Equazioni ed identità

Un'equazione è una espressione simbolica utilizzata per risolvere un problema. Supponiamo di dover risolvere questo semplice problema: Qual è quel numero il cui triplo, aumentato di 3, dà come valore 24?. Il numero che non conosco viene chiamato "incognita" e viene generalmente indicato con la lettera *x*, per cui il nostro problema tradotto in simboli matematici, diventa:

$$3x + 3 = 24$$

Questa semplice equazione è un'equazione di primo grado (il grado di un'equazione è il massimo esponente con cui compare l'incognita x, nel caso in esame vale 1).
Tutto ciò che appare a sinistra del simbolo di uguale si chiama "primo membro" (nel nostro caso 3x+3) e tutto ciò che appare a destra del simbolo di uguale si chiama "secondo membro" (nel nostro caso 24).
Un'**identità** è un'uguaglianza tra due membri che vale qualunque sia il valore che attribuiamo all'incognita x.
Ad esempio, l'espressione: $x+x=2x$ è un'identità perché vale per qualunque valore di x.
Per le equazioni e per le identità valgono i seguenti principi di equivalenza
Primo principio di equivalenza. Aggiungendo, o sottraendo, a entrambi i membri di un'equazione uno stesso numero, o una stessa espressione anche contenente l'incognita, si ottiene un'equazione equivalente.
Esempio: $3x+1=2x+2$ è equivalente a $3x-2x+1=2x-2x+2$, in quanto ad entrambi i membri è stato sottratto 2x.
Conseguenze dirette del primo principio di equivalenza sono la regola del trasporto e la regola di cancellazione.
Regola del trasporto: data un'equazione, trasportando un termine da un membro all'altro e cambiandolo di segno si ottiene un'equazione equivalente.
Regola di cancellazione: data un'equazione, è possibile cancellare termini uguali presenti in entrambi, ottenendo un'equazione equivalente.
Secondo principio di equivalenza. Data un'equazione, moltiplicando entrambi i membri per un numero diverso da zero, o per un'espressione contenente l'incognita che sia diversa da zero qualunque sia il valore dell'incognita stessa, si ottiene un'equazione equivalente.
Conseguenze dirette del secondo principio di equivalenza sono la regola di divisione per un fattore comune diverso da zero e la regola del cambiamento di segno.
Regola della divisione per un fattore comune diverso da zero: data un'equazione in cui tutti i termini hanno un fattore comune diverso da zero, dividendo per tale numero si ottiene un'equazione equivalente.
Regola del cambiamento di segno: data un'equazione, cambiando segno a tutti i termini di entrambi i membri si ottiene un'equazione equivalente.

Equazione di primo grado

Per risolvere questo tipo di equazione si applicano essenzialmente due delle regole che abbiamo elencato nei **principi di equivalenza** e precisamente:
1) Per spostare un termine da un membro all'altro questo deve cambiare il segno (+ o -).
Esempio: $x+2=3$ diventa $x=3-2$ da cui $x=1$.
2) Dividendo il primo ed il secondo membro di un'equazione per uno stesso numero diverso da 0 (o espressione diversa da 0) il risultato non cambia.
Esempio: $5x=3$ diventa $x=3/5$.
Per risolvere un'equazione di primo grado bisogna innanzitutto raggruppare a primo membro tutti i termini con la x ed a secondo membro tutti i termini senza la x.
Risolviamo la semplice equazione:

3x+3=24
Applichiamo la regola n. 1:
3x = 24 – 3
3x = 21
Applichiamo adesso la regola n. 2:
3x = 21
x = 21/3
x = 7
Dunque il numero che cercavamo è 7, infatti il suo triplo è 21 e, aumentato di 3, fa 24.
Equazione di secondo grado. Il Teorema Fondamentale dell'Algebra afferma che un'equazione ha un numero di soluzioni uguale al suo grado.
Dunque, come abbiamo visto nell'esempio precedente, l'equazione di primo grado ha una sola soluzione. L'equazione di secondo grado avrà invece due soluzioni.

