LE FUNZIONI E LE LORO PROPRIETA'

LE FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

Che cosa sono le funzioni

Definizione

Dati due sottoinsiemi A e B (non vuoti) di $\mathbb{R}$, una funzione da A a B è una legge che associa a ogni numero reale di A uno e un solo numero reale di B.

Indichiamo la funzione con la lettera minuscola f, e con la seguente notazione:

$f : A \rightarrow B$

Che si legge: "f è una funzione da A a B".

Se ad $x \in A$, la funzione f associa $y \in B$, diciamo che y è immagine di x mediante f e scriviamo:

$f : x \mapsto y$ oppure $y = f(x)$ x è detta controimmagine di y

Che si legge: "y uguale a f di x".

Esempio

La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$x \mapsto -\frac{4}{3}x + 3$ oppure $y = -\frac{4}{3}x + 3$

associa a ogni valore di x uno e un solo valore di y. Per esempio, per

$x = 6$ si ha $y = -\frac{4}{3} \cdot 6 + 3 = -5$

$x = \frac{3}{2}$ si ha $y = -\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} + 3 = 1$

x è detta variabile indipendente, y variabile dipendente.

Una funzione può essere indicata in forma implicita o in forma esplicita:

Forma implicita : $f(x ; y) = 0$
Forma esplicita : $y = f(x)$

Esempio:

Forma implicita : $3x + 2y - 6 = 0$

Forma esplicita: $y = -\frac{3}{2}x + 3$

Esistono funzioni dette funzioni definite per casi o definite a tratti, date da espressioni analitiche diverse a seconda dei valori attribuiti alla variabili indipendente.

Esempio:

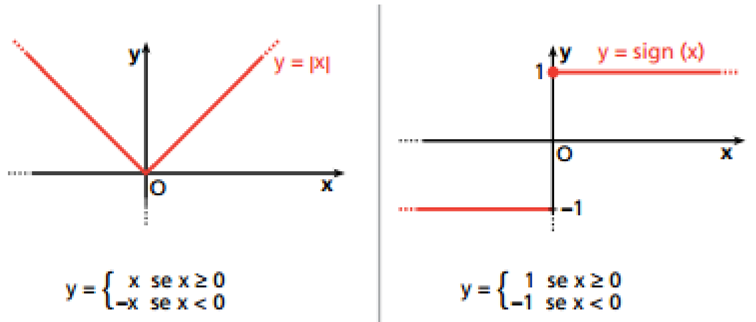
La funzione valore assoluto è definita nel seguente modo:

$$y = |\, x \,| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Un'altra funzione definita per casi è la funzione segno:

$$y = sign(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Di una funzione f possiamo disegnare il grafico, cioè l'insieme dei punti P(x ; y) del piano cartesiano tali che y è immagine di x mediante f. Dal grafico possiamo cercare le intersezioni con gli assi che si determinano mettendo a sistema l'equazione delle funzione con y = 0 (equazione dell'asse x) o con x = 0 (equazione dell'asse y).



a. La funzione valore assoluto

b. La funzione segno

La classificazione delle funzioni

Le funzioni esprimibili analiticamente possono essere distinte in funzioni algebriche e funzioni trascendenti.

La funzione è algebrica se l'espressione analitica y = f (x) che la descrive contiene soltanto, nella variabile x, operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza, o estrazione di radice.

Una funzione algebrica può essere :

Razionale intera (o polinomiale) se espressa mediante un polinomio; in particolare se il polinomio è di primo grado rispetto alla variabile x, la funzione si dice lineare; se il polinomio in x è di secondo grado, la funzione è detta quadratica;

Razionale fratta se è espressa mediante quozienti di polinomi;

Irrazionale se la variabile indipendente x compare sotto il segno di radice.

Se una funzione non è algebrica si dice trascendente.

Il campo di esistenza di una funzione e lo studio del segno

Abitualmente il termine dominio viene anche usato come sinonimo di campo di esistenza, in quanto è usuale considerare il campo di esistenza come dominio per una funzione. Il campo di esistenza (C.E.) di una funzione è il sottoinsieme più ampio di $\mathbb{R}$ in cui essa può essere definita.

Data una funzione f : A $\rightarrow$ B

A viene detto dominio della funzione, e lo indicheremo anche con D, mentre il sottoinsieme C di B formato dalle immagini degli elementi di A, è detto codominio.

Funzione	Campo di Esistenza
Funzioni razionali intere: y= $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$	$\mathbb{R}$
Funzioni razionali fratte: y = $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (P e Q polinomi)	$\mathbb{R}$ - $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ con Q (x_0)= ... = Q (x_k)= 0
Funzioni irrazionali: y = $\sqrt[n]{f(x)}$ y= $[f(x)]^\alpha$ a > 0 e irrazionale y = $[f(x)]^{g(x)}$ y = log_a f(x) a >0, a ≠ 1 y = $a^{f(x)}$ a>0, a≠ 1	$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\}$, *se n è pari* *campo di esistenza di f(x), se n è dispari* $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\}$ $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}$ ∩ C.E. di g(x) $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}$ Campo di esistenza di f(x)
Funzioni goniometriche: y = sen x, y = cos x y = tg x y = cotg x y = arcsen x, y = arcos x y = arctg x , y = arccotg x	 $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ - $\{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ $\mathbb{R}$ - $\{k\pi\}$ [-1; 1] $\mathbb{R}$

Per studiare il segno di una funzione y = f (x), bisogna cercare per quali valori di x appartenenti al dominio, il valore di y è positivo, negativo, nullo.

