Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Un filo metallico di lunghezza λ viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.

a) Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:

b) la somma delle due aree sia minima?

c) la somma delle due aree sia massima?

Una aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

PROBLEMA 2

Si considerino le funzioni *f* e *g* determinate da $f(x) = \log x$ e $g(x) = ax^2$, essendo a un parametro reale e il logaritmo in base *e*.

1. Si discuta, al variare di a, l'equazione $\log x = ax^2$ e si dica, in particolare, per quale valore di a i grafici di *f* e *g* sono tra loro tangenti.
2. Si calcoli, posto $a = -e^2$, l'area che è compresa fra i grafici di f e g (con $x > 0$) nella striscia di piano determinata dalle rette d'equazioni $y = -1$ e $y = -2$.
3. Si studi la funzione $h(x) = \log x - ax^2$ scegliendo per a un valore numerico maggiore di $\frac{1}{2e}$ e se ne disegni il grafico.

Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64ª casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.
2. I poliedri regolari – noti anche come *solidi platonici* – sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?
3. In un piano sono dati una retta r e due punti A e B ad essa esterni ma situati nel medesimo semipiano di origine r. Si trovi il più breve cammino che congiunga A con B toccando r.
4. Si dimostri che l'equazione $\operatorname{sen} x = x - 1$ ha una e una sola radice α e, utilizzando una calcolatrice tascabile, se ne dia una stima. Si descriva altresì una procedura di calcolo che consenta di approssimare α con la precisione voluta.
5. Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n \in N$.
6. L'equazione risolvente un dato problema è: $k\cos 2x - 5k + 2 = 0$ dove k è un parametro reale e x ha le seguenti limitazioni: $15° < x < 45°$. Si discuta per quali valori di k le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.
7. *Bruno de Finetti* (1906-1985), tra i più illustri matematici italiani del secolo scorso, del quale ricorre quest'anno il centenario della nascita, alla domanda: "*che cos'è la probabilità?*" era solito rispondere: "*la probabilità non esiste!*". Quale significato puoi attribuire a tale risposta? E' possibile collegarla ad una delle diverse definizioni di probabilità che sono state storicamente proposte?
8. Un tiratore spara ripetutamente ad un bersaglio; la probabilità di colpirlo è di 0,3 per ciascun tiro. Quanti tiri deve fare per avere probabilità $\geq 0{,}99$ di colpirlo almeno una volta?
9. Della funzione $f(x)$ si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che: $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. Puoi determinare $f(x)$?
10. Tenuto conto che:
$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$
calcola un'approssimazione di π utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Un filo metallico di lunghezza λ viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.

a) Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:

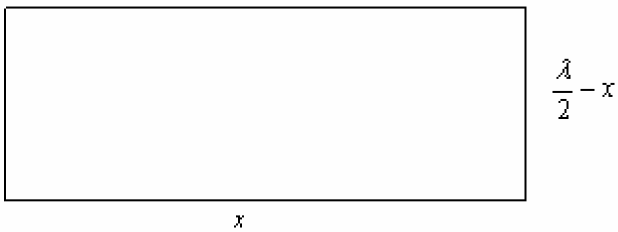
b) la somma delle due aree sia minima?

c) la somma delle due aree sia massima?

Una aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

SOLUZIONE DI DE ROSA NICOLA

a)



L'area è:

$$A(x) = x*\left(\frac{\lambda}{2} - x\right) = \frac{\lambda x}{2} - x^2, 0 \le x \le \frac{\lambda}{2}$$

Calcoliamo la derivata prima e seconda :

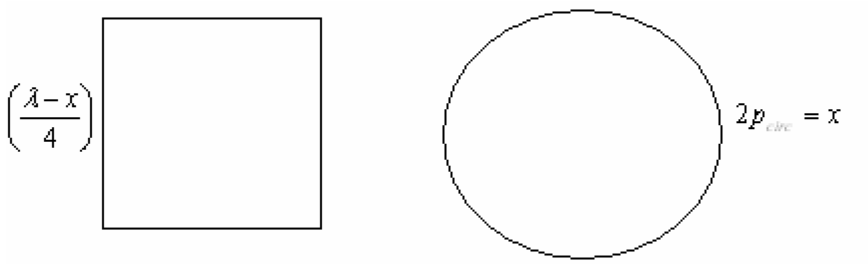
$$A^I(x) = \frac{\lambda}{2} - 2x > 0 \rightarrow x < \frac{\lambda}{4}$$

$$A^{II}(x) = -2 < 0 \forall x \rightarrow x = \frac{\lambda}{4} \text{ è l'ascissa del massimo, per cui}$$

$$A_{max} = A(x_{max}) = A\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{\lambda^2}{16} \text{ cioè l'area massima la si ha in corrispondenza di un quadrato}$$

Ora suddividiamo il perimetro in due:

$2p_{circ} = x$ è il perimetro dell'aiuola circolare e $2p_q = \lambda - x$ quello del quadrato



