Funzione Invertibile; funzione inversa

Supponiamo che f abbia come dominio un insieme D ⊆ ℝ. Per ogni ingresso x ∈ f (D) esiste un'unica uscita f (x). Se succede che per ogni uscita y ∈ f (D) esiste un solo ingresso x ∈ D tale che f (x) = y, allora f si dice invertibile, e realizza una corrispondenza biunivoca tra D e f (D).

Si dice che f : D → ℝ è invertibile in D se vale una delle seguenti condizioni (equivalenti) :

- $\forall\, x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- $\forall\, x_1, x_2 \in D$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- ∀ y ∈ f (D) ∃! x ∈ D tale che f (x) = y

La funzione che associa a ogni uscita y ∈ f (D) l'unico ingresso x ∈ D tale che f (x) = y si chiama funzione inversa di f e si indica con il simbolo f^{-1}

La condizione di invertibilità richiede che il grafico di f sia intersecato al massimo in un punto da ogni retta parallela all'asse delle ascisse.

Teorema

Una funzione f : D → ℝ strettamente monotona in D è invertibile in D. Inoltre, la sua inversa è ancora strettamente monotona.

Dimostrazione: Supponiamo che f sia strettamente crescente in D.
Siano $x_1, x_2 \in D$ proviamo che:

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Se $x_1 \neq x_2$ allora o $x_1 < x_2$, oppure $x_1 > x_2$. Per la monotonia stretta di f, nel primo caso si ha $f(x_1) < f(x_2)$, nel secondo $f(x_1) > f(x_2)$; in entrambi i casi $f(x_1) \neq f(x_2)$, perciò f è invertibile. Sia ora $x = f^{-1}(y)$ la sua funzione inversa , e proviamo che f^{-1} è strettamente crescente. Sia dunque $y_1 < y_2$. Se fosse $x_1 \geq x_2$ (dove $x_1 = f^{-1}(y_1)$), poiché f è crescente avremo $y_1 \geq y_2$, assurdo; quindi $x_1 < x_2$, ossia $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ e f^{-1} è strettamente crescente.