Il comportamento della funzione agli estremi del campo di esistenza

Calcoliamo i limiti relativi agli estremi del campo di esistenza. Analizziamo i 4 casi dei limiti:

1. **Limite finito per x che tende ad un valore finito**

Si dice che una funzione f (x) ha per limite il numero reale l per x che tende a x_0 , e si scrive :

$\lim_{x \to x_0} f (x) = l$

Quando comunque si scelga un numero reale positivo ε si può determinare un intorno completo I di x_0 tale che risulti

| f (x) – l | < ε

Per ogni x appartenente a I, diverso da x_0 .

Spesso si prende come intorno di x_0 un intorno circolare I_δ (x_0) e quindi la definizione precedente si può formulare cosi:

∀ ε > 0 ∃ δ_ε > 0 tale che ∀ x con | x - x_0 | < δ_ε , | f (x) – l | < ε

2. **Il limite finito per x che tende ad un valore infinito**

x tende a + ∞

Si dice che una funzione f (x) tende al numero reale l per x che tende a + ∞ e si scrive:

$\lim_{x \to +\infty} f (x) = l$

Quando comunque si scelga un numero reale positivo ε si può determinare un intorno I di + ∞ tale che :

| f (x) – l | < ε per ogni x ∈ I.

Considerato che un intorno di + ∞ è costituito da tutti gli x maggiori di un numero reale c, possiamo dire che $\lim_{x \to +\infty} f (x) = l$ se :

∀ ε > 0 ∃ c > 0 tale che ∀ x > c, | f (x) – l | < ε .

x tende a - ∞

Si dice che una funzione f (x) ha il limite reale l per x che tende a - ∞ e si scrive:

$\lim_{x \to -\infty} f (x) = l$

Se per ogni ε > 0 fissato è possibile trovare un intorno I di - ∞ tale che risulti:

| f (x) – l | < ε per ogni x ∈ I.

Si possono riassumere i due casi precedenti in un unico caso, se si considera un intorno di ∞ determinato dagli x per i quali:

| x | > c, ossia x < - c v x > c

O anche x ∈] - ∞ ; - c [U] c ; + ∞ [, dove c è un numero reale positivo grande a piacere. Data questa definizione possiamo di che x tende a ∞ omettendo il segno + o - .

Si dice che $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$ **quando per ogni ε > 0 è possibile trovare un intorno I di ∞ tale che | f (x) – l | < ε per ogni x ∈ I.**

3. **Limite infinito per x che tende ad un valore finito 6**

+ ∞

Sia f (x) una funzione non definita in x_0 .
Si dice che f (x) tende a + ∞ per x che tende a x_0 e si scrive:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

Quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno completo I di x_0 tale che risulti:

f (x) > M

per ogni x appartenente a I e diverso da x_0 .

Possiamo prendere come intorni di x_0 degli intorni circolari e quindi dire che $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ se:

∀ M > 0 ∃ δ_M > 0 tale che ∀ x con | x - x_0 | < δ_M , f (x) > M.

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, si dice anche che la funzione f diverge positivamente.

Quando, nella definizione appena data, diciamo “per ogni numero reale positivo M “ intendiamo valori di M che diventano sempre più grandi. Diremo allora che M è preso grande a piacere.

Se prendiamo M più grande, I esiste ancora e risulta più piccolo. Se scegliamo un valore di M sempre più grande, si può verificare che I diventa abbastanza piccolo tale che f (x) superi M.

- ∞

Sia f (x) una funzione non definita in x_0
Si dice che f (x) tende a - ∞ per x che tende a x_0 e si scrive:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

Quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno completo I di x_0 tale che risulti:

f (x) < - M

per ogni x appartenente a I e diverso da x_0.

$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ si dice che la funzione f diverge negativamente.

In generale quando scriviamo $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ intendiamo dire che f diverge, ma non importa specificare se positivamente o negativamente.

La definizione di $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ è :

per ogni M > 0, è possibile trovare un intorno I di x_0 tale che | f (x) | > M, per ogni x ∈ I nel dominio di f, con x ≠ x_0 .

La disequazione | f (x) | > M si può scrivere in modo equivalente come:

f (x) > M v f (x) < - M

e quindi le sue soluzioni sono l'unione delle soluzioni delle singole disequazioni.

4. **Limite infinito per x tendente ad un valore infinito**

Limite + ∞ di una funzione per x che tende a + ∞

Si dice che la funzione f (x) ha per limite + ∞ per x che tende a + ∞ e si scrive:

$\lim_{x \to +\infty} f (x) = +\infty$

Quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno I di + ∞ tale che risulti:

f (x) > M per ogni x ∈ I.

Limite + ∞ di una funzione per x che tende a - ∞

Si dice che la funzione f (x) ha per limite + ∞ per x che tende a - ∞ e si scrive:

$\lim_{x \to -\infty} f (x) = +\infty$

Quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno I di - ∞ tale che risulti:

f (x) > M per ogni x ∈ I.

Limite - ∞ di una funzione per x che tende a + ∞

Si dice che una funzione f (x) ha per limite - ∞ per x che tende a + ∞ e si scrive:

$\lim_{x \to +\infty} f (x) = -\infty$

Quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno I di + ∞ tale che risulti:

f (x) < - M per ogni x ∈ I.

Limite - ∞ di una funzione per x che tende a - ∞

Si dice che una funzione f (x) ha per limite - ∞ per x che tende a - ∞ e si scrive:

$\lim_{x \to -\infty} f (x) = -\infty$

Quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno I di - ∞ tale che risulti:

f (x) < - M per ogni x ∈ I.