Che cosa sono le equazioni di secondo grado?

Un equazione è di secondo grado, se si presenta nella forma:

ax^2 + bx + c = 0, con a ≠ 0

Le lettere a, b e c rappresentano numeri reali o espressioni letterali e si chiamano primo, secondo e terzo coefficiente dell'equazione; c è anche detto termine noto.

Se oltre ad a ≠ 0 , si hanno anche b ≠ 0 e c ≠ 0, l'equazione si dice completa.
Se invece l'equazione è incompleta, abbiamo tre casi particolari:

COEFFICIENTI	FORMA NORMALE	NOME	ESEMPIO
b ≠ 0 e c ≠ 0	ax^2 + bx = 0	Equazione spuria	2x^2 – 5x = 0
b = 0 e c ≠ 0	ax^2 + c = 0	Equazione pura	2x^2 + 6 = 0
b = 0 e c = 0	ax^2 = 0	Equazione monomia	2x^2 = 0

Le soluzioni (o radici)

Una soluzione o radice dell'equazione è un valore che, sostituito all'incognita, rende vera l'uguaglianza fra i due membri.
Risolvere un equazione di secondo grado significa cercarne le soluzioni. In genere cercheremo le soluzioni nell'insieme ℝ dei numeri reali.

La risoluzione di un'equazione di secondo grado

Per calcolare le soluzioni di un equazione di secondo grado, è necessario calcolare il discriminante

Δ = b^2 - 4ac

E si posso verificare tre casi:

1. **Δ > 0** : l'equazione ha due soluzioni reali e distinte:
   $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
2. **Δ = 0** : l'equazione ha due soluzioni reali coincidenti
   $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.
3. **Δ < 0** : l'equazione non ha soluzioni reali, cioè in ℝ è impossibile.

Quando nell'equazione ax^2 + bx + c = 0 il coefficiente b, è un numero pari, è utile applicare una formula, detta formula ridotta, che ricaviamo dalla generale:

Raccogliamo 4 sotto il segno di radice:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{4\,(\frac{b^2}{4} - ac\,)}}{2a} = \frac{-b \pm 2\sqrt{\frac{b^2}{4} - ac}}{2a}$$

Dividiamo per 2 il numeratore e il denominatore:

x = $\dfrac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{(\frac{b}{2})^2 - ac}}{a}$

Per utilizzare questa formula, invece di Δ = b^2 - 4ac dobbiamo calcolare $(\frac{b}{2})^2 - ac$, che si ottiene dividendo Δ per 4 e si indica con $\frac{\Delta}{4}$. Si ha:

$$\frac{\Delta}{4} = (\frac{b}{2})^2 - ac$$

Per le equazioni di secondo grado incomplete ci sono formule più semplici e intuitivi:

Le equazioni pure: ax^2 + c = 0

In generale, un equazioni di secondo grado pura, del tipo ax^2 + c = 0, con a e c numeri reali discordi, hadue soluzioni reali e opposte:

$x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}$; $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Se a e c sono concordi, l'equazione non ha soluzioni reali.

Le equazioni spurie: ax^2 + bx = 0

In generale un equazione di secondo grado spuria, del tipo ax^2 + bx = 0, ha sempre due soluzioni reali di cui una è nulla:

x_1 = 0, $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Le equazioni monomie: ax^2 = 0

In generale un equazione di secondo grado monomia, del tipo ax^2 = 0, ha sempre due soluzioni reali coincidenti: x_1 = x_2 = 0.

Le equazioni fratte

Un'equazione di secondo grado viene detta fratta, se presenta l'incognita x al denominatore. Può essere sempre trasformata in un equazione del tipo:

$\frac{N(x)}{D(x)}$ = 0

Per risolvere un'equazione fratta dobbiamo porre il numeratore D (x) ≠ 0 per la condizione di esistenza della frazione e risolvere N (x) normalmente.
Alla fine bisognerà confrontare le radici trovate con i valori eventualmente esclusi da D (x) ≠ 0. Se le soluzioni non sono state scartate in precedenza, queste saranno accettabili, al contrario, le scarteremo.