Con queste convenzioni si ha che il lato del quadrato è $\left(\frac{\lambda - x}{4}\right)$ per cui l'area è $A_q(x) = \left(\frac{\lambda - x}{4}\right)^2$

mentre il raggio del cerchio sarà $\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ per cui l'area sarà $A_c(x) = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = \frac{x^2}{4\pi}$

per cui l'area totale sarà

$$A_{tot}(x) = \left(\frac{\lambda - x}{4}\right)^2 + \frac{x^2}{4\pi}, 0 \le x \le \lambda$$

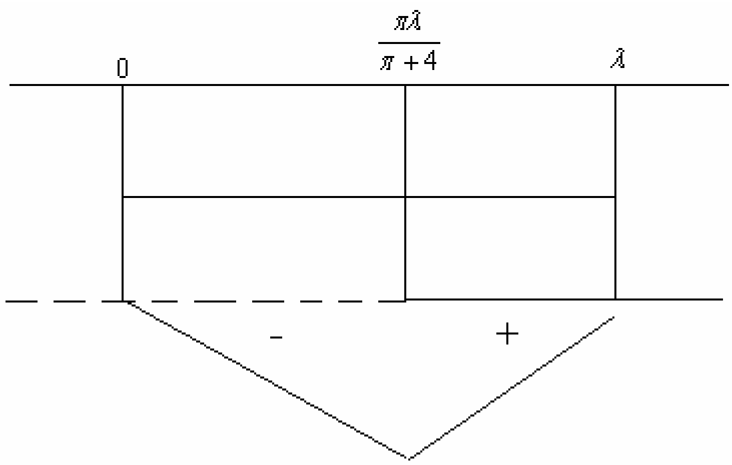
b)

Ora si calcolano le derivate della funzione $A_{tot}(x)$:

$$A_{tot}^{I}(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda - x}{4}\right) + \left(\frac{x}{2\pi}\right) = \left(\frac{x - \lambda}{8}\right) + \left(\frac{x}{2\pi}\right) = \frac{x(\pi + 4) - \pi\lambda}{8\pi} > 0 \rightarrow x > \frac{\pi\lambda}{\pi + 4}$$

$$A_{tot}^{II}(x) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi} > 0$$

La situazione è sotto rappresentata:



Dal grafico soprastante si evince che l'area minima la si ha per $x=\frac{\pi\lambda}{\pi+4}$ in corrispondenza della quale si ricava

$$A_{tot,\min}=A\left(\frac{\pi\lambda}{\pi+4}\right)=\left(\frac{\lambda-\frac{\pi\lambda}{\pi+4}}{4}\right)^2+\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\pi\lambda}{\pi+4}\right)^2=\frac{\lambda^2}{(\pi+4)^2}+\frac{\lambda^2\pi}{4(\pi+4)^2}=\frac{\lambda^2(\pi+4)}{4(\pi+4)^2}=\frac{\lambda^2}{4(\pi+4)}$$

c)

Vediamo l'area massima: in tal caso il massimo lo si raggiunge agli estremi dell'intervallo cioè per $x=0, x=\lambda$.

Ora

$$A_{tot}(x=0)=\frac{\lambda^2}{16},$$
$$A_{tot}(x=\lambda)=\frac{\lambda^2}{4\pi}>\frac{\lambda^2}{16}=A_{tot}(x=0)$$

Per cui l'area massima la si ha per $x=\lambda$ ed è $A_{tot,\max}=\frac{\lambda^2}{4\pi}$

d)

Il volume di un parallelepipedo è dato dal prodotto delle tre dimensioni, cioè

$$V_{parallelepipedo}=l_1 l_2 l_3$$

Se si aumentano le dimensioni del 10% si ha:

$$V'_{parallelepipedo}=1.1l_1*1.1l_2*1.1l_3=1.331*l_1l_2l_3=1.331V_{parallelepipedo}$$

Per cui l'incremento percentuale del volume è del 33.1%.

PROBLEMA 2

Si considerino le funzioni *f* e *g* determinate da $f(x)=\log x$ e $g(x)=ax^2$, essendo a un parametro reale e il logaritmo in base e.

1. Si discuta, al variare di a, l'equazione $\log x = ax^2$ e si dica, in particolare, per quale valore di a i grafici di *f* e *g* sono tra loro tangenti.
2. Si calcoli, posto $a=-e^2$, l'area che è compresa fra i grafici di f e g (con $x>0$) nella striscia di piano determinata dalle rette d'equazioni $y=-1$ e $y=-2$.
3. Si studi la funzione $h(x)=\log x - ax^2$ scegliendo per a un valore numerico maggiore di $\frac{1}{2e}$ e se ne disegni il grafico.

