

Studio di funzione

Per eseguire lo studio di una funzione e successivamente tracciarne il grafico bisogna sviluppare i seguenti punti:

- dominio o campo di esistenza;
- intersezioni con gli assi;
- segno della funzione;
- simmetrie;
- asintoti;
- crescita, decrescenza, massimi e minimi;
- concavità e punti di flesso;

Eseguiamo lo studio della funzione

$$y = x^4 - 2x^2$$

dominio o campo di esistenza:

la funzione essendo razionale intera è definita $\forall x \in \mathbb{R}$;

intersezioni con gli assi:

per determinare le intersezioni con l'asse delle x bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = x^4 - 2x^2 \\ y = 0 \end{cases} \text{ che ha per soluzioni } (0,0), (-\sqrt{2},0) \text{ e } (\sqrt{2},0);$$

le intersezioni con l'asse delle y si determinano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = x^4 - 2x^2 \\ x = 0 \end{cases} \text{ che ammette come soluzione } (0,0)$$

segno della funzione:

il segno si trova risolvendo la disequazione

$$x^4 - 2x^2 > 0$$

le cui soluzioni sono $x < -\sqrt{2}$ e $x > \sqrt{2}$, la funzione è positiva per questi valori, è negativa per $-\sqrt{2} < x < 0$ e $0 < x < \sqrt{2}$;

simmetrie:

dato che $f(x)=f(-x)$, la funzione è simmetrica rispetto all'asse y (pari);

asintoti:

la funzione, essendo razionale intera, non ha asintoti,

crescenza, decrescenza, massimi e minimi relativi

gli intervalli di crescita si determinano imponendo la derivata prima maggiore di zero,

$$y' = 4x^3 - 4x$$

$$y' > 0$$

$$4x^3 - 4x > 0$$

le soluzioni di questa disequazione sono $-1 < x < 0$ e $x > 1$, la funzione quindi cresce per questi valori, decresce per $x < -1$ e $0 < x < 1$;

di conseguenza -1 e 1 sono dei minimi relativi, 0 un massimo relativo;

le ordinate sono $f(-1) = -1$, $f(1) = -1$, $f(0) = 0$;

Concavità e punti di flesso:

bisogna imporre la derivata seconda maggiore di zero

$$y'' = 12x^2 - 4;$$

$$y'' > 0;$$

$12x^2 - 4 > 0$ ha per soluzioni $x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$, per questi valori la funzione

volge la concavità verso l'alto, per $-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$ la volge verso il basso,

$x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ sono punti di flesso le cui ordinate valgono

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{ e } f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Mettendo insieme tutte le informazioni trovate, si può tracciare il seguente grafico