Esempio:

$$\frac{x}{x+3}+\frac{3}{x-3}=-\frac{x^2-12}{(x-3)(x+3)}$$

Portiamo tutto a denominatore comune, e otterremo la forma

$\frac{N(x)}{D(x)}$ = 0

$$\frac{x(x-3)+3(x+3)}{(x+3)(x-3)}=-\frac{x^2-12}{(x-3)(x+3)}$$

$$\frac{x^2-3x+3x+9+x^2-12}{(x+3)(x-3)}=0$$

Ora abbiamo N (x) = $x^2-3x+3x+9+x^2-12$

E D (x) = $(x+3)(x-3)$ = x^2-9

Poniamo D (x) ≠ 0

x^2-9 ≠ 0 cioè x ≠ ± 3

Risolviamo N (x)

$x^2-3x+3x+9+x^2-12=0$

Sommiamo i termini simili

$2x^2-3$ = 0

Abbiamo quindi un'equazione di secondo grado pura. Le soluzioni sono: $x_1=+\sqrt{-\frac{c}{a}}$; $x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Quindi:

$x_1=+\sqrt{\frac{3}{2}}$; $x_2=-\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Le soluzioni trovate sono diverse dai valori trovati in precedenza quindi sono accettabili.

La relazione fra le radici e i coefficienti di un equazioni di secondo grado

Data l'equazione di secondo grado ax^2 + bx + c = 0, con Δ ≥ 0, è possibile trovare delle relazioni che legano la somma e il prodotto delle sue radici ai coefficienti a, b, c.

La somma delle radici

Calcoliamo la somma delle due radici:

$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$

Definizione

La somma **s** delle radici di un'equazione di secondo grado a discriminante non negativo è uguale al rapporto, cambiato di segno, fra il coefficiente di x e quello di x^2 .

S = $-\frac{b}{a}$

Il prodotto delle radici

Calcoliamo il rapporto delle due radici:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} .$$

Definizione

Il prodotto **p** delle radici di un equazione di secondo grado a discriminante non negativo è uguale al rapporto fra il termine noto e il coefficiente di x^2.

P = $\frac{c}{a}$

La permanenza del segno e la regola di Cartesio

E' possibile conoscere il segno delle radici reali di un'equazione completa di secondo grado senza risolverla. Per farlo introduciamo i concetti i variazione e di permanenza relativi al segno dei coefficienti dell'equazione.

Dato un polinomio ordinato secondo una variabile:

- Si ha una permanenza quando i coefficienti di un termine e del suo successivo sono concordi;
- Si ha una variazione quando sono discordi.

La regola di Cartesio

In un'equazione di secondo grado completa , con a > 0, si possono presentare quattro casi di possibili combinazioni dei segni :

a	b	c	PERMANENZE E VARIAZIONI	ESEMPIO
+	+	+	Due permanenze	$6x^2$ + 13x + 6 = 0
+	-	+	Due variazioni	x^2 - 8x + 15 = 0
+	-	-	Una variazione e una permanenza	$3x^2$ - 2x - 8 = 0
+	+	-	Una permanenza e una variazione	$8x^2$ + 10x - 7 = 0

1° caso: la sequenza +++ (due permanenze)

Poiché a e c sono positivi, il prodotto delle radici $\frac{c}{a}$ è positivo, perciò le radici sono concordi, quindi entrambe positive o entrambe negative. Poiché a e b sono positivi, la somma delle radici - $\frac{b}{a}$ è negativa, quindi le radici sono entrambe negative.

2° caso: la sequenza +-+ (due variazioni)

Poiché a e c sono concordi, il prodotto delle radici $\frac{c}{a}$ è positivo, perciò le radici sono concordi, quindi entrambe positive o entrambe negative. Poiché a e b sono discordi, la somma delle radici -$\frac{b}{a}$ è positiva, quindi le radici sono entrambe positive.

3° caso: la sequenza +-- (una variazione e una permanenza)

Poiché a e c sono discordi, il prodotto delle radici $\frac{c}{a}$ è negativo, perciò le radici sono discordi, quindi le radici sono una positiva e una negativa. Poiché a e b sono discordi, la somma delle radici -$\frac{b}{a}$ è positiva; quindi la radice positiva deve essere maggiore del valore assoluto di quella negativa.

4° caso: la sequenza ++- (una permanenza e una variazione)

Poiché a e c sono discordi, il prodotto delle radici $\frac{c}{a}$ è negativo, perciò le radici sono discordi, quindi le radici sono una negativa e una positiva. Poiché a e b sono positivi, la somma delle radici -$\frac{b}{a}$ è negativa, quindi la radice positiva deve essere minore del valore assoluto di quella negativa.

I quattro casi sopra descritti possono essere riassunti in un'unica regola:

In un'equazione di secondo grado completa scritta in forma normale $ax^2 + bx + c = 0$, con $\Delta \geq 0$, a ogni permanenza corrisponde una radice negativa e a ogni variazione una radice positiva. Quando le radici sono discordi, la radice con valore assoluto maggiore è positiva se la variazione precede la permanenza, è negativa nel caso contrario.