ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE
Tema di: MATEMATICA
a. s. 2007-2008

PROBLEMA 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si considerino i triangoli ABC con $A(1;0), B(3;0)$, e C variabile sulla retta di equazione $y = 2x$.

1. Si provi che i punti $(1;2)$ e $\left(\frac{3}{5};\frac{6}{5}\right)$ corrispondono alle due sole posizioni di C per cui è $A\hat{C}B = \frac{\pi}{4}$
2. Si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto, al variare di C, dall'ortocentro del triangolo ABC. Si tracci γ.
3. Si calcoli l'area Ω della parte di piano limitata da γ e dalle tangenti a γ nei punti A e B.
4. Verificato che $\Omega = \frac{3}{2}(\ln 3 - 1)$ si illustri una procedura numerica per il calcolo approssimato di $\ln 3$.

PROBLEMA 2

Siano f e g le funzioni definite, per ogni x reale, da $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^2$.

1. Si traccino i grafici di f e g e si indichi con A la loro intersezione di ascissa negativa.
2. Si calcoli, con uno dei metodi di approssimazione numerica studiati, l'ascissa di A con due cifre decimali esatte.
3. Quanti e quali sono gli zeri della funzione $h(x) = 2^x - x^2$? Si tracci il grafico di h.
4. Si calcoli l'area racchiusa dal grafico di *h* e l'asse *x* sull'intervallo [2, 4].

QUESTIONARIO

1) Siano dati un cono equilatero e la sfera in esso inscritta. Si scelga a caso un punto all'interno del cono. Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno alla sfera.

2) Ricordando che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio, si provi che $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

3) Un solido ha per base un cerchio di raggio 1. Ogni sezione del solido ottenuta con un piano perpendicolare ad un prefissato diametro è un triangolo equilatero. Si calcoli il volume del solido.

4) Si esponga la regola del marchese de L'Hôpital (1661 – 1704) e la si applichi per dimostrare che è:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2008}}{2^x} = 0$$

5) Nel piano riferito a coordinate cartesiane (x, y) si dica qual è l'insieme dei punti per i quali risulta: $y^2 - x^3 > 0$.

6) I lati di un parallelepipedo rettangolo misurano 8, 9, e 12 cm. Si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'ampiezza dell'angolo che la diagonale mandata da un vertice fa con ciascuno dei tre spigoli concorrenti al vertice.

7) Perché è geometria "non" euclidea? Che cosa e come viene negato della geometria euclidea? Si illustri la questione con gli esempi che si ritengono più adeguati.

8) Sia f la funzione definita da $f(x) = \pi^x - x^\pi$ Si precisi il dominio di f e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x = \pi$.

9) In una classe composta da 12 maschi e 8 femmine, viene scelto a caso un gruppo di 8 studenti. Qual è la probabilità che, in tale gruppo, vi siano esattamente 4 studentesse?

10) Qual è l'equazione della curva simmetrica rispetto all'origine di $y = e^{-2x}$? Quale quella curva simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante?

PROBLEMA 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si considerino i triangoli ABC con $A(1;0), B(3;0)$, e C variabile sulla retta di equazione $y = 2x$.

Punto 1

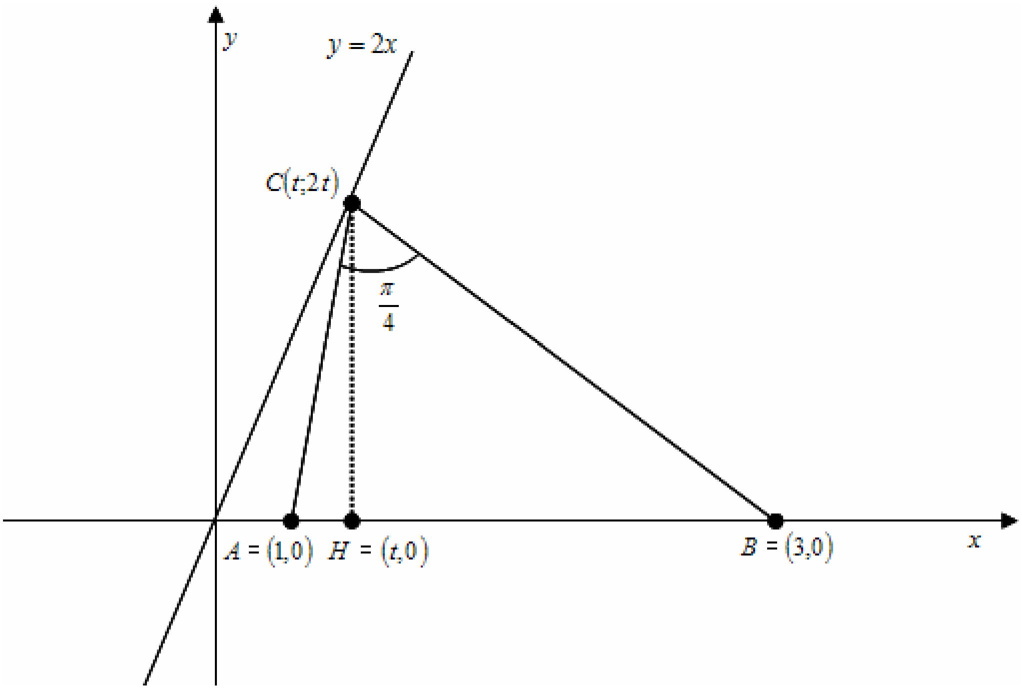
Si provi che i punti $(1;2)$ e $\left(\frac{3}{5};\frac{6}{5}\right)$ corrispondono alle due sole posizioni di C per cui è

$A\hat{C}B = \frac{\pi}{4}$

Ci sono differenti modi di risolvere il quesito. Ne proporremo 4.

- 1^a **soluzione**

  Si consideri la figura seguente, in cui il triangolo è rappresentato in un sistema di riferimento cartesiano .



Il generico punto C appartenente alla retta $y = 2x$ ha coordinate $C(t;2t)$. Di conseguenza

$$CA = \sqrt{(t-1)^2 + (2t)^2} = \sqrt{5t^2 - 2t + 1}$$
$$CB = \sqrt{(t-3)^2 + (2t)^2} = \sqrt{5t^2 - 6t + 9}$$

e le due lunghezze sono ben definite in quanto $5t^2 - 2t + 1 > 0 \ \forall t \in R$ e $5t^2 - 6t + 9 > 0 \ \forall t \in R$.

Per un noto teorema della trigonometria l'area del triangolo ABC è

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} CA \cdot CB \cdot \sin\left(A\hat{C}B\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{5t^2 - 2t + 1} \cdot \sqrt{5t^2 - 6t + 9} = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{25t^4 - 40t^3 + 62t^2 - 24t + 9}$$

Ma tale area è anche uguale a $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot |2t| = 2|t|$ in cui è stato introdotto il valore assoluto per l'altezza del triangolo in quanto il vertice $C(t;2t)$ potrebbe trovarsi, in linea di principio, anche nel terzo quadrante.

Uguagliando le due aree si ha:

$\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{25t^4 - 40t^3 + 62t^2 - 24t + 9} = 2t \Rightarrow \sqrt{25t^4 - 40t^3 + 62t^2 - 24t + 9} = 4\sqrt{2}|t|$ ed elevando al quadrato ambo i membri, avendo supposto $t \neq 0$ in quanto per $t = 0$ otteniamo un triangolo degenere, si ha: $25t^4 - 40t^3 + 30t^2 - 24t + 9 = 0$ ed applicando la regola di Ruffini il polinomio di quarto grado così si scompone: $(t-1)(5t-3)(5t^2+3) = 0$ da cui si ricavano le due soluzioni $t = 1, t = \frac{3}{5}$ entrambe accettabili e cioè i punti $C_1 = (1;2)$ e $C_2 = \left(\frac{3}{5};\frac{6}{5}\right)$.

- 2^a **soluzione**

Il secondo modo per la risoluzione del quesito è applicare il teorema di Carnot per cui $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2 \cdot CA \cdot CB \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ da cui $4 = (5t^2 - 2t + 1) + (5t^2 - 6t + 9) - 2\sqrt{(5t^2 - 2t + 1)(5t^2 - 6t + 9)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ ed isolando la radice si ha $\sqrt{2} \cdot \sqrt{(5t^2 - 2t + 1)(5t^2 - 6t + 9)} = (10t^2 - 8t + 6)$ da cui, elevando al quadrato si ottiene l'equazione risolvente precedente $25t^4 - 40t^3 + 30t^2 - 24t + 9 = 0$ che fornisce le soluzioni già trovate.