SOLUZIONE DI **De Rosa Nicola**

1)

Per essere tangenti le due funzioni devono avere la stessa tangente in (x_0, y_0)

L'equazione di tale tangente è: $y - y_0 = m(x - x_0)$

Ora bisogna imporre l'uguaglianza tra i due coefficienti angolari ricavati tramite la derivata delle due funzioni in x_0

$$m = f'(x_0) = g'(x_0) \Rightarrow \frac{1}{x_0} = 2ax_0 \Rightarrow a = \frac{1}{2x_0^2} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2$$

Inoltre poichè (x_0, y_0) appartiene ad entrambe deve aversi che

$$f(x_0) = g(x_0) \Rightarrow \ln(x_0) = 0.5 \Rightarrow x_0 = \sqrt{e} \Rightarrow \mathbf{a} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2e}}$$

Ora facciamo qualche considerazione :

se a > $\frac{1}{2e}$ **le intersezioni non esistono**

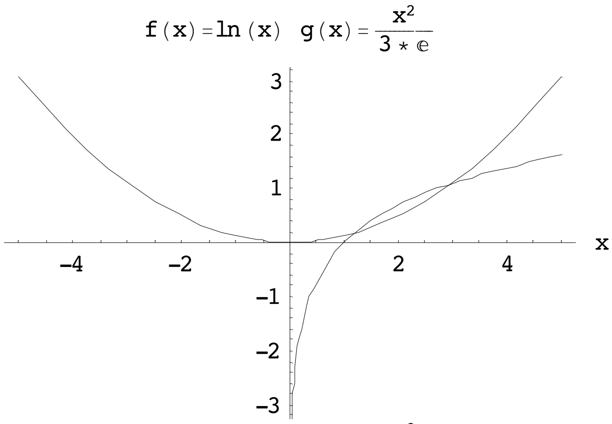
se 0 < a < $\frac{1}{2e}$ **le intersezioni esistono e sono due**

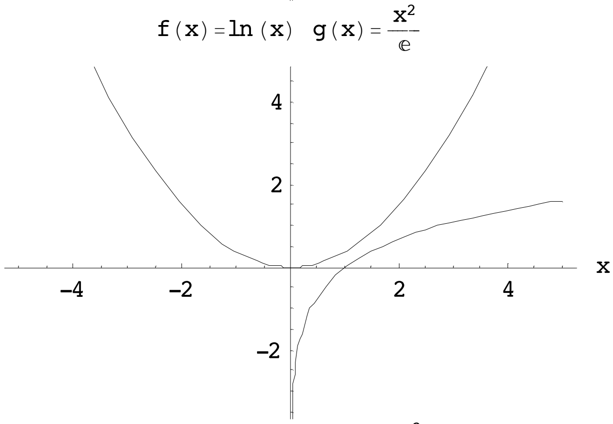
se a < 0 esiste una sola intersezione

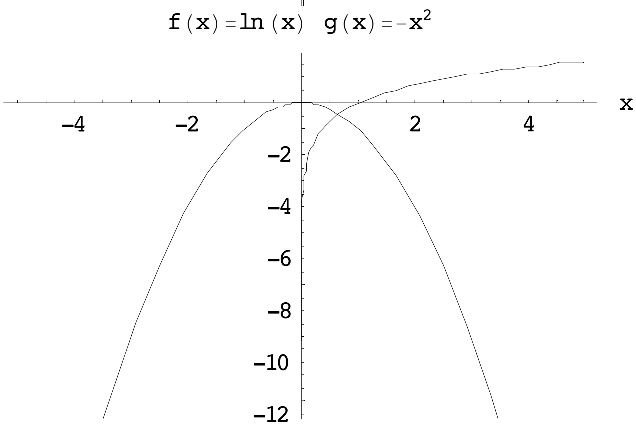
Infatti se **a >** $\frac{1}{2e}$ **> 0** la parabola g(x) corrispondente si stringe sempre di più, si allontana rapidamente dalla funzione f(x) visto che il valore di a è positivo, ed al limite per $a \to +\infty$ diventa un impulso centrato in $x = 0$

Se **a < 0** la parabola cambia concavità, sarà ora rivolta verso il basso e l'intersezione corrispondente sarà una sola