Equazione di 2° grado completa

La forma generale di un'equazione di secondo grado è la seguente:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Per risolvere questa equazione si usa la formula risolutiva

$$x_{1.2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esempio: $3x^2$-5x-2=0

$$x_{1.2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} =$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} \begin{cases} \frac{5+7}{6} = \frac{12}{6} = 2 \\ \frac{5-7}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Equazioni di secondo grado incomplete

Equazione spuria: $ax^2 + bx = 0$

Si mette in evidenza la x e si ha x(ax + b) = 0

Per la legge di annullamento del prodotto sappiamo che se il prodotto di due fattori è uguale a zero, deve essere zero uno dei due termini. Pertanto si avrà **x=0** oppure **ax+b=0** che è un'equazione di primo grado.
La soluzione di quest'ultima sarà, secondo le regole che abbiamo visto nel paragrafo precedente:
ax + b = 0
ax = -b
x = -b/a.
In definitiva le due soluzioni saranno:
x = 0
x = -b/a
Esempio: $3x^2$-2x=0 si mette x a fattore comune x(3x-2)=0
Per la legge di annullamento del prodotto
x=0
3x-2=0 da cui, portando –2 al secondo membro 3x=2, dividendo per 3 x=2/3.

Equazione pura: $ax^2 + c = 0$

Notiamo innanzitutto che se, ad esempio, $x^2 = 16$, allora x può essere sia +4 che -4, infatti:
$(+4)^2 = (+4)*(+4) = 16$
$(-4)^2 = (-4)*(-4) = 16$
Risolviamo ora l'equazione:

$ax^2 + c = 0$
$ax^2 = -c$
$x^2 = -c/a$, per cui avremo:

$$x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$$

Dunque le due soluzioni dell'equazione pura saranno:

$$x = +\sqrt{\frac{b}{a}} \quad \text{e} \quad x = -\sqrt{\frac{b}{a}}$$

In un'equazione di secondo grado, l'espressione $b^2 - 4ac$, che si trova sotto radice nella formula risolutiva $x_{1.2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, si chiama discriminante dell'equazione e viene indicato con la lettera greca Δ (delta).
Se $\Delta>0$ avremo due soluzioni reali e distinte.
Se $\Delta=0$ avremo due soluzioni reali e coincidenti.
Se $\Delta<0$ avremo due soluzioni complesse coniugate. In quest'ultimo caso bisogna introdurre la teoria dei numeri immaginari (radici quadrate dei numeri negativi) per cui, a livelli più elementari di trattazione, si dice che se $\Delta<0$ l'equazione non ha soluzioni reali.

REGOLA DI CARTESIO

La regola di Cartesio stabilisce le relazioni esistenti tra i segni dei coefficienti a,b,c dell'equazione $ax^2+bx+c=0$ ed i segni delle radici x_1 e x_2.

Si osservano i segni di ciascun termine di un'equazione di secondo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ho una *permanenza* di segno se due segni successivi sono uguali;
ho una *variazione* di segno se due segni successivi sono diversi.
Ad esempio l'equazione $2x^2+4x+1=0$ ha 2 permanenze.
L'equazione $2x^2 - 8x+2=0$ ha 2 variazioni.
L'equazione $x^2 + 6x - 7 = 0$ ha 1 permanenza ed 1 variazione.
La Regola di Cartesio afferma che ad ogni permanenza corrisponde una radice negativa e ad ogni variazione una radice positiva.
Pertanto, tornando agli esempi precedenti:
$2x^2+4x+1=0$ ha 2 permanenze, quindi due radici negative.
$2x^2-8x+2=0$ ha 2 variazioni, quindi ha due radici positive.
$x^2+6x-7=0$ ha 1 permanenza ed 1 variazione, quindi ha una radice negativa ed una positiva.