- 3^a **soluzione**

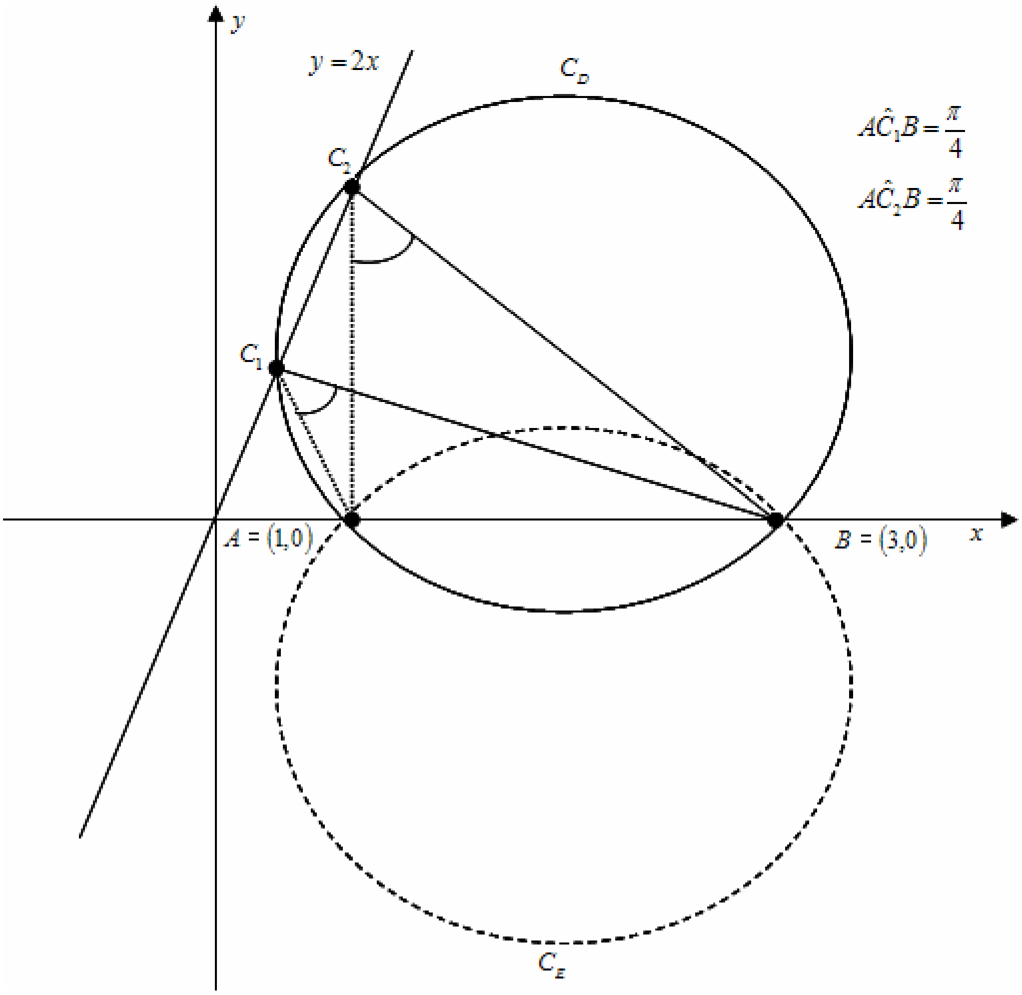
La terza soluzione si basa su considerazioni di geometria analitica e sulla constatazione del fatto che i punti C del piano che formano angoli $A\hat{C}B = \frac{\pi}{4}$ stanno su due circonferenze passanti per A e B e centri D ed E tali che $A\hat{D}B = A\hat{E}B = \frac{\pi}{2}$. Tali centri scaturiscono dall'intersezione della circonferenza di diametro AB e centro $\left(\frac{x_A + x_B}{2};\frac{y_A + y_B}{2}\right) = (2;0)$ di equazione $(x-2)^2 + y^2 = 1$ con l'asse del segmento $x = 2$ di AB:

$$D, E : \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D(2;1) \\ E(2;-1) \end{cases}.$$

I raggi delle due circonferenze passanti per A e B e centri D ed E sono pari a $DA = EA = \sqrt{2}$ per cui le due circonferenze sono

$C_D : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$

$C_E : (x-2)^2 + (y+1)^2 = 2$



Calcoliamo ora le intersezioni delle due circonferenze con la retta di equazione $y = 2x$.

Le intersezioni tra la retta $y = 2x$ e C_E si calcolano col sistema $\begin{cases}(x-2)^2 + (y+1)^2 = 2 \\ y = 2x\end{cases} \Rightarrow 5x^2 + 3 = 0$ equazione mai soddisfatta; le intersezioni tra la retta $y = 2x$ e C_D si calcolano col sistema $\begin{cases}(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2 \\ y = 2x\end{cases} \Rightarrow 5x^2 - 8x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm 1}{5} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = (1;2) \\ C_2 = \left(\frac{3}{5};\frac{6}{5}\right)\end{cases}$ come già mostrato precedentemente.

- 4^a **soluzione**

Il quarto modo per la risoluzione del quesito è ricordare che date due rette di coefficienti angolari m, m', l'angolo da esse formato è $\tan(\alpha) = \frac{m - m'}{1 + m \cdot m'}$. In tal caso le rette sono AC e BC ed i rispettivi coefficienti angolari $m = m_{AC} = \frac{2t}{t-1}$ ed $m' = m_{BC} = \frac{2t}{t-3}$ e $\alpha = \frac{\pi}{4}$ per cui $\tan(\alpha) = \left|\frac{m - m'}{1 + m \cdot m'}\right| \Rightarrow \left|\frac{-4t}{5t^2 - 4t + 3}\right| = 1$ e togliendo il valore assoluto si ha:

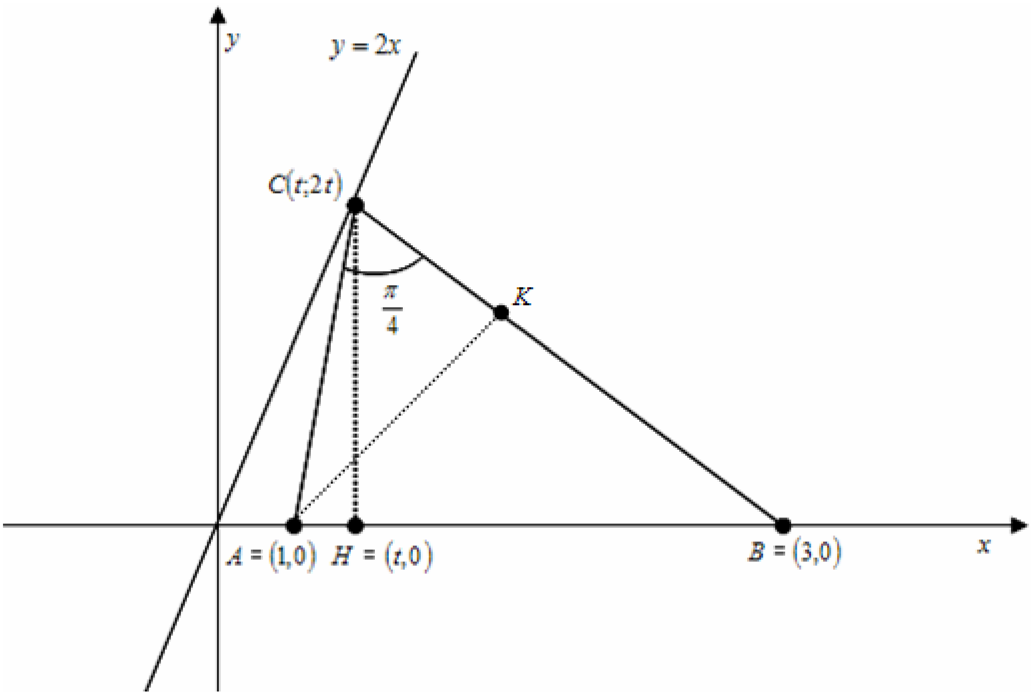
$$\begin{cases} \frac{-4t}{5t^2 - 4t + 3} = 1 & t \le 0 \\ \frac{4t}{5t^2 - 4t + 3} = 1 & t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5t^2 + 3 = 0 & t \le 0 \\ 5t^2 - 8t + 3 = 0 & t > 0 \end{cases}.$$

La prima equazione è impossibile, mentre la seconda fornisce ancora una volta le soluzioni accettabili $t = 1, t = \frac{3}{5}$.

Punto 2

Si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto, al variare di C, dall'ortocentro del triangolo ABC. Si tracci γ.

L'ortocentro è l'intersezione delle altezze. Consideriamo a tal riguardo la figura sottostante:



Il generico punto C appartenente alla retta $y = 2x$ ha coordinate $C(t;2t)$; di conseguenza l'altezza

CH ha equazione $x = t$. L'altezza AK ha equazione $y = m_{AK}(x-1)$ dove $m_{AK} = -\frac{1}{m_{CB}}$. Il coefficiente angolare della retta CB è $m_{CB} = \frac{2t}{t-3}$ per cui $m_{AK} = \frac{3-t}{2t}$ da cui l'altezza AK ha equazione $y = \left(\frac{3-t}{2t}\right)(x-1)$. Mettiamo a sistema le equazioni delle due altezze:

$$\begin{cases} y = \left(\frac{3-t}{2t}\right)(x-1) \\ x = t \end{cases} \xrightarrow{\text{Eliminando il parametro t}} \gamma : y = \left(\frac{3-x}{2x}\right)(x-1) = \frac{-x^2+4x-3}{2x}$$

Studiamo allora il luogo geometrico di equazione $\gamma : y = \frac{-x^2+4x-3}{2x}$. Notiamo innanzitutto che il luogo può essere scritto anche nella forma $\gamma : y = -\frac{x}{2} + 2 - \frac{3}{2x}$ da cui deduciamo che si tratta di una iperbole di centro (0,2) con asintoto verticale di equazione $x = 0$ ed asintoto obliquo di equazione $y = -\frac{x}{2} + 2$. Passiamo allo studio in dettaglio.