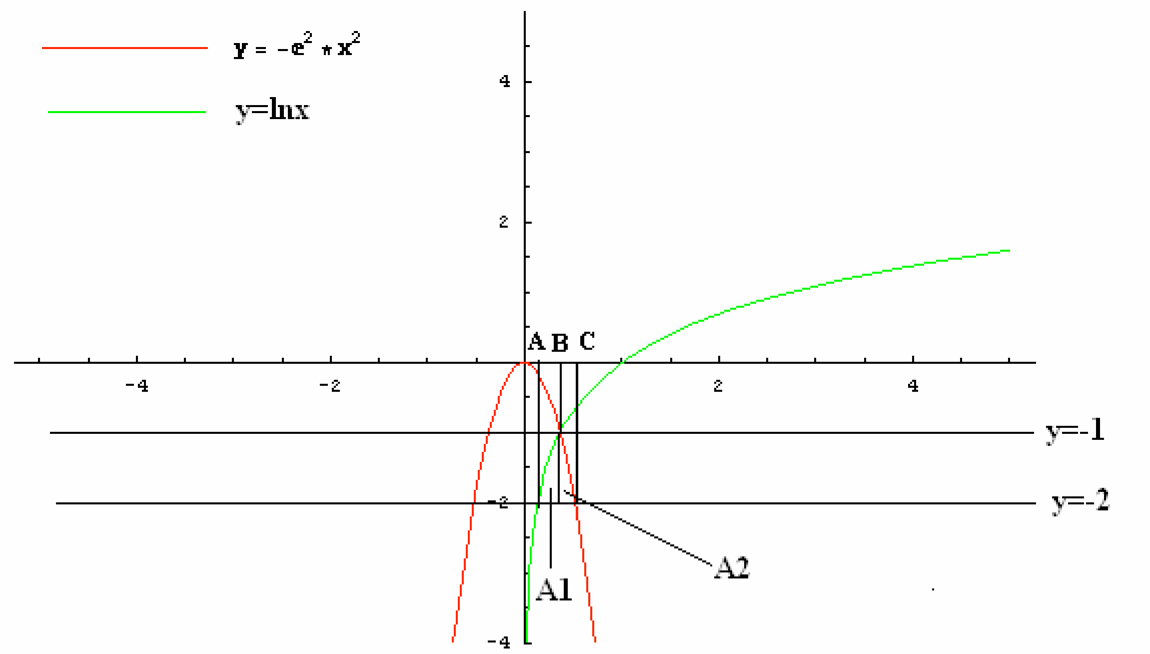
Come esempio presentiamo tre casi ed i corrispondenti grafici dati dalla sovrapposizione dei grafici di *f(x) e g(x)* rispettivamente per $a = \frac{1}{3e}, \frac{1}{e}, -1$


$f(x)=\ln(x) \quad g(x)=\frac{x^2}{3*e}$
x
−4
−2
2
4
3
2
1
−1
−2
−3


$f(x)=\ln(x) \quad g(x)=\frac{x^2}{e}$
x
−4
−2
2
4
4
2
−2


$f(x)=\ln(x) \quad g(x)=-x^2$
x
−4
−2
2
4
−2
−4
−6
−8
−10
−12

2)
Consideriamo la figura seguente:



Calcoliamo innanzitutto i punti A,B,C:

Punto A: $\begin{cases} y = \ln x \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow x_A = e^{-2}$

Punto B: $\begin{cases} y = \ln x \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow x_B = e^{-1}$

Punto C: $\begin{cases} y = -e^2 x^2 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow x_C = e^{-1}\sqrt{2}$

Prima di calcolare l'area di interesse bisogna richiamare il calcolo dell'integrazione per parti applicato al nostro caso:

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - \int x * \left(\frac{d(\ln(x))}{dx}\right)dx = x\ln(x) - \int x * \frac{1}{x}dx =$$
$$x\ln(x) - \int dx = x\ln(x) - x + K = x(\ln(x) - 1) + K$$

L'area cercata è :

$$\mathbf{A} = A_1 + A_2 = \int_{e^{-2}}^{e^{-1}} [\ln(x) + 2]dx + \int_{e^{-1}}^{e^{-1}\sqrt{2}} (2 - e^2 x^2)dx =$$

$$[x(\ln(x) - 1) + 2x]_{e^{-2}}^{e^{-1}} + \left[2x - \frac{e^2 x^3}{3}\right]_{e^{-1}}^{e^{-1}\sqrt{2}} = [x\ln(x) + x]_{e^{-2}}^{e^{-1}} + \left[2x - \frac{e^2 x^3}{3}\right]_{e^{-1}}^{e^{-1}\sqrt{2}}$$

$$= [x(\ln(x) + 1)]_{e^{-2}}^{e^{-1}} + \left[2x - \frac{e^2 x^3}{3}\right]_{e^{-1}}^{e^{-1}\sqrt{2}} =$$

$$e^{-2} + 2e^{-1}\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}e^{-1}}{3} - 2e^{-1} + \frac{e^{-1}}{3} = \mathbf{e^{-2} + e^{-1}\left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{5}{3}\right)}$$

3)

$h(x) = \ln(x) - ax^2$

Dominio : $x \in (0,+\infty)$

Non ci sono intersezioni con gli assi, nè x nè y dal momento che $a > \frac{1}{2e}$

Positività : $h(x) < 0 \ \forall x \in (0,+\infty)$ dal momento che $\ln(x)$ sta sempre al di sotto della parabola

Asintoti verticali : x = 0

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = -\infty$$

Non ci sono asintoti orizzontali. Infatti

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x}{e^{ax^2}}\right) = \ln\left[\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x}{e^{ax^2}}\right)\right] = \ln(0) = -\infty$$ sfruttando de l'Hopital ed essendo $a > \frac{1}{2e} > 0$

