Le equazioni di primo grado

Si chiama equazione ogni uguaglianza tra due espressioni, contenenti una o più lettere.

Per esempio:

$x + 2 = 3(x - 1)$

L'espressione a sinistra del simbolo di uguaglianza si chiama primo membro dell'equazione; l'espressione a destra del simbolo di uguaglianza si chiama secondo membro dell'equazione.

Le lettere che compaiono in un equazione possono essere incognite oppure parametri:

- Le incognite sono le lettere di cui non è noto il valore numerico; la risoluzione di un'equazione consiste proprio nella ricerca dei numeri che, sostituiti al posto dell'incognita, la trasformano in un uguaglianza vera;
- I parametri sono lettere da considerare come costanti, cioè lettere che rappresentano un valore che si suppone noto, ma che non è specificato per conferire al problema maggiore generalità.

Se in un equazione compare una sola lettere, essa è da considerare incognita.

Classificazione delle equazioni

Possiamo avere diversi tipi di equazioni, in base agli elementi che le compongono:

- Equazione intera: è un'equazione in cui l'incognita non figura al denominatore;
- Equazione frazionaria: è un'equazione in cui l'incognita compare in almeno un denominatore;
- Equazione numerica: è un'equazione in cui compaiono solo numeri oltre all'incognite;
- Equazione letterale: è un'equazione in cui compaiono altre lettere(parametri) oltre alle incognite.

Le soluzione di un'equazione

Risolvere un'equazione nell'incognita x significa determinare, se esistono, i numeri che, sostituiti al di x la trasformano in un uguaglianza vera: questi numeri si chiamano soluzioni o radici dell'equazione. Se un certo numero è soluzione dell'equazione, si dice che questo soddisfa o verifica l'equazione data.

Le soluzioni di un'equazione dipendono dall'insieme numerico dove si cercano tali soluzioni, che prende il nome di dominio o insieme di definizione dell'equazione. Risolvere le equazioni assumendo come dominio l'intero insieme R dei numeri reali, salvo casi particolari. Per esempio:

L'equazione $6x = 4$ se assumiamo come dominio R, ammette come soluzione

$x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

se la stessa equazione la consideriamo nell'insieme N, vedremo che la soluzione non è compresa in esso, in quanto non è numero naturale.

In base alle soluzioni trovate e al insieme scelto come dominio, le equazioni possono essere:

- Determinata: se ammette un numero finito di soluzioni
- Indeterminata : se ammette un numero infinito di soluzioni

- Identità: se ha come soluzioni tutto l'insieme
- Impossibile: se non ammette soluzioni

Principi di equivalenza dell'equazioni

Due equazioni nelle stesse incognite si dicono equivalenti se hanno lo stesso insieme di soluzioni

Primo principio di equivalenza

Aggiungendo o sottraendo a entrambi i membri di un'equazione un numero o una espressione algebrica definita per tutti i valori delle variabili che vi compaiono, si ottiene un'equazione equivalente a quella data

Esempio:

Data l'equazione x – 5 = 0, aggiungendo ad entrambi i membri il numero + 5 avremo:

x – 5 + 5 = 0 + 5 che risulta essere equivalente a quella data

Secondo principio di equivalenza

Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di un'equazione per un numero diverso da zero o per una espressione algebrica definita e non nulla per tutti i valori delle variabili che vi compaiono, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

Esempio:

Data l'equazione x – 3 = 7, moltiplicando entrambi i membri per il numero 10 avremo:

10x – 30 = 70 che risulta essere equivalente a quella data.

Utilizzando la regola del trasporto, si possono sempre spostare tutti i termini di un'equazione al primo membro cambiandoli di segno (2x = 3 -> 2x – 3 = 0). Ogni equazione nell'incognita x si può perciò sempre scrivere nella forma:

A (x) = 0

Questa è la forma normale dell'equazione, dalla quale si può ricavare il grado che coincide con il grado del polinomio che costituisce A (x).

