Le equazioni lineari in due incognite

Consideriamo l'equazione:

$ax - by - c = 0$

Si tratta di un equazione di primo grado in due incognite (x ; y), ovvero di un equazione lineare in due incognite.

Una soluzione dell'equazione è un coppia ordinata di valori (x ; y) che rende il primo membro uguale al secondo.

Esempio:

Consideriamo l'equazione:

$3x - 5y - 4 = 0$

La coppia ordinata (0 ; $-\frac{4}{5}$) è una soluzione; per verificarlo basta sostituire, nell'equazione, a x il valore 0 e a y il valore $-\frac{4}{5}$ e controllare che l'uguaglianza risulti soddisfatta.

Per trovare altre soluzioni basta assegnare un qualsiasi altro valore ad x e poi risolvere rispetto ad y l'equazione cosi ottenuta.

Per esempio se poniamo x = 8, l'equazione diventa:

$24 - 5y - 4 = 0 \rightarrow -5y = 4 - 24 \rightarrow -5y = -20 \rightarrow y = \frac{20}{5} = 4$

Ricavando y, abbiamo ottenuto y = 4

La coppia ordinata (8 ; 4) soddisfa l'equazione data.

Possiamo trovare altre soluzioni allo stesso modo, attribuendo diversi valori a x e ricavando i rispettivi valori di y. Poiché le coppie (x ; y) che soddisfano l'equazione sono infinite, ogni equazione lineare in due incognite è indeterminata.

NB: Dire che le soluzioni sono infinite non significa dire che qualunque coppia di numeri è soluzione dell'equazione.

I sistemi di due equazioni lineari in due incognite

Un sistema di equazioni è un insieme di equazioni in cui compaiono le stesse incognite, per le quali ci chiediamo quali sono le soluzioni comuni

Un sistema di equazioni viene detto lineare se all'interno compaiono solo equazioni di primo grado. Può essere di tre tipi:

- Sistema impossibile: se non ammette soluzioni.

Consideriamo un generico sistema scritto in forma normale:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$ con a, $a_1, b, b_1 \neq 0$

Esso è impossibile quando il rapporto tra i coefficienti di x, $\frac{a}{a_1}$, è uguale al rapporto fra i coefficienti di y, $\frac{b}{b_1}$, e tale rapporto è diverso dal rapporto fra i termini noti , $\frac{c}{c_1}$:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \neq \frac{c}{c_1}$$

- Sistema indeterminato : se ha un numero infinito di soluzioni.

Consideriamo un generico sistema scritto in forma normale:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$ con a, $a_1, b, b_1 \neq 0$

Esso è indeterminato quando il rapporto tra i coefficienti di x, $\frac{a}{a_1}$, è uguale al rapporto fra i coefficienti di y, $\frac{b}{b_1}$, e tale rapporto è uguale al rapporto fra i termini noti , $\frac{c}{c_1}$:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$

- Sistema determinato: se ha un numero finito di soluzioni.

Consideriamo un generico sistema scritto in forma normale:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$ con a, $a_1, b, b_1 \neq 0$

Esso è determinato quando il rapporto tra i coefficienti di x, $\frac{a}{a_1}$, è diverso dal rapporto fra i coefficienti di y, $\frac{b}{b_1}$:

$$\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$$

Le soluzioni del sistema sono le soluzioni comuni a tutte le equazioni

Per indicare un sistema si scrivono le equazioni in colonna, racchiuse in una parentesi graffa.

Esempio:

Il sistema

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 4x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

Ha come soluzioni la coppia di numeri (1 ; 3) perché per x = 1 e y = 3 sono soddisfatte entrambe le equazioni.

Il grado di un sistema

Il grado di un sistema di equazioni algebriche intere è dato dal prodotto dei gradi delle singole equazioni appartenenti ad esso.

I metodi di risoluzione

Per la risoluzione di un sistema di equazioni esistono vari metodi;

Il metodo di sostituzione

Procedimento	Esempio
1. Ricavare un'incognita in funzione all'altra da una delle due equazioni:	$\begin{cases} x = 3 - 5y \\ 2x - 4y = -8 \end{cases}$
2. Sostituire l'espressione trovata per l'incognita nell'altra equazione; si ottiene un equazione in una sola incognita:	$\begin{cases} x = 3 - 5y \\ 2(3 - 5y) - 4y = -8 \end{cases}$
3. Risolvere l'equazione in una sola incognita:	$\begin{cases} x = 3 - 5y \\ y = 1 \end{cases}$
4. Sostituire la soluzione trovata nell'espressione dell'incognita ancora da determinare; si ricava cosi la seconda incognita:	$\begin{cases} x = 3 - 5 \cdot 1 = -2 \\ y = 1 \end{cases}$