- **Dominio:** $x \neq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ **;**
- **Intersezioni asse ascisse:**

  $y = \frac{-x^2+4x-3}{2x} = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$;
- **Intersezioni asse ordinate:** non ce ne sono dal momento che il dominio è $x \neq 0$;
- **Positività:** $y = \frac{-x^2+4x-3}{2x} \geq 0 \Rightarrow x \in]-\infty, 0[\cup [1,3]$;
- **Asintoti verticali:** la retta $x = 0$ è asintoto verticale; infatti

  $\lim_{x \to 0^+} \frac{-x^2+4x-3}{2x} = -\infty, \lim_{x \to 0^-} \frac{-x^2+4x-3}{2x} = +\infty$
- **Asintoti orizzontali:** non ce ne sono, infatti

  $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-x^2+4x-3}{2x}\right) = -\infty, \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-x^2+4x-3}{2x}\right) = +\infty$;
- **Asintoti obliqui:** esiste un asintoto obliquo destro e sinistro coincidenti; già è stato evidenziato che l'asintoto obliquo ha equazione $y = -\frac{x}{2} + 2$. Controlliamo che l'asintoto abbia effettivamente questa equazione. Il generico asintoto obliquo ha equazione $y = mx + q$

con $m = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{\dfrac{-x^2+4x-3}{2x}}{x}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{-x^2+4x-3}{2x^2}\right) = -\dfrac{1}{2}$ e

$q = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{-x^2+4x-3}{2x}+\dfrac{x}{2}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{4x-3}{2x}\right) = 2$ per cui l'equazione dell'asintoto è effettivamente $y = -\dfrac{x}{2}+2$;

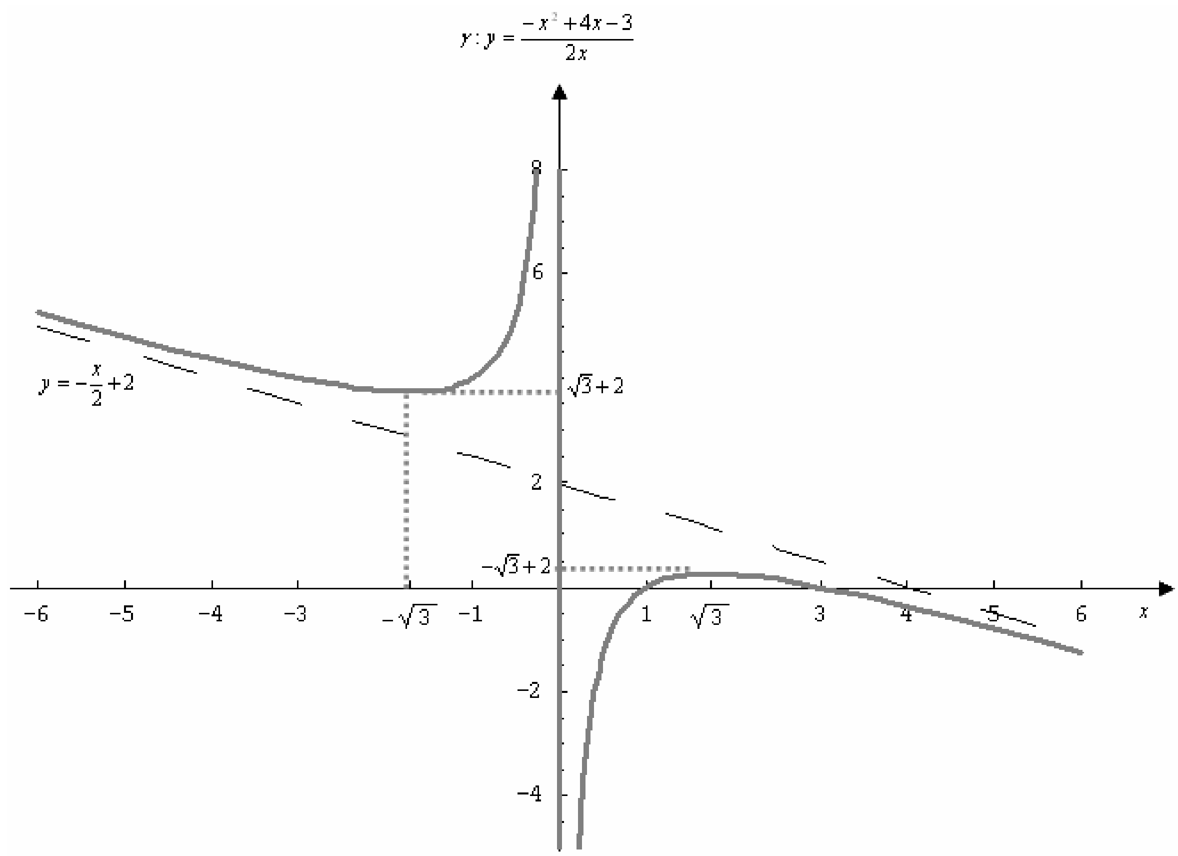
- **Crescenza e decrescenza:** $y'(x) = \dfrac{3-x^2}{2x^2}$ per cui $y'(x) = \dfrac{3-x^2}{2x^2} > 0 \Rightarrow x \in \left]-\sqrt{3},0\right[\cup \left]0,+\sqrt{3}\right[$; cioè la funzione è strettamente crescente in $\left]-\sqrt{3},0\right[\cup \left]0,+\sqrt{3}\right[$, strettamente decrescente in $\left]-\infty,-\sqrt{3}\right[\cup \left]+\sqrt{3},+\infty\right[$ e si annulla in $x = \pm\sqrt{3}$;
- **Flessi:** la derivata seconda è $y''(x) = \dfrac{-3}{2x}$ per cui, non annullandosi mai, non ci sono flessi a tangente obliqua. Inoltre $y''\left(\sqrt{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} < 0, y''\left(-\sqrt{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} > 0$ pertanto la funzione presenterà un minimo relativo in $m\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}+2\right)$ ed un massimo relativo in $M\left(\sqrt{3};-\sqrt{3}+2\right)$ e non presenterà nemmeno flessi a tangente orizzontale.

Mostriamo ora che il luogo geometrico, attraverso una trasformazione ben precisa, è riconducibile a una classica iperbole.

Notiamo che l'equazione del luogo può essere scritta in forma implicita come $x^2+2xy-4x+3=0$ e cioè $x^2+2xy+\left(y^2-y^2\right)+(4-4)+(4y-4y)-4x+3=0$ e di conseguenza l'equazione diventa $(x+y-2)^2-(y-2)^2+3=0 \Rightarrow \left(\dfrac{y-2}{\sqrt{3}}\right)^2-\left(\dfrac{x+y-2}{\sqrt{3}}\right)^2=1$.

Applicando la trasformazione $\begin{cases} X = \dfrac{x+y-2}{\sqrt{3}} \\ Y = \dfrac{y-2}{\sqrt{3}} \end{cases}$ l'equazione del luogo diventa $Y^2-X^2=1$ che è un iperbole di asintoti $Y = \pm X$.

Il grafico è di seguito presentato:



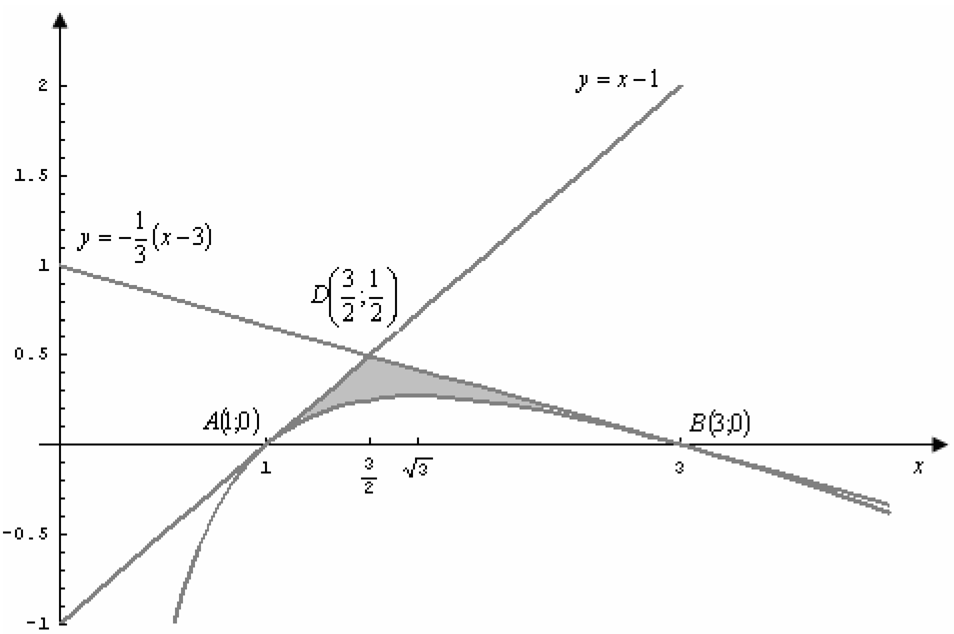
Punto 3

Si calcoli l'area Ω della parte di piano limitata da γ e dalle tangenti a γ nei punti A e B.

