Le disequazioni di secondo grado

Ogni disegnazione intera di secondo grado nell'incognita x può essere ricondotta a forma normale:

ax^2 + bx + c > 0 , con a ≠ 0,

o alle analoghe che si ottengono con i segni <, ≤ o ≥.

Possiamo sempre fare riferimento ai casi in cui il coefficiente a è positivo. Infatti, se a è negativo, basta cambiare segno a tutti i termini e invertire il senso della disuguaglianza.

Per determinare le soluzioni di una disequazione di secondo grado si considera l'equazione associata:

ax^2 + bx + c = 0

e si distinguono i tre casi, a seconda del segno del discriminante

Δ > 0 , Δ = 0 , Δ < 0.

L'equazione associata ha Δ > 0

Se l'equazione ax^2 + bx + c = 0 ha Δ > 0, ossia due soluzioni reali distinte $x_1 < x_2$, allora:

- La disequazione ax^2 + bx + c > 0 (con a > 0) è verificata per x < x_1 v x > x_2 , ossia per valori esterni all'intervallo di estremi x_1 , x_2 ;
- La disequazione ax^2 + bx + c < 0 (con a > 0) è verificata per x_1 < x < x_2, ossia per valori interni all'intervallo di estremi x_1 , x_2 .

L'equazione associata ha Δ = 0

Se l'equazione ax^2 + bx + c = 0 ha Δ = 0, ossia due soluzioni reali coincidenti $x_1 = x_2$, allora:

- La disequazione ax^2 + bx + c > 0 (con a > 0) è verificata per qualunque valore di x, diverso da x_1 ;
- La disequazione ax^2 + bx + c < 0 (con a > 0) non è mai verificata.

L'equazione associata ha Δ < 0

Se l'equazione ax^2 + bx + c = 0 ha Δ < 0, ossia non ha soluzioni reali:

- La disequazione ax^2 + bx + c > 0 (con a > 0) è verificata per qualunque valore di x;
- La disequazione ax^2 + bx + c < 0 (con a > 0) non è mai verificata.

Per studiare il segno di una disequazione di secondo grado, bisogna trovare le soluzione dell'equazione associata ax^2 + bx + c = 0, distinguendo i casi in cui il Δ sia positivo, uguale a zero e negativo.

Se il Δ >0, l'equazione associata ha due soluzioni x_1, x_2 e il trinomio è scomponibile come:

ax^2 + bx + c = a (x - x_1) (x - x_2)

Per lo studio del segno basta studiare il segno de prodotto

a > 0

Intervalli	X < x_1	X = x_1	x_1< x x_2	X = x_2	X > x_2
Segno di a	+		+		+
Segno di (x - x_1)	-	0	-		+
Segno di (x - x_2)	-		+	0	+
Segno del trinomio	+	0	-	0	+

a < 0

Intervalli	X < x_1	X = x_1	x_1< x x_2	X = x_2	X > x_2
Segno di a	-		-		-
Segno di (x - x_1)	-	0	+		+
Segno di (x - x_2)	-		-	0	+
Segno del trinomio	-	0	+	0	-

Se Δ = 0 l'equazione associata ha due soluzioni reali coincidenti, $x_1 = x_2$, e il trinomio sarà scomponibile:

ax^2 + bx + c = a $(x - x_1)^2$

a > 0

Intervalli	X < x_1	X = x_1	X > x_1
Segno di a	+		+
Segno di $(x - x_1)^2$	+	0	+
Segno del trinomio	+	0	+

a < 0

Intervalli	X < x_1	X = x_1	X > x_1
Segno di a	-		-
Segno di $(x - x_1)^2$	+	0	+
Segno del trinomio	-	0	-

Se Δ < 0 , l'equazione associata non ha soluzioni. Questa assume sempre lo stesso segno del coefficiente a.

Dimostrazione:

Trasformiamo il trinomio in:

ax^2 + bx + c = a $[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}]$

Essendo Δ < 0 , l'espressione $\frac{-\Delta}{4a^2}$ è sempre positiva, proprio come la somma dentro le parentesi quadre, essendo essa elevata al quadrato.

Le disequazioni fratte

Una disequazione è fratta se contiene l'incognita al denominatore. Può essere sempre trasformata in una disequazione del tipo:

$\frac{A(x)}{B(x)} > 0$

O in altre analoghe con i diversi segni della disuguaglianza.
Per risolvere una disequazione fratta dobbiamo studiare il segno della frazione $\frac{A(x)}{B(x)}$, esaminando quelli di $A(x)$ e di $B(x)$. Dobbiamo imporre $B(x) \neq 0$ per la condizione di esistenza della frazione.