Il metodo del confronto

Procedimento	Esempio
1. Ricavare la stessa incognita da entrambe le equazioni:	$\begin{cases} y = -2 - 5x \\ y = -16 + 2x \end{cases}$
2. Uguagliare le due espressioni ottenute; si ricava cosi un equazione nella quale compare solo l'altra incognita:	$\begin{cases} -2 - 5x = -16 + 2x \\ y = -16 + 2x \end{cases}$
3. Risolvere l'equazione in una sola incognita:	$\begin{cases} x = 2 \\ y = -16 + 2x \end{cases}$
4. Sostituire il valore dell'incognita, trovata in precedenza, in una delle due equazioni iniziali:	$\begin{cases} x = 2 \\ y = -16 + 2 \cdot 2 \end{cases}$
5. Risolvere l'equazione in un incognita trovata al punto 4:	$\begin{cases} x = 2 \\ y = -12 \end{cases}$

Il metodo di riduzione

Il metodo di riduzione è anche detto metodo di addizione e sottrazione, perché per applicarlo è necessario sommare o sottrarre membro a membro le equazioni del sistema.

Procedimento	Esempio
1. Moltiplicare una o entrambe le equazioni per fattori non nulli, in modo che i coefficienti di una delle variabili risultino uguali o opposti:	$\begin{cases} 3x - 4y = 27 \\ 2x + 8y = -14 \end{cases} \begin{cases} 6x - 8y = 54 \\ 2x + 8y = -14 \end{cases}$

2. Se i coefficienti ottenuti al punto 1 sono uguali, sottrarre membro a membro le due equazioni; se i coefficienti sono opposti, sommare membro a membro; si ottiene cosi un'equazione in una sola incognita:	$+\begin{cases} 6x-8y=54 \\ 2x+8y=-14 \end{cases}$ $8x \quad = \quad 40$
3. Risolvere l'equazione in una sola incognita:	x = $\frac{40}{8}$ = 5
4. Sostituire il valore dell'incognita trovata al punto 3 in una delle equazioni iniziali e risolvere l'equazione:	$\begin{cases} x=5 \\ 2\cdot 5+8y=-14 \rightarrow 8y=-24 \rightarrow y=-3 \end{cases}$
5. Oppure sottraendo: Ripetere i passi fatti fin ora per determinare l'altra incognita:	$-\begin{cases} 6x-8y=54 \\ 6x+24y=-42 \end{cases}$ $-32y=96$ y = - 3

Il metodo di Cramer

Si può vedere che la soluzione del sistema:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{cases}$$

È data dalle formule:

x = $\frac{b_1c-bc_1}{ab_1-a_1b}$ e y = $\frac{ac_1-a_1c}{ab_1-a_1b}$, con $ab_1-a_1b \neq 0$.

Queste formule posso essere scritte in altro modo, per essere ricordate meglio, mediante l'uso dei determinanti.

Chiamiamo determinante D del sistema il numero definito da:

D = $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$ = ab_1 - ba_1

Analogamente possiamo scrivere altri due determinanti

1. Determinante D_x , ottenuto dall'espressione del determinante del sistema sostituendo, nella prima colonna, i termini noti ai coefficienti di x:
   D_x = $\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}$ = cb_1 – bc_1
2. Determinante D_y , ottenuti dall'espressione del determinante del sistema sostituendo, nella seconda colonna, i termini noti ai coefficienti di y:
   D_y = $\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}$ = ac_1 - ca_1.

Riscriviamo le soluzioni del sistema utilizzando i determinanti appena definiti:

x = $\frac{b_1c-bc_1}{ab_1-a_1b} = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{D_x}{D} \rightarrow$ **x =** $\boldsymbol{\frac{D_x}{D}}$

y = $\frac{ac_1 - a_1 c}{ab_1 - a_1 b} = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{D_y}{D} \rightarrow$ **y =** $\boldsymbol{\frac{D_y}{D}}$

Se D = 0, il sistema è

- Impossibile se D_x ≠ 0 v D_y ≠ 0
- Indeterminato se D_x = 0 ∧ D_y = 0.

Esempio:

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} 5x + y = -2 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

Calcoliamo il determinante del sistema:

D = $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ = 5 (- 1) – 1 (2) = - 5 – 2 = - 7

Calcoliamo D_x e D_y

D_x = $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$ = - 2 (- 1) – 1 (- 1) = 2 + 1 = 3

D_y = $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ = 5 (- 1) – (- 2) 2 = - 5 + 4 = - 1

La soluzione è x = $\frac{D_x}{D} = \frac{3}{-7} = -\frac{3}{7}$; y = $\frac{D_y}{D} = \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}$.

Il sistema ha come soluzioni la coppia ($-\frac{3}{7}$; $\frac{1}{7}$) .

I metodi risolutivi di sostituzione, del confronto e di riduzione possono essere applicati anche a sistemi di primo grado di tre (o più) equazioni in tre (o più) incognite.