Limite finito per x che tende ad un valore finito

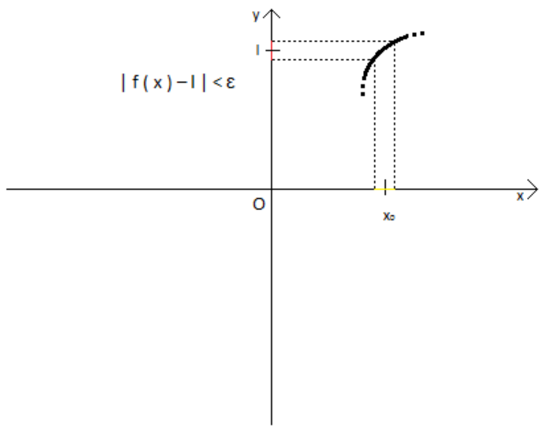
Si dice che una funzione f (x) ha per limite il numero reale l per x che tende a x_0 , e si scrive :

$\lim_{x \to x_0} f\ (\ x\ ) = l$

Quando comunque si scelga un numero reale positivo ε si può determinare un intorno completo I di x_0 tale che risulti

| f (x) – l | < ε

Per ogni x appartenente a I, diverso da x_0 .



Spesso si prende come intorno di x_0 un intorno circolare I_δ (x_0) e quindi la definizione precedente si può formulare così:

∀ ε > 0 ∃ δ_ε > 0 tale che ∀ x con | x - x_0 | < δ_ε , | f (x) – l | < ε

Nella definizione, quando diciamo " numero reale positivo ε " pensiamo a valori di ε che diventano sempre più piccoli.

Esplicitando il valore assoluto dato nella definizione otteniamo:

- ε < f (x) - l < ε,

l – ε < f (x) < l + ε

Da questo possiamo dedurre che f (x) appartiene all'intorno] l – ε ; l + ε [.

La definizione dice che fissato un ε qualsiasi, anche molto piccolo, troveremo sempre un intorno di x_0 tale che per ogni x di quell'intorno f (x) appartiene a] l – ε ; l + ε [, cioè f (x) è molto vicino a l.

Se riduciamo ε, potremmo essere costretti a scegliere un intorno di x_0 più piccolo. Più piccolo scegliamo ε, più piccolo diventa l'intorno I.

Il limite finito per x che tende ad un valore infinito

x tende a + ∞

Si dice che una funzione f (x) tende al numero reale l per x che tende a + ∞ e si scrive:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$

Quando comunque si scelga un numero reale positivo ε si può determinare un intorno I di + ∞ tale che :

$| f(x) - l | < \varepsilon$ per ogni $x \in I$.

Considerato che un intorno di + ∞ è costituito da tutti gli x maggiori di un numero reale c, possiamo dire che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ se :

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists c > 0$ tale che $\forall x > c$, $| f(x) - l | < \varepsilon$.

x tende a - ∞

Si dice che una funzione f (x) ha il limite reale l per x che tende a - ∞ e si scrive:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$

Se per ogni ε > 0 fissato è possibile trovare un intorno I di - ∞ tale che risulti:

$| f(x) - l | < \varepsilon$ per ogni $x \in I$.

Si possono riassumere i due casi precedenti in un unico caso, se si considera un intorno di ∞ determinato dagli x per i quali:

$| x | > c$, ossia $x < -c \;\vee\; x > c$

O anche $x \in]-\infty ; -c[\cup]c ; +\infty[$, dove c è un numero reale positivo grande a piacere. Data questa definizione possiamo di che x tende a ∞ omettendo il segno + o - .

Si dice che $\boldsymbol{\lim_{x \to \infty} f(x) = l}$ **quando per ogni ε > 0 è possibile trovare un intorno I di ∞ tale che | f (x) – l | < ε per ogni x ∈ I.**