Funzione di una variabile: funzioni implicite ed esplicite: retta, esponenziali, logaritmiche

FUNZIONE DI UNA VARIABILE REALE

Una funzione di variabile reale è una legge che agisce sui numeri reali e li trasforma in altri numeri reali.

In genere di due quantità variabili, che si indicano con x e y, una, per esempio la y, assume un valore ben determinato quando sia dato il valore della x; cioè avviene che il valore assunto dalla y venga a dipendere dal valore attribuito alla x. Per questo motivo la variabile x viene chiamata **variabile indipendente**, mentre la y è chiamata **variabile dipendente**. Per esempio la funzione $y = 5x + 4$, quando $x=2$, assume il valore: $y = 5(2) + 4 = 14$.

La definizione di funzione dovuta al matematico Dirichlet è la seguente: "una variabile y si dice funzione della variabile x nell'insieme I (insieme di esistenza o dominio della funzione), quando esiste una legge, di natura qualsiasi, la quale faccia corrispondere ad ogni valore dato alla x, dell'insieme I, un valore ed uno solo per la y."

Per indicare una funzione si usa la notazione **$y = f(x)$** e si legge y uguale ad effe di x.

Le funzioni si possono esprimere in **forma implicita** ed **esplicita**.

La funzione implicita si scrive nella forma $f(x) = 0$, mentre quella esplicita nella forma $y = f(x)$; per esempio la funzione $y = 9x - 3$ scritta in forma esplicita, diventa in forma implicita $9x - y - 3 = 0$.

Le funzioni di una variabile reale si classificano in:

- Funzioni algebriche
- Funzioni trascendenti

Sono algebriche le funzioni polinomiali (vedi i polinomi), razionali (rapporto tra due funzioni polinomiali), irrazionali (in cui compaiono le radici).

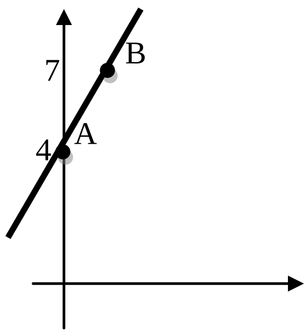
Sono trascendenti le funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente, cotangente, secante e cosecante), logaritmiche ed esponenziali.

EQUAZIONE DELLA RETTA

Il polinomio di I grado scritto in forma implicita $ax + by + c = 0$ rappresenta la funzione retta.

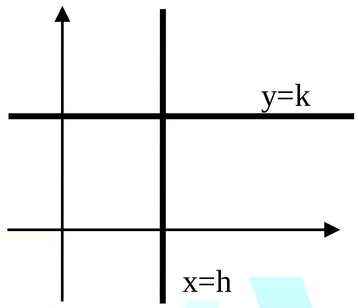
Per rappresentare questa funzione nel diagramma cartesiano ortogonale abbiamo bisogno di solo due punti, infatti per due punti del piano passa una e una sola retta. Per trovarli basta assegnare ad una delle variabili, per esempio x, due valori qualsiasi e calcolare in corrispondenza di essi i valori di y.

Esempio: disegnare sugli assi cartesiani la retta $3x - y + 4 = 0$; poniamo $x=0$, in corrispondenza sarà $y=4$; poniamo ancora $x=1$, l'ordinata assumerà il valore 7. Quindi i due punti cercati sono A(0; 4) e B(1; 7). La retta cercata passerà, quindi, per i punti trovati. La stessa retta si può esprimere in forma esplicita, cioè in funzione di y: $y = 3x + 4$.



In generale la forma esplicita della retta è del tipo $y=mx+q$. Il coefficiente della variabile x è chiamato **coefficiente angolare**, mentre il termine noto q è il valore dell'ordinata rispetto all'origine. In definitiva per tracciare la retta in questo secondo caso abbiamo bisogno dell'angolo che la retta forma con l'asse positivo delle x e del punto sull'asse delle ordinate dove passa la retta.

