

Formule di bisezione

Le formule di bisezione nascono dall'esigenza di determinare le funzioni goniometriche di angoli che sono la metà di α .

Per il loro calcolo si utilizza un procedimento che sfrutta quelle di duplicazione.

$$\cos \alpha = \cos 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2},$$

ora se si esprime il coseno in funzione del seno, l'uguaglianza si può scrivere:

$$\cos \alpha = \cos 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = 1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2},$$

da cui:

$$\cos \alpha = 1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Sommando i termini simili, trasportando il seno al primo membro e il coseno al secondo si ottiene:

$$2\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha, \text{ e quindi:}$$

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}.$$

Con un procedimento simile si ricava il coseno.

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}.$$

La tangente invece si determina tramite la formula che esprime il suo valore in funzione di seno e coseno.

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

Esercizio

Calcolare il valore delle funzioni goniometriche di un angolo di 15° .

$$\operatorname{sen} 15^\circ = \operatorname{sen} \frac{30^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}};$$

$$\cos 15^\circ = \cos \frac{30^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}};$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg} \frac{30^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{3})^2}{4 - 3}} = 2 - \sqrt{3}.$$