Procedimento per risolvere un equazione di primo grado intera

Per risolvere una generica equazione intera di primo grado basta ricondursi , mediante i principi di equivalenza e le regole del calcolo algebrico, a un equazione del tipo ax = b e risolvere l'equazione che si è cosi ottenuta dividendo i due membri dell'equazione per il coefficiente di x. Per esempio:

3x = -2 equivale a $\frac{3x}{3} = \frac{-2}{3}\,, da\ cui\ x = -\frac{2}{3}$

Le equazioni di primo grado a coefficienti frazionari, si possono ricondurre a equazioni a coefficienti interi: basta moltiplicare entrambi i membri per il minimo comune multiplo dei denominatori che compaiono nell'equazione

Una volta che si è risolta un'equazione, si può effettuare la verifica delle soluzioni, cioè controllare che le soluzioni trovate siano effettivamente corrette. Per fare ciò basta sostituire nell'equazione iniziale al posto dell'incognita il numero trovato come soluzione e controllare che questo numero renda effettivamente uguali i due membri dell'equazione.

Procedimento per la risoluzione di un'equazione frazionaria

- Si determinano le condizioni di esistenza (C.E.) delle frazioni algebriche che compaiono nell'equazione;
- Ci si riconduce ad un equazione intera, moltiplicando i due membri dell'equazione per il minimo comune multiplo dei denominatori e si risolve l'equazione cosi ottenuta;
- Si confrontano le soluzioni trovate con le condizioni di esistenza e si scartano le eventuali soluzione che non soddisfano tali condizioni.

Procedimento per la risoluzione di un'equazione letterale intera di primo grado in x

- Si riconduce l'equazione alla forma Ax = B, se non lo è già;
- Si risolve e si discute l'equazione ottenuta:
  - Si determinano i valori dei parametri per cui A ≠ 0: per tutti questi valori l'equazione è determinata e se ne calcola la soluzione;
  - Si esaminano direttamente le equazioni che si ottengono in corrispondenza dei valori esclusi precedentemente: per questi valori l'equazione è impossibile o indeterminata.
- Si riassumono le conclusioni a cui si è giunti.

Esempio:

$a^2x + 1 = a\,(\,x + 1\,)$

Riconduciamo l'equazione data alla forma Ax = B

$$a^2x + 1 = ax + a$$
$$a^2x - ax = a - 1$$
$$(\,a^2 - a)x = a - 1$$
$$a(\,a - 1\,)x = a - 1$$

Risolviamo e discutiamo l'equazione ottenuta:

$$x = \frac{a-1}{a(\,a-1\,)} = \frac{1}{a}$$

Analizziamo cosa accade nei casi in cui a = 0 e a = 1

- Se a = 0, l'equazione diventa 0 (0 -1)x = 0 – 1 cioè 0x = -1, che è impossibile
- Se a = 1, l'equazione diventa 1 (1 – 1)x = 1 – 1 cioè 0x = 0, che è indeterminata (è un identità)

Riassumiamo i risultati della discussione

- Se a ≠ o e a ≠ 1 l'equazione è determinata e la soluzione è x = $\frac{1}{a}$.
- Se a = 0 l'equazione è impossibile
- Se a = 1 l'equazione è indeterminata.

Se in un equazione letterale intera compaiono dei parametri ai denominatori, bisogna imporre che i denominatori siano diversi da zero. Poste le C.E. si moltiplicano i due membri dell'equazione per il m.c.m. dei denominatori e se ne discute l'equazione ottenuta.

Le equazione letterali frazionarie

Se l'equazione letterale è frazionaria, occorre determinare le condizioni di esistenza e ricondurla a un'equazione intera che si discute come nei casi precedenti con l'unica differenza che bisogna anche discutere l'accettabilità delle soluzioni trovate in relazione alle condizioni di esistenza.

Procedimento per discutere un'equazione letterale che presenta incognite e / o parametri al denominatore

- Se l'equazione letterale da discutere presenta delle lettere ai denominatori (incognite e / o parametri) , bisogna porre le condizioni di esistenza; esse si possono suddividere in:
  - Condizioni sui parametri, che escludono i valori per cui l'equazione perde significato;
  - Condizioni sulle incognite, che andranno riprese alla fine per verificare l'accettabilità delle soluzioni
- Una volta poste le condizioni di esistenza, ci si riconduce ad un'equazione intera, moltiplicando i due membri per il m.c.m. dei denominatori, quindi di risolve e si discute l'equazione ottenuta.
- Se precedentemente si erano poste delle condizioni sulle incognite, occorre discutere l'accettabilità delle soluzioni in relazione a tali condizioni.
- Al termine è utile riassumere i risultati della discussione