La tangente in $A(1;0)$ ha equazione $y=m(x-1)$ con $m=y'(1)=\left[\frac{3-x^2}{2x^2}\right]_{x=1}=1$ e cioè $t_A: y=x-1$.

La tangente in $B(3;0)$ ha equazione $y=m(x-3)$ con $m=y'(3)=\left[\frac{3-x^2}{2x^2}\right]_{x=3}=-\frac{1}{3}$ e cioè $t_B: y=-\frac{1}{3}(x-3)$.

Il punto D di intersezione tra le due tangenti è dato dal sistema $\begin{cases} y=x-1 \\ y=-\frac{1}{3}(x-3) \end{cases}$ da cui si ricava $D\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$. Il luogo e le tangenti in A e B sono di seguito rappresentati nella figura sottostante:



L'area richiesta può essere calcolata come differenza tra l'area del triangolo ABD e l'area sottesa dalla curva con l'asse delle ascisse:

$$\Omega = S_{ABD} - \int_1^3 \left(-\frac{x}{2} + 2 - \frac{3}{x} \right) dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \right) - \left[-\frac{x^2}{4} + 2x - \frac{3}{2} \ln|x| \right]_1^3 =$$

$$= \frac{1}{2} - \left[\left(-\frac{9}{4} + 6 - \frac{3}{2} \ln 3 \right) - \left(-\frac{1}{4} + 2 \right) \right] = \frac{1}{2} - \left[2 - \frac{3}{2} \ln 3 \right] = \frac{3}{2} (\ln 3 - 1)$$

Un altro modo consiste nel calcolare direttamente l'area d'interesse:

$$\Omega = \int_1^{\frac{3}{2}} \left[(x-1) - \left(-\frac{x}{2} + 2 - \frac{3}{x} \right) \right] dx + \int_{\frac{3}{2}}^3 \left[-\frac{1}{3}(x-3) - \left(-\frac{x}{2} + 2 - \frac{3}{x} \right) \right] dx =$$

$$= \int_1^{\frac{3}{2}} (x-1) dx + \int_{\frac{3}{2}}^3 \left[-\frac{1}{3}(x-3) \right] dx - \int_1^3 \left(-\frac{x}{2} + 2 - \frac{3}{x} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{(x-1)^2}{2} \right]_1^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \left[\frac{(x-3)^2}{2} \right]_{\frac{3}{2}}^3 - \left[-\frac{x^2}{4} + 2x - \frac{3}{2} \ln|x| \right]_1^3 =$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{3} \left(-\frac{9}{8} \right) - \left[2 - \frac{3}{2} \ln 3 \right] = \frac{1}{2} - \left[2 - \frac{3}{2} \ln 3 \right] = \frac{3}{2} (\ln 3 - 1)$$

Punto 4

Verificato che $\Omega = \frac{3}{2}(\ln 3 - 1)$ si illustri una procedura numerica per il calcolo approssimato di $\ln 3$.

Una procedura per calcolare il valore $\ln 3$ si basa sull'integrazione numerica attraverso il metodo dei rettangoli, dei trapezi o di Cavalieri Simpson. Infatti $\ln 3 = \int_1^3 \frac{1}{x}dx$, per cui scegliendo di suddividere l'ampiezza dell'intervallo [1,3] in 4 intervallini di uguale ampiezza $\frac{1}{2}$, ponendo $g(x) = \frac{1}{x}$, si ha:

- **Metodo dei rettangoli:**

$$\int_1^3 \frac{1}{x}dx \cong \frac{b-a}{n}\left[g(x_0)+g(x_1)+g(x_2)+g(x_3)\right] =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left[g(1)+g\left(\frac{3}{2}\right)+g(2)+g\left(\frac{5}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\right] = \frac{77}{60} \cong 1.283$$

con un errore commesso $e \le \frac{(b-a)^2}{2n}\cdot M$ con $M = \max|g'(x)|$ in $[1,3]$. In questo caso $|g'(x)| = \left|-\frac{1}{x^2}\right| = \left|\frac{1}{x^2}\right|$ ed in [1;3] il massimo $M = \max|g'(x)| = \max\left|\frac{1}{x^2}\right|$ è raggiunto per $x = 1$ e vale $M = 1$ per cui l'errore è $e \le \frac{(b-a)^2}{2n}\cdot 1 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0.5$.

- **Metodo dei trapezi:**

$$\int_1^3 \frac{1}{x}dx \cong \frac{b-a}{n}\left[\frac{g(x_0)+g(x_4)}{2}+g(x_1)+g(x_2)+g(x_3)\right] =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left[\frac{g(1)+g(3)}{2}+g\left(\frac{3}{2}\right)+g(2)+g\left(\frac{5}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1+\frac{1}{3}}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\right] = \frac{67}{60} \cong 1.117$$

con un errore commesso $e \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot M$ con $M = \max|g''(x)|$ in $[1,3]$. In questo caso $|g''(x)| = \left|\frac{2}{x^3}\right|$ ed in [1;3] il massimo $M = \max|g''(x)| = \max\left|\frac{2}{x^3}\right|$ è raggiunto per $x = 1$ e vale $M = 2$ per cui l'errore è $e \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot M = \frac{8}{192}\cdot 2 = \frac{1}{12} \cong 0.083$.

- **Metodo di Cavalieri Simpson:**

$$\int_1^3 \frac{1}{x}dx \cong \frac{b-a}{n}\left\{\left[\frac{g(x_0)+g(x_4)}{3}\right]+\frac{4}{3}\left[g(x_1)+g(x_3)\right]+\frac{2}{3}g(x_2)\right\} =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left\{\left[\frac{g(1)+g(3)}{3}\right]+\frac{4}{3}\left[g\left(\frac{3}{2}\right)+g\left(\frac{5}{2}\right)\right]+\frac{2}{3}g(2)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1+\frac{1}{3}}{3}+\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{11}{10} = 1.1$$

con un errore commesso $e \le \frac{(b-a)^5}{180n^4}\cdot M$ con $M = \max\left|g^{IV}(x)\right|$ in $[1,3]$. In questo caso $\left|g^{IV}(x)\right| = \left|\frac{24}{x^5}\right|$ ed in [1;3] il massimo $M = \max\left|g^{IV}(x)\right| = \max\left|\frac{24}{x^5}\right|$ è raggiunto per $x = 1$ e vale $M = 24$ per cui l'errore è $e \le \frac{(b-a)^5}{180n^4}\cdot M = \frac{32}{46080}\cdot 24 = \frac{1}{60} \cong 0.017$.

Si nota che il metodo che consente di calcolare un valore di più vicino a quello reale, pari a 1.09861, è il metodo di Cavalieri Simpson.

PROBLEMA 2

Siano f e g le funzioni definite, per ogni x reale, da $f(x)=2^x$ **e** $g(x)=x^2$**.**

Punto 1

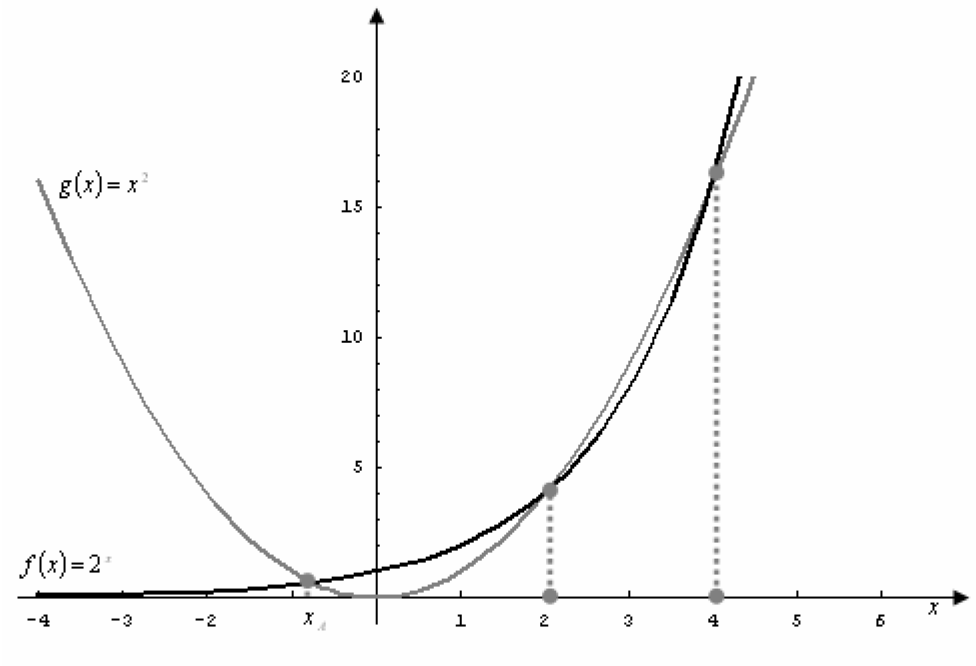
Si traccino i grafici di f e g e si indichi con A la loro intersezione di ascissa negativa.