Non ci sono asintoti obliqui. Infatti

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} = -\infty$$

Crescenza e decrescenza :

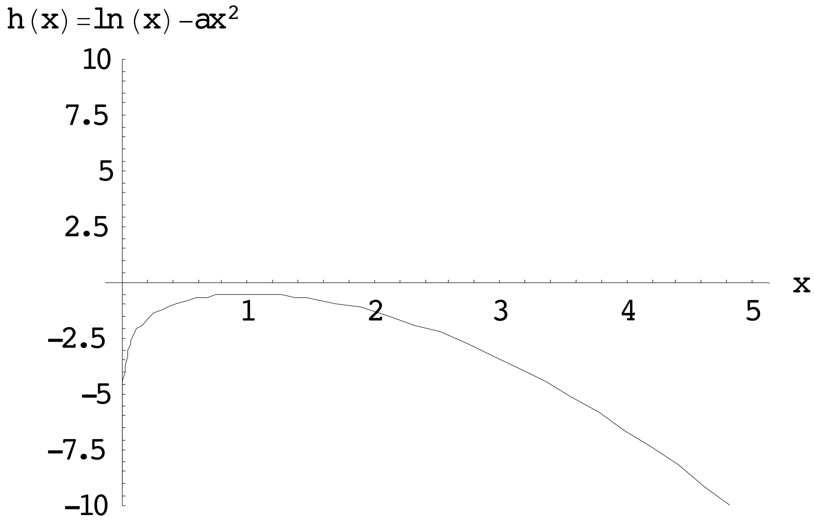
$$h'(x) = \frac{1}{x} - 2ax = \frac{1 - 2ax^2}{x}$$

$$h'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2a}}\right)$$

$$h''(x) = -\frac{1}{x^2} - 2a,\ h''\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right) = -4a < 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2a}}, \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right) - 0.5\right)$$ è un massimo

Inoltre poichè per ipotesi $a > \frac{1}{2e} > 0$, allora $h''(x) < 0 \ \forall x \in D = (0, +\infty) \Rightarrow$ non ci sono flessi

Il grafico è questo:



Se scegliamo ad esempio $a=1/2$, allora il massimo è (1,-0.5).
Al crescere del valore a, l'ascissa del massimo si sposta e tende a diventare sempre più piccola

SOLUZIONI DI De Rosa Nicola

QUESTIONARIO

1. Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64^a casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.

Soluzione

Il numero N dei chicchi di grano è:

$$N = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63} = \sum_{n=0}^{63} 2^n$$

Siamo quindi in presenza di una serie geometrica di ragione 2.

Ricordando che una serie geometrica di ragione q ha somma $\sum_{n=0}^{M} q^n = \frac{q^{M+1}-1}{q-1}$, in tal caso si ha

$$N = \sum_{n=0}^{63} 2^n = \frac{2^{64}-1}{2-1} = 2^{64}-1$$

Quindi il peso degli $N = 2^{64}-1$ è

$$P = \frac{\left(2^{64}-1\right)}{1000} * 38 \text{ grammi} = \frac{\left(2^{64}-1\right)}{1000} * 38 * 10^{-6} \text{ tonnellate} = \frac{\left(2^{64}-1\right)}{10^9} * 38 \text{ tonnellate}$$

2. I poliedri regolari – noti anche come *solidi platonici* – sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?

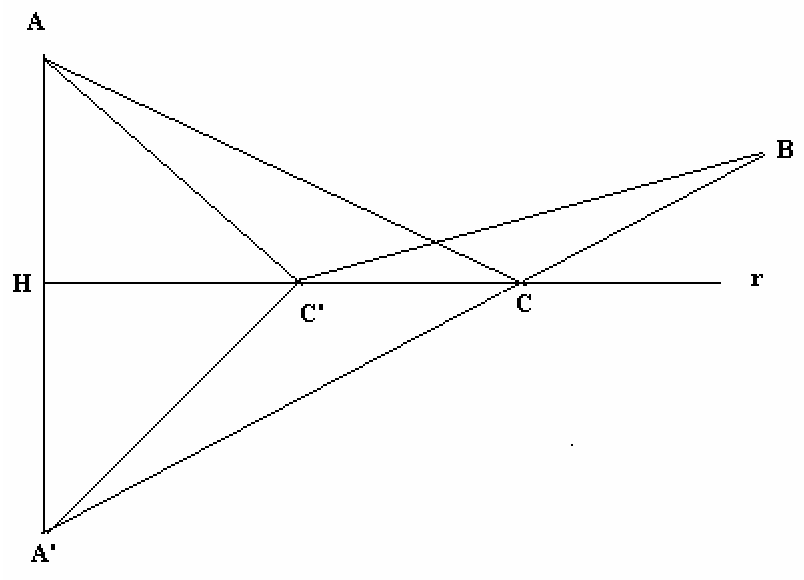
Soluzione

Un poliedro si dice regolare se le sue facce sono poligoni regolari congruenti e i suoi angoloidi sono congruenti tra loro. La somma degli angoli di una faccia dell'angoloide è minore di un angolo giro. e le facce sono triangoli equilateri si possono avere tre tipi di poliedri: infatti 3*60°=180°, 4*60°=240°, 5*60°=300°; se le facce sono quadrati si può avere un solo poliedro perché 3*90°=270°; se sono pentagoni si può avere un solo poliedro perché 3*108°=324°.
Si dimostra che tali poliedri esistono.

