Insiemi e relative operazioni. insiemi numerici: N, Z, Q, R

DEFINIZIONE DI INSIEME ED OPERAZIONI TRA INSIEMI

Ogni raggruppamento di oggetti qualsiasi che hanno almeno una caratteristica comune viene detto **insieme**. Ad esempio sono insiemi:

- l'insieme dei giorni della settimana, formato dagli elementi: lunedì, martedì, mercoledì, giovedì, venerdì, sabato e domenica;
- l'insieme dei mesi di 30 giorni, che è formato dagli elementi: aprile, giugno, settembre e novembre;
- l'insieme delle persone che compongono una famiglia (padre, madre, figli, ...);
- l'insieme formato dai numeri interi da 1 a 10.

Per definire un insieme bisogna specificare in modo non ambiguo quali sono i suoi elementi (questo può essere fatto elencandoli oppure fornendo un criterio che permetta di stabilire se un elemento fa parte o no dell'insieme. La frase "l'insieme dei mesi dell'anno" definisce correttamente l'insieme i cui elementi sono gennaio, febbraio e marzo. La frase "l'insieme formato dalle mamme e dai papà dei bambini in una scuola X" definisce anch'essa in modo corretto un insieme; invece le frasi "l'insieme delle grandi città", "l'insieme dei pesci più belli", "l'insieme degli studenti più intelligenti", non definiscono correttamente degli insiemi, perché non permettono di individuare in modo certo rispettivamente le città, i pesci e le persone che li compongono.

Se si deve rappresentare un insieme, elencandone gli elementi, si scrivono i suoi elementi tra parentesi graffe (gli elementi vanno separati uno dall'altro con una virgola oppure con un punto e virgola. Esempio se l'insieme è costituito dagli elementi 1 , 2 e 3 si scrive A = { 1,2,3 } oppure A = { 1;2;3 }. Si noti che { 1,2,3 } e { 2,1,3 } rappresentano lo stesso insieme: infatti l'*ordine* secondo il quale vengono elencati gli elementi non è importante ai fini di caratterizzare l'insieme. *D*ato l'insieme C = { 2,4,8 } per indicare che 2 è un elemento di C si dice che "2 appartiene a C" e si scrive $2 \in C$ invece per indicare che "2 non appartiene a C" si scrive $2 \notin C$. In generale, scrivendo $a \in C$ si indica che a è un elemento dell'insieme C; invece $b \notin C$ indica che b non appartiene all'insieme C.

Consideriamo l'insieme: **A costituito da tutti i triangoli aventi quattro lati.**

Si nota facilmente che l'insieme è privo di elementi in quanto non esistono triangoli con quattro lati: l'insieme A è detto, in questo caso, insieme vuoto. Un **insieme vuoto** si indica con il simbolo $\varnothing$**.**

Un **insieme** si dice **finito** se è possibile **elencare** tutti i suoi elementi, altrimenti si dice **infinito**.

Gli insiemi **A = { 1, 2, 3, 4 } e B = { a, b, c, d, e, f, g, h }** sono insiemi **finiti.**

Gli insiemi **N** (numeri naturali), **Q** (numeri razionali) sono insiemi **infiniti**.

OPERAZIONI TRA INSIEMI

INSIEME UNIONE

Si dice "insieme unione di A e B" (e si legge "A unione B") e si indica con $A \cup B = \{x \mid x \in A \quad o \quad x \in B\}$. L'insieme costituito dagli elementi di A e dagli elementi di B presi tutti una sola volta.

Esempio: A={1, 3, 5, 7}, B={1, 3, 6, 9} allora $A \cup B = \{1,3,5,6,7,9\}$.

INSIEME INTERSEZIONE

Si dice insieme intersezione di A e B (e si legge A intersezione B) e si indica con: $A \cap B = \{ x \ / \ (x \in A) \wedge (x \in B) \}$ l'insieme costituito dagli elementi che appartengono sia ad A che a B (presi una sola volta).

Esempio: A={1, 3, 5, 7}, B={1, 3, 6, 9} allora $A \cup B = \{1,3\}$.

INSIEMI DISGIUNTI

A e B si dicono disgiunti se $A \cap B = \phi$ cioè se A e B non hanno alcun elemento in comune.

INSIEME DIFFERENZA

Si dice insieme differenza di A e B (si legge A meno B) e si indica con:
$A - B = \{ x \ / (x \in A) \wedge (x \notin B) \}$ L'insieme di tutti e soli gli elementi che appartengono ad A ma non a B.

Esempio: A={1, 3, 5, 7}, B={1, 3, 6, 9} allora $A - B = \{5, 7\}$ dagli elementi di A sono stati tolti quelli che appartengono anche a B.

INSIEME COMPLEMENTARE

Se B è un sottoinsieme di A si dice complementare di B rispetto ad A l'insieme A-B, l'insieme costituito dagli elementi di A non appartenenti al sottoinsieme B.

Un insieme può essere rappresentato, oltre che attraverso l'elencazione dei suoi elementi anche mediante la descrizione di una o più caratteristiche che accomunano i suoi elementi. Per esempio

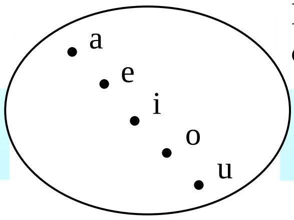
A = { x | x è una lettera dell'alfabeto inglese}

B = { *x* | *x* ϵ N *e* *x*<5}

Le rappresentazioni si leggono in questo modo: A è l'insieme degli elementi x tale che x è una lettera dell'alfabeto inglese, B è l'insieme degli elementi x tale x appartenga ai naturali minori di 5. La lettera *x*, quindi, funziona da variabile, potendo assumere i "valori" riportati dopo il simbolo " **|** ", simbolo logico che si legge **tale che**.