La funzione $f(x)=2^x$ è un' esponenziale con base 2, per cui è sempre positiva, non interseca mai l'asse delle ascisse, interseca quello delle ordinate in (0,1), ha come asintoto orizzontale la retta $y=0$ in quanto $\lim_{x\to-\infty} 2^x = 0$, mentre $\lim_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$.

La funzione $g(x)=x^2$ è una parabola con vertice in (0,0) e concavità rivolta verso l'alto.

Si nota subito che $f(2)=g(2)=4, f(4)=g(4)=16$ per cui le due curve hanno almeno due punti in comune in cui si intersecano.

Nel grafico sottostante sono messe sullo stesso sistema di riferimento cartesiano entrambe le curve.



Punto 2

Si calcoli, con uno dei metodi di approssimazione numerica studiati, l'ascissa di A con due cifre decimali esatte.

Indichiamo $h(x)=2^x-x^2$; poiché $h(-1)=-\frac{1}{2}<0, h(0)=1>0$, allora $\exists\alpha\in(-1,0): h(\alpha)=0$.

Per calcolare la radice richiesta, ci serviamo del metodo di bisezione, del metodo delle tangenti e delle secanti.

- **Metodo di bisezione:** lo sviluppo è sotto presentato in forma tabellare.

a	b	$\frac{a+b}{2}$	$h(a)$	$h(b)$	$h\left(\frac{a+b}{2}\right)$	$b-a$	$err = 0.01$ $b-a < err$?	Numero bisezioni
-1,0000	0,0000	-0,5000	-0,5000	1,0000	0,4571	1,0000		
-1,0000	-0,5000	-0,7500	-0,5000	0,4571	0,0321	0,5000	no	1
-1,0000	-0,7500	-0,8750	-0,5000	0,0321	-0,2204	0,2500	no	2
-0,8750	-0,7500	-0,8125	-0,2204	0,0321	-0,0908	0,1250	no	3
-0,8125	-0,7500	-0,7813	-0,0908	0,0321	-0,0285	0,0625	no	4
-0,7813	-0,7500	-0,7656	-0,0285	0,0321	0,0020	0,0313	no	5
-0,7813	-0,7656	-0,7734	-0,0285	0,0020	-0,0132	0,0156	no	6
-0,7734	-0,7656	**-0,7695**	-0,0132	0,0020	-0,0056	0,0078	**STOP**	**7**
-0,7695	**-0,7656**							

Il metodo di bisezione ha una convergenza più lenta rispetto a quello delle tangenti o delle secanti, e come si nota dalla tabella dopo 7 bisezioni l'algoritmo termina fornendo con due cifre decimali esatte la radice $\alpha = x_A \cong -0.76$.

- **Metodo delle tangenti:**

Il metodo delle tangenti, vista la continuità e derivabilità della funzione $h(x) = 2^x - x^2$ in [-1;0] e accertato che la derivata seconda $h''(x) = \ln^2 2 \cdot 2^x - 2$ è continua e strettamente negativa in $\left]-1;0\right[$, è applicabile e la formula da utilizzare definita per ricorrenza è $x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)}$ con punto iniziale $x_0 = -1$, visto che la funzione e la sua derivata seconda in $x_0 = -1$ sono concordi.

Sviluppando tale metodo si ha:

$$x_1 = x_0 - \frac{h(x_0)}{h'(x_0)} = -1 + \frac{1}{\ln 2 + 4} \cong -0.7869$$

$$x_2 = x_1 - \frac{h(x_1)}{h'(x_1)} \cong -0.7668$$

$$x_3 = x_2 - \frac{h(x_2)}{h'(x_2)} \cong -0.7666$$

e così via.

Poiché $|x_3 - x_2| < \frac{1}{100}$, allora ritroviamo che un'approssimazione con due cifre decimali esatte, e con la terza cifra stabilizzata, è $\alpha = x_A \cong -0.76$. Quindi troviamo un'approssimazione migliore cifra in un numero di passi inferiori rispetto al metodo di bisezione.

- **Metodo delle secanti:**

Anche in tal caso valgono le ipotesi che ci hanno permesso di applicare il metodo delle tangenti, ma la formula da utilizzare definita per ricorrenza è $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - a}{h(x_n) - h(a)} \cdot h(x_n)$ con condizioni iniziali $x_0 = 0$ e $a = -1$.

Sviluppando tale metodo si ha:

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0 + 1}{h(x_0) + \frac{1}{2}} \cdot h(x_0) = -\frac{0+1}{h(0) + \frac{1}{2}} \cdot h(0) \cong -0.6667$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 + 1}{h(x_1) + \frac{1}{2}} \cdot h(x_1) \cong -0.7567$$

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2 + 1}{h(x_2) + \frac{1}{2}} \cdot h(x_2) \cong -0.7657$$

$$x_4 = x_3 - \frac{x_3 + 1}{h(x_3) + \frac{1}{2}} \cdot h(x_3) \cong -0.7665$$

$$x_5 = x_4 - \frac{x_4 + 1}{h(x_4) + \frac{1}{2}} \cdot h(x_4) \cong -0.7666$$

e così via. Pertanto anche in tal caso con due cifre decimali esatte, e con la terza cifra stabilizzata, possiamo concludere che $\alpha = x_A \cong -0.76$. Quindi troviamo un'approssimazione migliore in un numero di passi inferiori rispetto al metodo di bisezione, ma il numero di step è superiore rispetto a quello delle tangenti. Infatti la convergenza del metodo delle secanti è più lenta rispetto a quello delle tangenti.

Punto 3

Quanti e quali sono gli zeri della funzione $h(x) = 2^x - x^2$? Si tracci il grafico di h.

Per identificare il numero di zeri, studiamo innanzitutto la crescenza e decrescenza della funzione $h(x) = 2^x - x^2$ la cui derivata è $h'(x) = \ln 2 \cdot 2^x - 2x$. Per identificare il numero di punti in cui si annulla la derivata prima bisogna studiare il sistema $\begin{cases} y = 2^x \\ y = \frac{2x}{\ln 2} \end{cases}$. Notiamo che la funzione $y = 2^x$ è convessa, per cui al massimo le intersezioni di essa con la retta di equazione $y = \frac{2x}{\ln 2}$ sono 2. Inoltre $h'(0) = \ln 2 > 0, h'(1) = 2(\ln 2 - 1) < 0, h'(3) = 2(4\ln 2 - 3) < 0, h'(4) = 8(2\ln 2 - 1) > 0$ per cui i due zeri x_m, x_M della derivata si trovano negli intervalli (0,1) e (3,4).

In particolare nell'intervallo aperto che ha come estremi gli zeri della derivata prima, la derivata prima è strettamente negativa (la retta $y = \frac{2x}{\ln 2}$ sta al di sopra di $y = 2^x$ come mostra la figura sotto), per cui la funzione $h(x) = 2^x - x^2$ presenterà un massimo $x_M \in (0,1)$ ed un minimo $x_m \in (3,4)$.

Anche in tal caso è possibile applicare uno dei metodi numerici, come quello di bisezione o delle tangenti o delle secanti, per calcolare un'approssimazione degli zeri della derivata prima.

Visto che la funzione $h'(x) = \ln 2 \cdot 2^x - 2x$ è continua e derivabile in [0;1], che la sua derivata seconda $h'''(x) = (\ln 2)^3 \cdot 2^x$ è continua e strettamente positiva in $]0;1[$ e che in $x_0 = 0$ vale $h'(0) \cdot h'''(0) > 0$, è possibile applicare il metodo delle tangenti con punto iniziale $x_0 = 0$. Si ha lo sviluppo seguente:

$$x_1 = x_0 - \frac{h'(x_0)}{h''(x_0)} = x_0 - \left[\frac{\ln 2 \cdot 2^x - 2x}{\ln^2 2 \cdot 2^x - 2}\right]_{x=x_0} = -\frac{\ln 2}{\ln^2 2 - 2} \cong 0.4561$$

$$x_2 = x_1 - \frac{h'(x_1)}{h''(x_1)} \cong 0.4849$$

$$x_3 = x_2 - \frac{h'(x_2)}{h''(x_2)} \cong 0.4850$$

e così via.

Pertanto deduciamo che l'ascissa del massimo è $x_M \cong 0.485$.