3. In un piano sono dati una retta r e due punti A e B ad essa esterni ma situati nel medesimo semipiano di origine r. Si trovi il più breve cammino che congiunga A con B toccando r.

Soluzione

Consideriamo la figura sottostante:



La figura è stata costruita in questo modo: il punto A' è simmetrico di A rispetto ad r, mentre il punto C per cui passa il cammino minimo prima di arrivare a B è dato dall'intersezione della retta r col segmento A'B ed è tale che il cammino sia minimo. Quanto detto ci accingiamo a dimostrarlo per assurdo.
Supponiamo che esista un altro punto C' che minimizzi il cammino da A a B. Allora quello che vogliamo dimostrare è che AC'+C'B>AC+CB.
Infatti per come è stata costruita la figura si ha:

AC'=A'C'
AC=A'C

Da cui

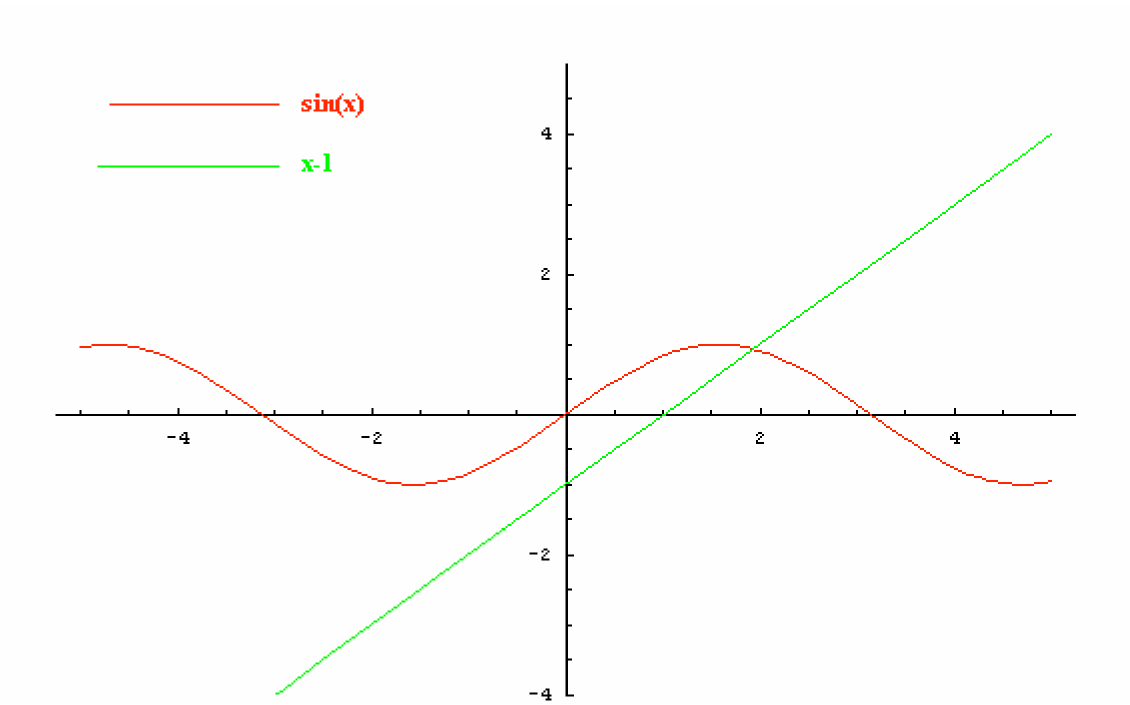
AC'+C'B=A'C'+C'B
A'C+CB=A'B=AC+CB

Ma poiché A'C' e C'B sono due lati del triangolo A'C'B allora la loro somma è maggiore certamente del terzo lato A'B, cioè A'C'+C'B= AC'+C'B >A'B= AC+CB come volevasi dimostrare.

4. Si dimostri che l'equazione $\operatorname{sen} x = x - 1$ ha una e una sola radice α e, utilizzando una calcolatrice tascabile, se ne dia una stima. Si descriva altresì una procedura di calcolo che consenta di approssimare α con la precisione voluta.