La retta $y=k$, dove k è una costante, è la retta parallela all'asse x, cioè delle ascisse, mentre la retta $x=h$ (costante) è una retta parallela all'asse y, cioè delle ordinate.



FUNZIONE ESPONENZIALE

La funzione $y = a^x$ con $a>0$ è una funzione esponenziale perché la variabile x compare all’esponente.

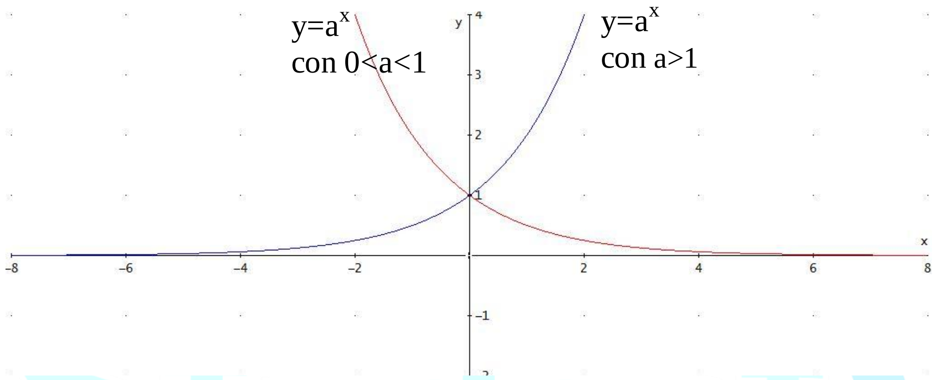
Per studiare l’andamento della curva esponenziale bisogna considerare due casi:

1) $0 < a < 1$ cioè la base della potenza è compresa tra zero e uno. Si nota che essa è sempre decrescente, passa per il valore y=1 per x=0 e tende a zero al crescere della x. Il campo di esistenza è tutto l’asse reale delle ascisse ed è situata tutta al di sopra dell’asse x.

2) a > 1, cioè la base della potenza è maggiore di uno. Essa è sempre crescente, passa, anche in questo caso, per l’ordinata y=1 per x=0. Come in precedenza il campo di esistenza è tutto l’asse reale e la curva è sempre al di sopra dell’asse x.

Naturalmente al variare del valore di *a* le curve hanno lo stesso andamento precedente, cioè possono essere più o meno ascendenti.

Rientra nel secondo caso la curva esponenziale $y=e^x$, dove *e* è un numero irrazionale, chiamato numero di Nepero, il cui valore approssimato è 2,718281…



FUNZIONE LOGARITMICA

La soluzione dell'equazione $a^x = b$ viene indicata con $x=\log_a b$ che si legge logaritmo in base a di *b*. È definito logaritmo di un numero *b* in una base *a*, l'esponente da dare ad *a* per ottenere *b*, con a>0 e diverso da uno e con b>0. *b* viene chiamato argomento.

Esempio: $\log_2 8 = 3$ perché $2^3 = 8$

Anche in questo caso per ottenere le curve relative alla funzione logaritmica $y=\log_a x$ dobbiamo distinguere due casi:

1) $0 < a < 1$. La curva è quella rappresentata nella figura seguente. Si osserva che essa è sempre decrescente, interseca l'asse delle ascisse nel punto $x = 1$. Il campo di esistenza è tutto l'asse positivo delle ascisse, escluso il punto zero.

2) $a>1$ La curva corrispondente a questo caso è riportata nella figura che segue. Si nota che è sempre crescente, passa per il punto di ascissa x = 1 ed è anch'esso nel semipiano x>0.

Particolare importanza assume il logaritmo con base il numero di Nepero "*e*", visto in precedenza; in questo caso il logaritmo si indica con *ln* (logaritmo naturale).

Quando la base non è indicata si intende che vale 10; in questo caso il logaritmo si chiama decimale.