Un altro modo di rappresentare un insieme è costituito da una rappresentazione grafica mediante i **diagrammi di Eulero-Venn**; Questa modalità è usata soprattutto per illustrare le relazioni e le operazioni fra gli elementi degli insiemi e consiste nel riportare dentro una figura, di solito un ovale o un cerchio, gli elementi degli insiemi.

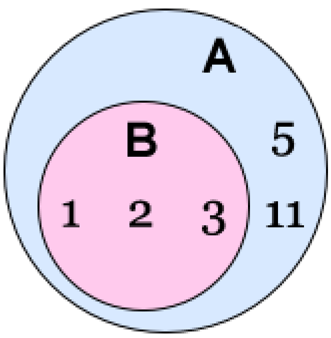
Esempi di diagrammi di Eulero-Venn:



Insieme delle vocali dell'alfabeto italiano

SOTTOINSIEMI

Consideriamo i due insiemi **A = { 1,2,3,5,11 }** e **B = { 1,2,3 }**



Esaminando la figura, si nota che ogni elemento dell'insieme B è anche un elemento dell'insieme **A**: allora diremo che "B è un sottoinsieme di A" e scriveremo $B \subseteq A$.

Il simbolo $\subseteq$ viene detto simbolo di inclusione.

Casi particolari:

- ogni insieme è un sottoinsieme di se stesso;
- ogni insieme ha come sottoinsieme l'insieme vuoto.

NUMERI CARDINALI

Sin dalle sue origini, l’uomo ha sentito l’esigenza di contare gli oggetti di un certo insieme. Ad esempio, è certamente importante per un pastore sapere quante sono le pecore del suo gregge. Ammesso che il numero cardinale di questi animali sia 50, il pastore potrà mettersi subito alla ricerca di quelle pecore che al momento del rientro all’ovile, risultassero eventualmente mancanti rispetto al numero 50. Dunque, si impiega un opportuno numero cardinale n ogni volta che si vuole indicare la quantità di elementi di un dato insieme. In aritmetica l’aggettivo **cardinale** definisce il numero che indica la quantità di oggetti contenuti in un insieme finito, detto anche **potenza dell’insieme**. I numeri cardinali finiti sono anche detti numeri naturali e il loro insieme è dunque : N = { 0, 1, 2, 3, ... }.

NUMERI NATURALI: INSIEME N

I numeri naturali sono : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ... Essi sono nati dall’attività del contare, che permette di specificare “quanti sono” gli elementi di un insieme;ciascun numero naturale esprime la cardinalità di un insieme, e cioè quanti sono gli elementi che compongono l’ insieme.

Il numero 1 indica la cardinalità di un insieme con un solo elemento, 3 quella di ogni insieme costituito da una terna e così via. Lo 0 indica la cardinalità dell’insieme vuoto. I numeri naturali hanno anche un ordine. Dati più numeri naturali diversi, è sempre possibile determinare se ognuno di essi è minore oppure maggiore degli altri. Per indicare questa relazione usiamo il simbolo < (minore) ed il simbolo > (maggiore). Ad esempio dati i numeri 5, 8, 13 possiamo scrivere: 8 < 13 oppure 13 > 5.

Di ogni numero naturale, escluso lo 0, esistono sia il precedente che il successivo. Per ottenere il precedente di un numero naturale occorre sottrarre 1 a quel numero; per ottenere il successivo occorre aggiungere 1 a quel numero.

ALTRI INSIEMI NUMERICI

Alcuni insiemi numerici hanno un ruolo particolarmente importante perché si usano in tutte le branche della matematica:

- L’insieme $\mathbb{N}$ dei **numeri naturali**
- L’insieme $\mathbb{Z}$ dei **numeri interi**, in cui vengono considerati sia i numeri naturali positivi che quelli negativi, cioè gli stessi numeri ai quali viene messo davanti il segno “-”.
- L’insieme $\mathbb{Q}$ dei **numeri razionali** costituiti da tutti i numeri che possono essere rappresentati come rapporto tra due numeri interi (con il denominatore diverso da zero).
- L’insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali può essere definito per ampliamento a partire dall’Insieme $\mathbb{Q}$. Infatti i numeri reali sono tutti i numeri decimali che possono essere rappresentati da una sequenza qualsiasi di cifre una virgola ed un segno (+ o -), oppure da numeri la cui rappresentazione decimale non ha termine perché: le cifre si ripetono periodicamente (come -0,33333333... e 20,3434343434, nel qual caso si chiamano periodici), oppure dove la sequenza dei numeri mostra un qualsiasi tipo di regolarità come , ad esempio, nel numero 0.101001000100001... oppure, infine, quando non vi sono irregolarità nella sequenza come nel famoso π, pi greco che vale circa 3.14159265...; esso indica il rapporto fra circonferenza e diametro in una qualsiasi circonferenza.
- L’insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, costituito dall’insieme dei numeri reali e dall’insieme dei numeri immaginari, definiti come numeri reali moltiplicati per un entità detta “unità immaginaria” i , definita come quell’unità tale che: i2=-1. Più in generale, un numero complesso è una espressione del tipo a+ib, dove i è l’unità immaginaria e a, b sono numeri reali.

Questi insiemi sono contenuti ciascuno nell’altro, secondo il seguente ordine:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$