Analogamente facciamo per l'ascissa del minimo in $]3;4[$ con punto iniziale $x_0 = 4$, visto che la funzione $h'(x) = \ln 2 \cdot 2^x - 2x$ è continua e derivabile in [3;4], che la sua derivata seconda $h'''(x) = (\ln 2)^3 \cdot 2^x$ è continua e strettamente positiva in $]3;4[$ e che $h'(4) \cdot h'''(4) > 0$; lo sviluppo del metodo numerico delle tangenti, pertanto, è:

$$x_1 = x_0 - \frac{h'(x_0)}{h''(x_0)} = x_0 - \left[\frac{\ln 2 \cdot 2^x - 2x}{\ln^2 2 \cdot 2^x - 2}\right]_{x=x_0} = 4 - \frac{16 \ln 2 - 8}{16 \ln^2 2 - 2} \cong 3.457$$

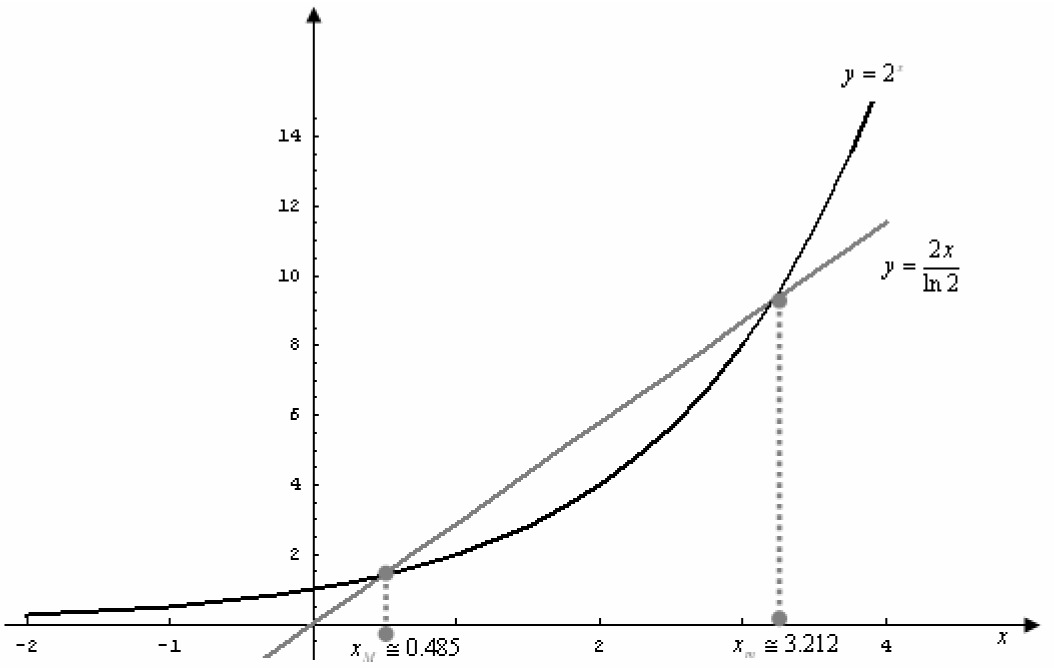
$$x_2 = x_1 - \frac{h'(x_1)}{h''(x_1)} \cong 3.244$$

$$x_3 = x_2 - \frac{h'(x_2)}{h''(x_2)} \cong 3.213$$
$$x_4 = x_3 - \frac{h'(x_3)}{h''(x_3)} \cong 3.212$$

e così via.

Pertanto deduciamo che l'ascissa del minimo è $x_m \cong 3.212$.

Il grafico sotto mostra quanto detto:



La derivata seconda di $h(x) = 2^x - x^2$ è $h''(x) = \ln^2 2 \cdot 2^x - 2$ e si annulla in $x_F = \log_2\left(\frac{2}{\ln^2 2}\right) \cong 2.06 > 2$ in cui la funzione presenta un flesso a tangente obliqua.

A questo punto è possibile fare le seguenti considerazioni:

1. Per $x \in]-\infty,-1]$ la funzione è strettamente crescente (in quanto $h'(x) > 0$ essendo somma di quantità positive per $x \le -1$), ed essendo $h(-1) < 0$, deduciamo che la funzione è strettamente negativa in tale intervallo pertanto non ci sono zeri di $h(x) = 2^x - x^2$ in esso;
2. Per $x \in [-1, x_M[$ la funzione è strettamente crescente (in quanto $h'(x) > 0$) ed essendo $h(-1) \cdot h(x_M) < 0$, lo zero in $]-1, x_M[$ è unico;
3. Per $x \in]x_M, x_F]$, la funzione è strettamente decrescente ed essendo $h(x_M) \cdot h(x_F) < 0$, deduciamo che lo zero in $]x_M, x_F[$ è unico;
4. Per $x \in [x_F, x_m[$, la funzione è strettamente decrescente ed essendo $h(x_F) < 0$, deduciamo che la funzione è strettamente negativa in tale intervallo pertanto non ci sono zeri di

$h(x) = 2^x - x^2$ in esso;

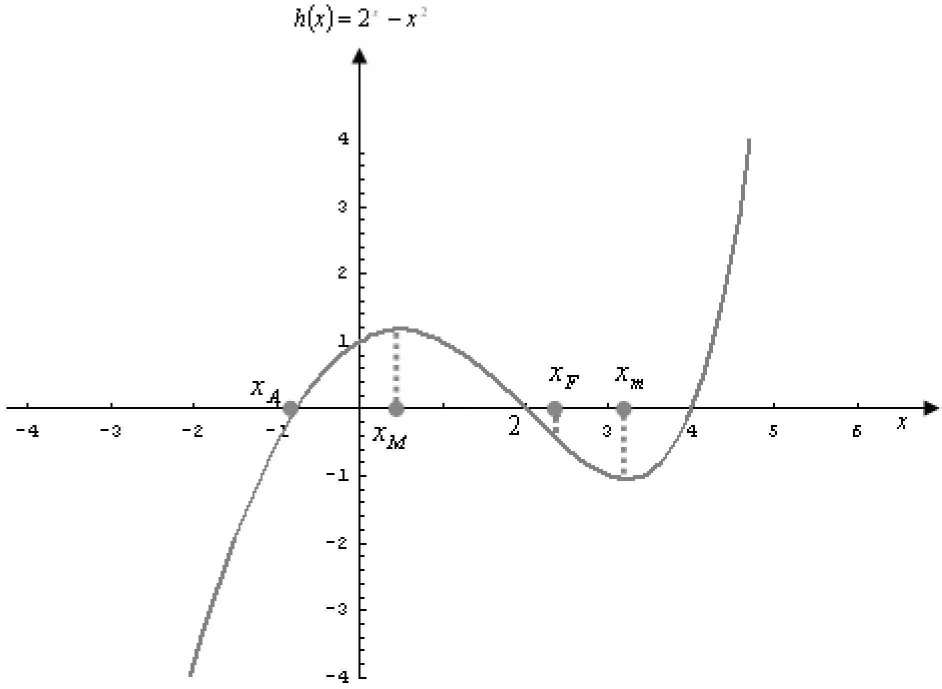
5. Per $x \in \left]x_m, 5\right]$, la funzione è strettamente crescente ed essendo $h(x_m) \cdot h(5) < 0$, deduciamo che lo zero in $\left]x_m, 5\right[$ è unico.
6. Per $x \in \left[5, +\infty\right[$ la funzione è strettamente crescente (in quanto $h'(x) > 0$), ed essendo $h(5) > 0$, deduciamo che la funzione è strettamente positiva in tale intervallo pertanto non ci sono zeri di $h(x) = 2^x - x^2$ in esso.

In conclusione la funzione presenta 3 zeri. In particolare quello negativo in $\left]-1, x_M\right[$ è stato calcolato precedentemente e vale $\alpha = x_A \cong -0.767$; quello in $\left]x_M, x_F\right[$ è $x = 2$ come già evidenziato ed analogamente quello in $\left]x_m, 5\right[$ è $x = 4$.

Studiamo ora la funzione $h(x) = 2^x - x^2$**.**

- **Dominio:** tutto l'asse dei reali R;
- **Intersezioni asse ascisse:** $x_A \cong -0.76, x = 2, x = 4$;
- **Intersezioni asse ordinate:** $x = 0 \Rightarrow y = 1$;
- **Eventuali simmetrie:** la funzione non è né pari né dispari;
- **Positività:** $h(x) = 2^x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [x_A, 2] \cup \left[4, +\infty\right[$ per le considerazioni sopra effettuate;
- **Asintoti verticali:** non ce ne sono;
- **Asintoti orizzontali:** non ce ne sono; infatti $\lim_{x \to +\infty}\left(2^x - x^2\right) = \lim_{x \to +\infty}\left[2^x\left(1 - \frac{x^2}{2^x}\right)\right] = +\infty, \lim_{x \to -\infty}\left(2^x - x^2\right) = \lim_{x \to -\infty}\left[x^2\left(\frac{2^x}{x^2} - 1\right)\right] = -\infty$;
- **Asintoti obliqui:** non ce ne sono; infatti $\lim_{x \to -\infty}\frac{\left(2^x - x^2\right)}{x} = +\infty, \lim_{x \to +\infty}\frac{\left(2^x - x^2\right)}{x} \overset{De\,L'Hopital}{=} \lim_{x \to +\infty}\left(\ln 2 \cdot 2^x - 2x\right) = \lim_{x \to +\infty}\left[\ln 2 \cdot 2^x\left(1 - \frac{2x}{\ln 2 \cdot 2^x}\right)\right] = +\infty$
- **Crescenza e decrescenza:** abbiamo mostrato che la funzione ha un massimo positivo all'ascissa $x_M \cong 0.485$ ed un minimo negativo all'ascissa $x_m \cong 3.212$;
- **Flessi:** la funzione non ha flessi a tangente orizzontale, ma ne ha uno a tangente obliqua all'ascissa $x_F = \log_2\left(\frac{2}{\ln^2 2}\right) \cong 2.06$.