Soluzione

L'equazione può essere risolta intersecando le due curve di equazione $f(x) = \sin(x), g(x) = x - 1$
Sappiamo che $-1 \le \sin(x) \le 1$ ed inoltre $g(0) = -1$ e $g(2) = 1$, per cui per il teorema degli zeri gli zeri si troveranno nell'intervallo [0,2]. Infatti considerando la funzione $h(x) = \sin(x) - x + 1$ si ha che essa è continua e derivabile e vale che h(0)=1>0 ed h(2)=sin(2)-1<0.
Per il fatto che lo zero sia unico, basta notare che la funzione
$h(x) = \sin(x) - x + 1$ è una funzione decrescente.Infatti $h'(x) = \cos(x) - 1 \le 0 \forall x$. La conferma la troviamo dal grafico sottostante:



Il valore preciso lo si può trovare applicando il metodo di bisezione. Ad esempio considerando per semplicità di calcolo l'intervallo $[0,\pi]$ (contenente [0,2]) tale metodo, fissata la funzione $h(x) = \sin(x) - x + 1$, consiste nel campionamento della funzione dimezzando ogni volta il passo fino a trovare il valore opportuno.

Cioè

$x_0 = 0 \to h(0) = 1 > 0$

$x_1 = \pi \to h(\pi) = 1 - \pi < 0$

$x_2 = \frac{\pi}{2} \to h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \frac{\pi}{2} > 0$

$x_2 = \frac{3\pi}{4} \to h\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\pi}{4} < 0$

E così via procedendo fino a trovare la soluzione
Il valore approssimato è $\alpha = 1.935$.

5. Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n \in N$.

Soluzione

Ricordiamo la formula del binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

E ponendo in essa a=b=1 si ricava:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n \quad \forall n \in N$$

6. L'equazione risolvente un dato problema è: $k\cos 2x - 5k + 2 = 0$ dove k è un parametro reale e x ha le seguenti limitazioni: $15° < x < 45°$. Si discuta per quali valori di k le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.

Soluzione

Riscriviamo l'equazione risolvente in questo modo:

$$\cos(2x) = \frac{5k-2}{k}$$

Ora, dire 15°<x<45° è equivalente a dire 30°<2x<90°, e poiché il coseno è una funzione decrescente nell'intervallo 30°<2x<90° , allora vale la seguente:

$$30°<2x<90° \rightarrow \cos(90°) < \cos(2x) = \frac{5k-2}{k} < \cos(30°) \rightarrow 0 < \frac{5k-2}{k} < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

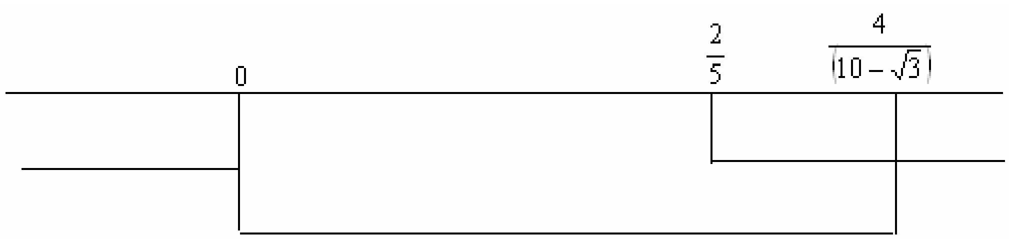
Quindi va risolto il sistema seguente:

$$\begin{cases} \dfrac{5k-2}{k} > 0 \\ \dfrac{5k-2}{k} < \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5k-2}{k} > 0 \\ \dfrac{k\left(10-\sqrt{3}\right)-4}{2k} < 0 \end{cases}$$

Le due disequazioni si risolvono ognuna col classico metodo del falso sistema e le soluzioni sono:

$$\begin{cases} \dfrac{5k-2}{k} > 0 \\ \dfrac{k\left(10-\sqrt{3}\right)-4}{2k} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k < 0 \ \cup \ k > \dfrac{2}{5} \\ 0 < k < \dfrac{4}{\left(10-\sqrt{3}\right)} \end{cases}$$

E prendendo le soluzioni comuni, il sistema è soddisfatto per $\mathbf{\frac{2}{5} < k < \frac{4}{\left(10-\sqrt{3}\right)}}$ come evidenzia la figura sotto



7. *Bruno de Finetti* (1906-1985), tra i più illustri matematici italiani del secolo scorso, del quale ricorre quest'anno il centenario della nascita, alla domanda: "*che cos'è la probabilità?*" era solito rispondere: "*la probabilità non esiste!*". Quale significato puoi attribuire a tale risposta? E' possibile collegarla ad una delle diverse definizioni di probabilità che sono state storicamente proposte?