Esempio:

y = 2x – 6

x> 3 positiva
x= 3 nulla
x<3 negativa

Le proprietà delle funzioni e la loro composizione

Funzioni iniettive, suriettive e biiettive

Una funzione da A a B si dice:

- Iniettiva se ogni elemento di B è immagine di al più un elemento di A;
  $\forall\ a_1, a_2 \in$ A tale che $a_1 \neq a_2 \Rightarrow$ f(a_1) ≠ f (a_2)
- Suriettiva: se ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A;
  ∀ b ∈ B ∃ a ∈ A | f(a) = b
- Biiettiva (o biunivoca): se è sia iniettiva sia suriettiva.
  $\forall\ a_1, a_2 \in$ A tale che $a_1 \neq a_2 \Rightarrow$ f(a_1) ≠ f (a_2) ∪ ∀ b ∈ B ∃ a ∈ A | f(a) = b

Funzioni Pari

Consideriamo D un sottoinsieme di ℝ tale che se x ∈ D allora – x ∈ D. Una funzione y = f (x) si dice pari in D se f (-x) = f (x) per qualunque x appartenete a D.

In simboli:

f : D → ℝ D ⊆ ℝ

∀ x, -x ∈ D ⇒ f(-x) = f (x)

Esempio

Data la funzione $y = 2x^4 - 1$, questa è pari perché sostituendo a x il suo opposto – x si ottiene ancora f(x):

$f(-x) = 2(-x)^4 - 1 = 2x^4 - 1 = f(x)$

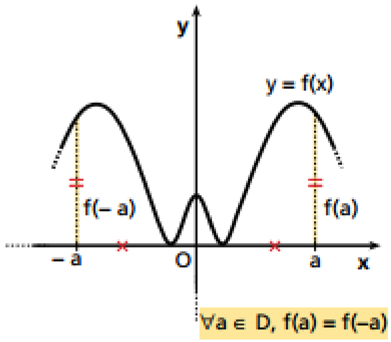
Nota: Se una funzione ha espressione analitica contenente soltanto potenze della x con esponente pari, allora è pari.

Esempio:

Data la funzione $y = 5x^6 - 3$, la si può scrivere come $y = 5x^6 - 3x^0$.
Questo perché quando nell'espressione analitica un addendo è costituito da un valore numerico, esso può essere considerato il coefficiente di x^0, ossia di una potenza di x con esponente pari.
Quindi la funzione $y = 5x^6 - 3$ contiene solo potenze pari di x, quindi è una funzione pari.

Se una funzione è pari il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y. Infatti se il P (x ; y) appartiene al grafico, vi appartiene anche il punto P' (- x ; y). Pertanto le coordinate di P', pensate come (x' ; y'), soddisfano alle equazioni della simmetria rispetto all'asse y:

x’ = -x
y’ = y



Funzioni dispari

Considerando D un sottoinsieme di ℝ tale che se x ∈ D anche – x ∈ D. Una funzione y = f (x) si dice dispari in D se f (- x) = - f (x) per qualunque x appartenete a D.

In simboli:

f : D → ℝ   D ⊆ ℝ

∀ x, -x ∈ D   ⇒   f(-x) = - f (x)

Esempio:

La funzione y = f (x) = x^3 + x è dispari perché sostituendo a x il suo opposto – x si ottiene – f (x)

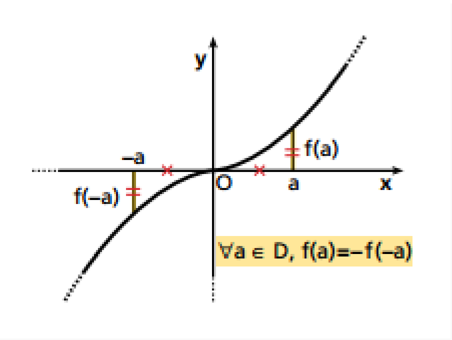
f (- x) = ($-x$)^3 + (- x) = $-$ x^3 – x = - (x^3 + x) = - f (x).

Una funzione con espressione analitica contenete solo potenze della x con esponente dispari è una funzione dispari.

Se una funzione è dispari, il suo grafico è simmetrico rispetto all’origine degli assi. Infatti, se il punto P (x ; y) appartiene al grafico, vi appartiene anche il punto P ‘ (- x ; - y).

Pertanto le coordinate di P’ , pensate come (x’ ; y’), soddisfano alle equazioni della simmetria centrale di centro l’origine:

x’ = -x
y’ = -y



Osservazione: Una funzione che non sia pari non è necessariamente dispari (e viceversa).

Esempio:

La funzione: y = f (x) = x^2 + x non è né pari né dispari. Infatti:

f (- x) = ($-x$ $)^2$ + (- x) = x^2 – x ≠ - f (x) ∧ ≠ f (x)