissa x_b e la sua ordinata y_b sono positive. Man mano B si avvicina al punto F, l'ascissa diminuisce e l'ordinata aumenta.
In F, x_F = 0, y_F = 1.

b. Quando B precorre la circonferenza nel secondo quadrante, la sua ordinata è ancora positiva, mentre l'ascissa diventa negativa. Quando B si avvicina a G, sia l'ascissa sia l'ordinata diminuiscono.
In G, x_G = -1, y_G = 0.

c. Se B si trova nel terzo quadrante, la sua ordinata e la sua ascissa sono negative. Man mano B si avvicina ad H, l'ascissa aumenta e l'ordinata diminuisce.
In H, x_H = 0, y_H = -1.

d. Quando B percorre l'ultimo quarto di circonferenza la sua ordinata è ancora negativa, mentre l'ascissa è positiva. Avvicinandosi a E, sia l'ascissa, sia l'ordinata di B aumentano.
In E, x_E = 1, y_E = 0.

StudentVille

Qualunque sia la posizione di B sulla circonferenza, la sua ordinata e la sua ascissa assumono sempre valori compresi tra -1 e 1, quindi:

$-1 \leq sen\,\alpha \leq 1$ e $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

Il codominio delle funzioni seno e coseno è quindi [-1 ; 1].

Osservando che, poiché cos α = cos (- α) allora il coseno è una funzione pari, mentre, essendo sen (- α) = - sen α, il seno è una funzione dispari.

(C) 2013 - StudentVille.it - La ripubblicazione senza autorizzazione è vietata