Soluzione

Il matematico italiano Bruno de Finetti (1906-1985) è uno degli autori della concezione soggetivistica della probabilità in contrapposizione alla teoria frequentista allora dominante. Nel 1931 scrive "Cosa vogliamo dire, nel linguaggio ordinario, dicendo che un fenomeno è più o meno probabile? Vogliamo dire che proveremo un grado più o meno grande di meraviglia apprendendo che quell'avvenimento non si è verificato. Vogliamo dire che ci sentiamo di fare un grado più o meno grande d'affidamento sull'eventualità che esso abbia ad avverarsi" Questo punto di vista solo apparentemente sembrava intraducibile in termini matematici, cioè quantitativi. La seguente definizione invece consente di assegnare un numero compreso tra 0 e 1 alla probabilità di verificarsi di un evento: la probabilità dell'evento E è quel valore p che l'individuo che procede alla valutazione è disposto a pagare per ricevere una vincita unitaria nel caso si verifichi l'evento E. Per esempio, un Tizio che valuta al 60% la possibilità che l'Italia vinca la partita di oggi contro la Repubblica Ceca significa che è disposto a scommettere 60€ in cambio di una vincita di 100€ qualora l'Italia vincesse. Secondo la concezione frequentista la probabilità di un evento è data dalla frequenza relativa osservata su un numero (possibilmente grande) di eventi quanto più possibile analoghi a quello che si deve valutare. Nel caso della partita di calcio Italia - Rep.Ceca questa definizione non avrebbe alcun significato.

8. Un tiratore spara ripetutamente ad un bersaglio; la probabilità di colpirlo è di 0,3 per ciascun tiro. Quanti tiri deve fare per avere probabilità $\geq 0,99$ di colpirlo almeno una volta?

Soluzione

Introduciamo la variabile aleatoria binomiale, usata nella modellizzazione di esperimenti ripetuti. La pmf (funzione massa di probabilità) della v.a binomiale X è:

$$\Pr(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

A noi interessa calcolare $\Pr(X \geq 1)$.

Ma $\Pr(X \geq 1) = 1 - \Pr(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} 0.3^0 (1-0.3p)^{n-0} = 1 - 0.7^n$

La condizione $\Pr(X \geq 1) \geq 0.99 \to 1 - 0.7^n \geq 0.99 \to 0.7^n \leq 0.01$ ed applicando il logaritmo ad ambo i membri e ricordando che in tal caso il segno della disequazione cambia poiché la base del logaritmo è minore di 1 si ha:

$$0.7^n \leq 0.01 \to \ln\left[0.7^n\right] \geq \ln(0.01) \to n \geq \frac{\ln(0.01)}{\ln(0.7)} = 12.911$$

Per cui il primo intero che soddisfa il requisito richiesto è n=13.

9. Della funzione $f(x)$ si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che: $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. Puoi determinare $f(x)$?

Soluzione

La funzione può essere determinata, ed è tra l'altro anche unica. Infatti il problema proposto non è altro che il classico problema di Cauchy

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

che sotto alcune ipotesi, si dimostra fornire un'unica soluzione.
Per calcolarla basta ricordare le equazioni differenziali a variabili separabili: infatti l'equazione differenziale $f'(x) = f(x)$, supponendo $f(x) \neq 0$ si può riscrivere come:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1$$

Ed integrando ambo i membri in dx si ricava:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int dx \text{ cioè } \ln|f(x)| = x + k$$

Quindi il problema iniziale diventa:

$$\begin{cases} \ln|f(x)| = x + k \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Dalla prima, per x=0, si ricava $\ln|f(0)| = k$ e ricordando che la condizione iniziale impone $f(0) = 1$, allora si ricava $k = \ln 1 = 0$, per cui infine si ricava:

$$\ln|f(x)| = x \to |f(x)| = e^x \to f(x) = \pm e^x$$

in cui va scartata la soluzione $f(x) = -e^x$ perché non soddisfa la condizione iniziale.
In conclusione la soluzione esiste, è unica ed è l'autofunzione $f(x) = e^x$

10. Tenuto conto che:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

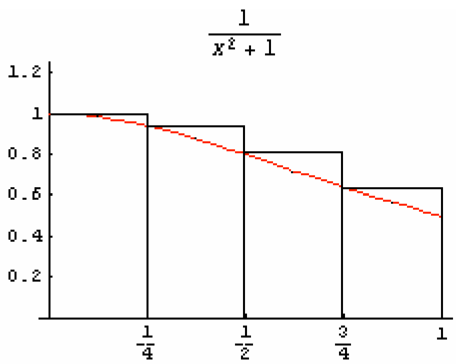
calcola un'approssimazione di π utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

Soluzione

Si può utilizzare l'approssimazione per rettangoli, che si traduce in:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{n}\left[f(x_0) + f(x_1) + \cdots f(x_n)\right]$$

Nel nostro caso utilizzeremo n=4 rettangoli con intervalli uguali come evidenzia la figura sottostante:



Per cui

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \cong \frac{1}{4}\left[1+\frac{1}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}\right] \cong 0.845$$

Valor che si avvicina sempre piu’ al valore effettivo al crescere degli intervalli considerati.