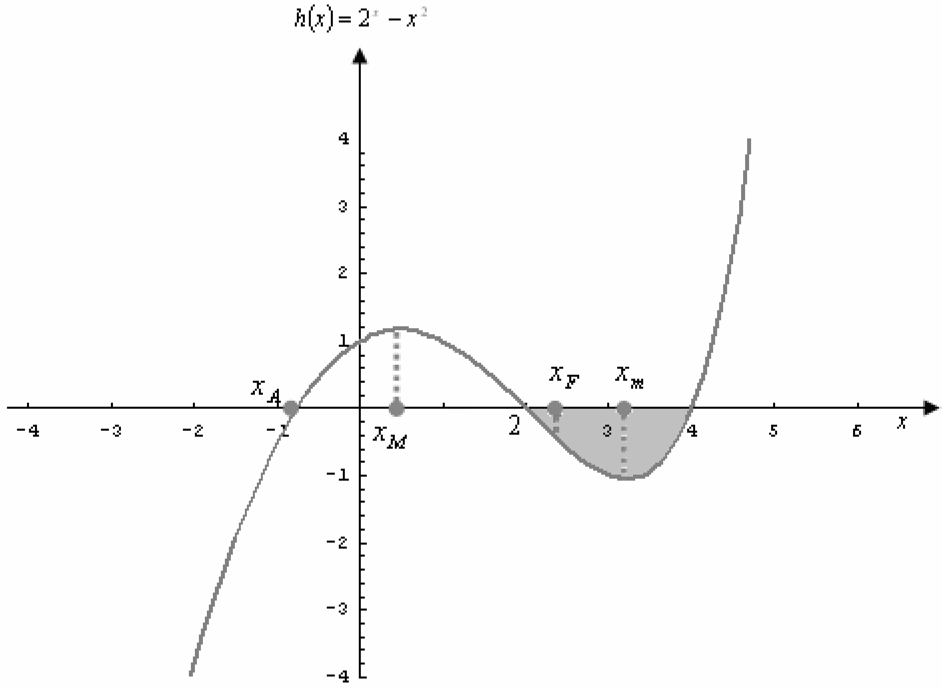
Il grafico è sotto presentato:



Punto 4

Si calcoli l'area racchiusa dal grafico di h e l'asse x sull'intervallo [2, 4].

La regione di interesse è rappresentata in grigio nella figura seguente:



L'area richiesta è pari a:

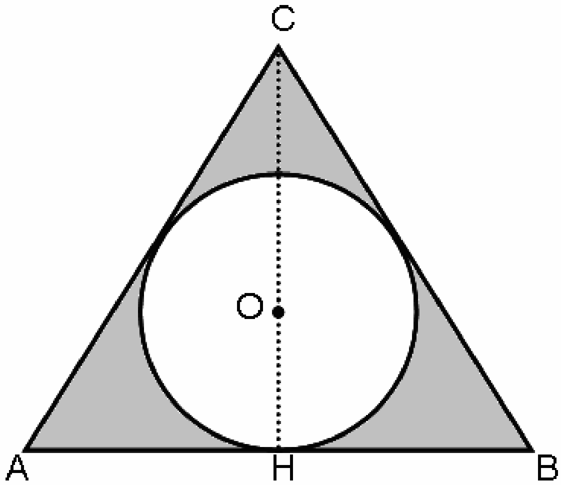
$$S = \int_2^4 [0 - h(x)]dx = \int_2^4 \left[x^2 - 2^x\right]dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2^x}{\ln 2}\right]_2^4 = \left[\left(\frac{64}{3} - \frac{16}{\ln 2}\right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{\ln 2}\right)\right] = \frac{56}{3} - \frac{12}{\ln 2}.$$

QUESTIONARIO

Quesito 1

Siano dati un cono equilatero e la sfera in esso inscritta. Si scelga a caso un punto all'interno del cono. Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno alla sfera.

Consideriamo la figura sottostante in cui è rappresentata la sezione del un cono equilatero con la sfera inscritta costituita da un triangolo equilatero con la circonferenza inscritta.



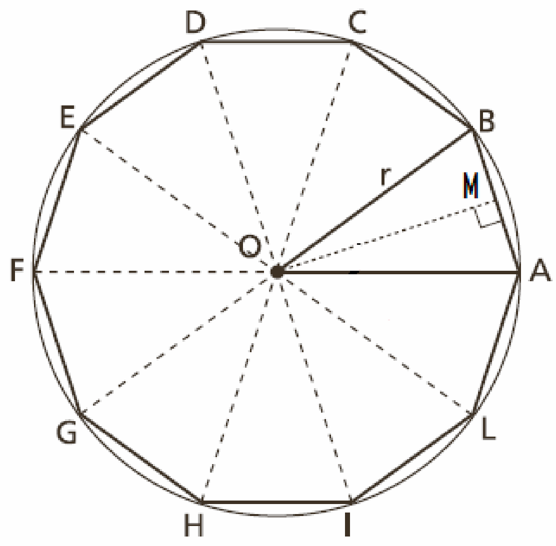
Per un cono equilatero, l'apotema è pari al diametro di base (supposto di lunghezza $2r$) per cui l'altezza sarà $h = CH = CB \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$ ed il volume di conseguenza sarà $V_{Cono} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \left(\pi r^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3$. Il raggio della sfera è, invece, pari a $OH = HB \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = r\frac{\sqrt{3}}{3}$ ed il volume di conseguenza sarà $V_{Sfera} = \frac{4}{3} \cdot \left(\pi r^3\right) = \frac{4\sqrt{3}}{27}\pi r^3$. La probabilità richiesta è la probabilità che il punto considerato si trovi all'interno della regione colorata in grigio; pertanto essa vale

$$p = 1 - \frac{V_{Sfera}}{V_{Cono}} = 1 - \frac{\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi r^3}{\frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

Quesito 2

Ricordando che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio, si provi che $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

Consideriamo la figura sottostante:

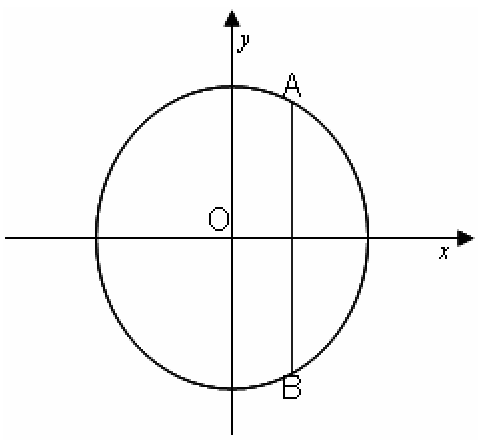


L'angolo $A\hat{O}B = \frac{\pi}{5}$ in quanto $\frac{1}{10}$ dell'angolo giro. Il lato AB è la sezione aurea del raggio per cui $AB = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ da cui $MA = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Ma per il teorema dei seni $MA = AO \cdot \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$ da cui per confronto si ricava $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Quesito 3

Un solido ha per base un cerchio di raggio 1. Ogni sezione del solido ottenuta con un piano perpendicolare ad un prefissato diametro è un triangolo equilatero. Si calcoli il volume del solido.

Consideriamo la figura seguente, in cui sono raffigurati, in un sistema di riferimento cartesiano, la base del solido, un cerchio di raggio unitario, ed un lato del triangolo equilatero sezione coincidente con la corda AB della circonferenza. Scegliamo come diametro prefissato il diametro lungo l'asse delle ascisse, pertanto la corda AB sarà perpendicolare ad esso.



