I monomi

Un monomio è un'espressione algebrica nella quale:

- Compaiono soltanto operazioni di moltiplicazione ed elevamento a potenza;
- Gli esponenti delle variabili sono numeri naturali

Anche i numeri e le variabili vengono considerati dei monomi, in particolare 0 è detto monomio nullo.

Un monomio di dice ridotto in forma normale quando si presenta come prodotto di un solo fattore numerico e di potenze letterali con basi diversi tra loro.

Quando un monomio è scritto in forma normale, si possono mettere in evidenza il suo coefficiente e la sua parte letterale. Per esempio:

15ax

15 è il coefficiente e ax è la parte letterale.
Se il coefficiente di un monomio è 1, si scrive solo la parte letterale, se è – 1 si scrive solo la parte letterale preceduta dal segno -.

Dato un monomio non nullo, si dice grado (o grado complessivo) del monomio la somma degli esponenti di tutte le lettere che vi compaiono. Il grado del monomio rispetto ad una determinata lettera è il coefficiente con cui compare la lettera nel monomio in forma normale.

Il monomio nullo non ha grado, e i monomi costituiti da un numero non nullo hanno grado 0.

Se due monomi hanno la stessa parte letterale, si dicono simili. Per esempio

3ab e 6ab sono simili
$3a^2b\ e\ 6ab^2$ non sono simili

La somma algebrica di due o più monomi simili è un monomio simile a esse, avente come coefficiente la somma algebrica dei coefficienti dei monomi da sommare.

Esempio:

3ab + 6ab = 9ab
3ab – 6ab = -3ab

Se i monomi da sommare algebricamente non sono simili, ci si limita a scrivere l'espressione dei monomi interponendo tra essi il segno + o -.
Sommare più monomi simili in un espressione algebrica, si dice che si è effettuata la riduzione dei termini simili.

Moltiplicazione, potenza e divisione tra monomi

Il prodotto di due monomi è il monomio il cui coefficiente è il prodotto dei coefficienti dei monomi dati e la cui parte letterale si ottiene sommando gli esponenti delle lettere uguali.

Per calcolare la potenza n – esima di un monomio, occorre elevare alla potenza n – esima il sue coefficiente e moltiplicare per n volte gli esponenti dei fattore della sua parte letterale.

Dati due monomi A e B, con $B \neq 0$, si diche che A (dividendo) è divisibile per B (divisore = se esiste un terzo monomio Q (quoziente di A e B) tale che:

$A = Q \cdot B$

Se un monomio A è divisibile per un monomio B, il quoziente tra A e B è un monomio il cui coefficiente è uguale al quoziente tra il coefficiente di A e quello di B e la cui parte letterale si ottiene sottraendo gli esponenti delle lettere uguali.

Un monomio A è divisibile per un monomio B se e solo se ogni lettera che compare in B compare anche in A, con esponente maggiore o uguale.

Il massimo comune divisore e il minimo comune multiplo

Si dice massimo comune divisore fra due o più monomi (non nulli), ogni monomio di grado massimo che sia divisore di tutti i monomi dati.
La regola per calcolare il massimo comune divisore tra monomi è la seguente:

La parte letterale del massimo comune divisore fra due o più monomi è il prodotto dei fattori letterali comuni a tutti i monomi, ciascuno preso una sola volta e con il minimo esponente con cui comparare i monomi

Si dice minimo comune multiplo fra due o più monomi (non nulli), ogni monomio di grado minimo che sia multiplo di tutti i monomi dati.
La regola per calcolare il minimo comune multiplo tra monomi è la seguente:

La parte letterale del minimo comune multiplo fra due o più monomi è il prodotto dei fattori letterali comuni e non comuni, ciascuno preso una sola volta e con il massimo esponente con cui compare nei monomi.

I polinomi

Si chiama polinomio ogni espressione algebrica che può essere scritta come somma algebrica di monomi

Ogni polinomio si può pensare come la somma algebrica di se stesso con il polinomio nullo, per esempio:

$2ab = 2ab + 0$.

Quindi ogni monomio è un polinomio , e possiamo considerare il monomio nullo 0 anche come polinomio nullo. I monomi che compaiono all'interno di un polinomio vengono detti termini.

Dato un polinomio non nullo, ridotto in forma normale, si dice:

- Grado del polinomio rispetto ad una certa lettera il massimo esponente con cui la lettera compare nel polinomio;
- Grado complessivo del polinomio il maggiore fra i gradi dei suoi termini.

Un polinomio in cui tutti i termini hanno lo stesso grado si dice omogeneo.

Polinomi uguali e polinomi opposti

Due polinomi, ridotti in forma normale, si dicono uguali se i termini del primo polinomio sono rispettivamente uguali ai termini del secondo.

Due polinomi, ridotti in forma normale, si dicono opposti se i termini del primo polinomio sono rispettivamente opposti ai termini del secondo. Per esempio:

3b – 5a e 5a - 3b sono opposti.

Le operazioni tra polinomi

Per esprimere la somma di due polinomi basta scriverli tra parentesi, interponendo tra di essi il segno +.

Per esprimere la differenza di due polinomi basta scriverli tra parentesi.

Esempio:

Dati due polinomi : ab^2 - 2a + 3ab – 7c e a - 5ab

La somma è data da : (ab^2 - 2a + 3ab – 7c) + (a - 5ab)
Togliendo le parentesi avremo: ab^2 - 2a + 3ab – 7c + a - 5ab che con la riduzione dei termini simili è uguale a:
ab^2 – a – 2ab – 7c

La differenza è data da: (ab^2 - 2a + 3ab – 7c) – (a - 5ab)
Togliendo le parentesi avremo: ab^2 - 2a + 3ab – 7c - a + 5ab che con la riduzione dei termini simili è uguale a:
ab^2 – 3a + 8ab – 7c

Il prodotto tra polinomi può essere analizzato in due casi: Moltiplicazione di un monomio per un polinomio e moltiplicazione di due polinomi.

Per moltiplicare un monomio per un polinomio basta moltiplicare il monomio per tutti i termini del polinomio, quindi sommare i prodotti ottenuti. Per esempio:

2x (x + 2) =
$2x \cdot x + 2x \cdot 2$ =
$2x^2 + 4x$.

Per eseguire la moltiplicazione tra due polinomi basta moltiplicare ciascun termine del primo polinomio per tutti i termini del secondo, quindi sommare i prodotti ottenuti. Per esempio:

(2a + b) (3c – 3d) =
(2a + b) 3c - (2a + b)3d=
6ac + 3bc -6ad – 3db.