La circonferenza frontiera del cerchio ha equazione $x^2+y^2=1$ per cui i punti A e B hanno generiche coordinate $A\left(x,\sqrt{1-x^2}\right), B\left(x,-\sqrt{1-x^2}\right)$ con $-1\le x\le 1$. Il lato AB del triangolo equilatero sezione è $AB=2\sqrt{1-x^2}$. L'area del triangolo equilatero è allora $S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot AB^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 4\cdot\left(1-x^2\right)=\sqrt{3}\left(1-x^2\right)$ con $-1\le x\le 1$. Il volume del solido è pertanto $V=\int_{-1}^{1}S(x)dx=2\int_0^1 S(x)dx=2\sqrt{3}\int_0^1\left(1-x^2\right)dx=2\sqrt{3}\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Quesito 4

Si esponga la regola del marchese de L'Hôpital (1661 – 1704) e la si applichi per dimostrare che è:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2008}}{2^x}=0$$

Enunciamo la regola di de L' Hôpital:

Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ definite in un intorno di $+\infty$, sono derivabili in tale intorno, con $g'(x)\ne 0$, se le due funzioni, per $x\to+\infty$ tendono entrambe a 0 o a ∞ e se esiste il limite del rapporto delle derivate delle funzioni date, $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, allora esiste anche il limite del rapporto delle funzioni $\frac{f(x)}{g(x)}$ e vale $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Nel caso in esame è possibile applicare tale teorema e, dopo averlo applicato 2008 volte si ha $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2008}}{2^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2008!}{(\ln 2)^{2008}\cdot 2^x}=0$ dal momento che $D\left[x^n\right]=nx^{n-1}$ se $n\ge 1, D\left[2^x\right]=\ln 2\cdot 2^x$.

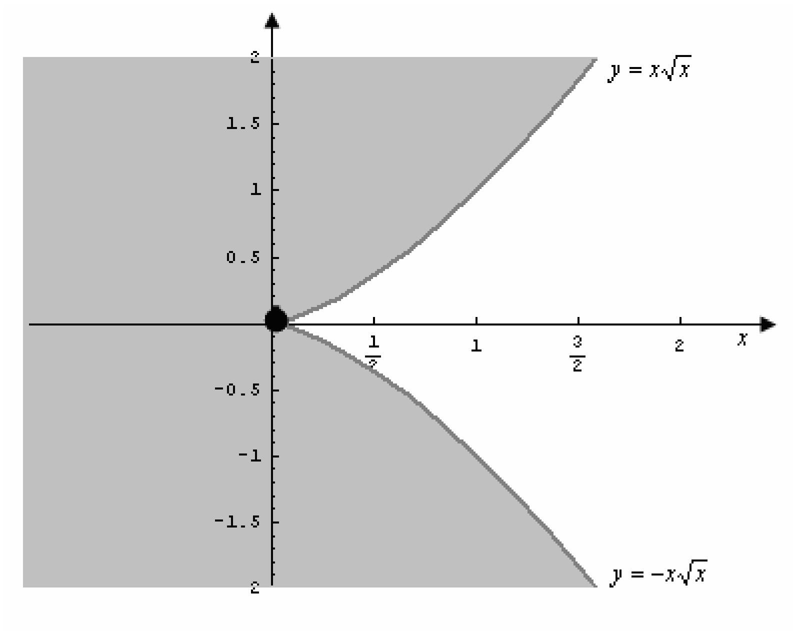
Quesito 5

Nel piano riferito a coordinate cartesiane (x,y) si dica qual è l'insieme dei punti per i quali risulta: $y^2-x^3>0$.

Distinguiamo i tre casi $x<0, x=0, x>0$:

- Se $x<0$ allora $x^3>0$ per cui la disequazione $y^2-x^3>0$ è sempre soddisfatta;
- Se $x=0$ la disequazione diventa $y^2>0$ che è soddisfatta per $y\ne 0$;
- Se $x>0$ la disequazione è soddisfatta dai punti del piano tali che $y<-x\sqrt{x}\vee y>x\sqrt{x}$.

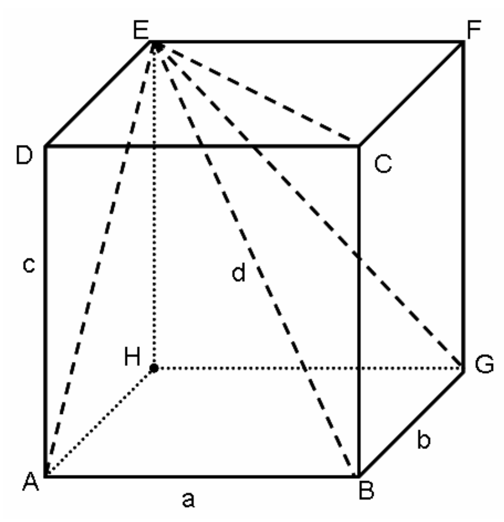
I punti del piano che soddisfano la disequazione sono raffigurati nel sistema di riferimento cartesiano sottostante:



Quesito 6

I lati di un parallelepipedo rettangolo misurano 8, 9, e 12 cm. Si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'ampiezza dell'angolo che la diagonale mandata da un vertice fa con ciascuno dei tre spigoli concorrenti al vertice.

Si consideri la figura sottostante:



Poniamo $AB = a = 8\,\text{cm}, BG = b = 9\,\text{cm}, AD = c = 12\,\text{cm}$.

La diagonale del cubo misura $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 17\,\text{cm}$.

Inoltre $B\hat{A}E = B\hat{G}E = B\hat{C}E = 90°$ per cui, sfruttando il teorema dei seni, si hanno i seguenti angoli:

$$A\hat{B}E = \arccos\left(\frac{a}{d}\right) = \arccos\left(\frac{8}{17}\right) = 61°55'39''$$

$$G\hat{B}E = \arccos\left(\frac{b}{d}\right) = \arccos\left(\frac{9}{17}\right) = 58°02'03''$$

$$C\hat{B}E = \arccos\left(\frac{c}{d}\right) = \arccos\left(\frac{12}{17}\right) = 45°05'55''$$

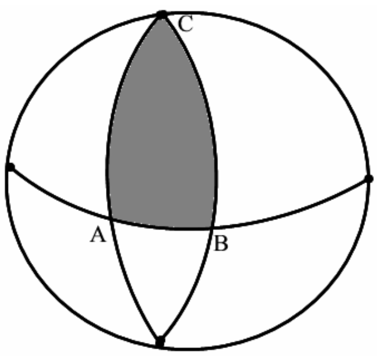
Quesito 7

Perché è geometria "non" euclidea? Che cosa e come viene negato della geometria euclidea? Si illustri la questione con gli esempi che si ritengono più adeguati.

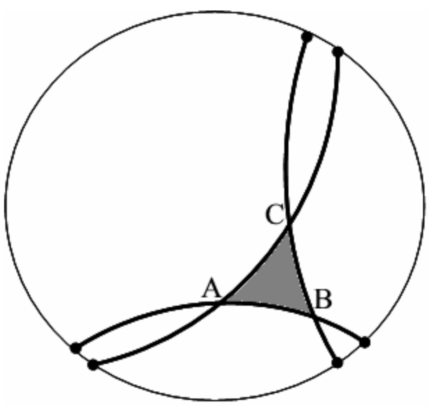
- Nella geometria euclidea si postula l'esistenza e l'unicità della parallela ad una retta data da un punto esterno ad essa (V postulato di Euclide) ed inoltre si afferma che la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto.

In un contesto non euclideo si possono avere due possibilità:

- Nella geometria ellittica si nega l'esistenza di tale parallela.
  La parallela ad AB condotta per il vertice C non esiste, la somma degli angoli interni è maggiore dell'angolo piatto, ed i lati non sono segmenti ma archi di circonferenza, come nel modello sulla sfera sotto rappresentato:



- Nella geometria iperbolica si nega l'unicità di tale parallela.
  La parallela condotta dal vertice C non è unica, la somma degli angoli interni è minore dell'angolo piatto. Un modello di questa geometria è quello sotto rappresentato all'interno di un disco: i lati non sono segmenti ma archi di iperboli perpendicolari al cerchio esterno.



Quesito 8

Sia f la funzione definita da $f(x)=\pi^x - x^\pi$ Si precisi il dominio di f e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x=\pi$.

La funzione in esame può essere così scritta: $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$ in cui il dominio di $f_1(x)=\pi^x$ è tutto R, mentre il dominio di $f_2(x)=x^\pi$ è R^+; quindi anche la funzione differenza ha come dominio R^+ e cioè $(0,+\infty)$.

Le derivate sono:

$$f'(x)=\ln\pi\cdot\pi^x-\pi\cdot x^{\pi-1}$$
$$f''(x)=\ln^2\pi\cdot\pi^x-\pi\cdot(\pi-1)x^{\pi-2}$$

e valutate per $x=\pi$ forniscono

$$f'(\pi)=\ln\pi\cdot\pi^\pi-\pi\cdot\pi^{\pi-1}=\pi^\pi\cdot(\ln\pi-1)$$
$$f''(\pi)=\ln^2\pi\cdot\pi^\pi-\pi\cdot(\pi-1)\pi^{\pi-2}=\pi^\pi(\ln^2\pi-1)+\pi^{\pi-1}$$

Ora essendo $\pi>e$ se ne deduce che $\ln\pi>\ln e=1$ pertanto entrambe le derivate in $x=\pi$ assumono valore positivo.

Quesito 9

In una classe composta da 12 maschi e 8 femmine, viene scelto a caso un gruppo di 8 studenti. Qual è la probabilità che, in tale gruppo, vi siano esattamente 4 studentesse?

Possiamo calcolare la probabilità come il numero di casi favorevoli sui casi totali.

I casi totali sono il numero della combinazioni semplici di classe 8 che si possono comporre con i venti studenti della classe, per cui $N_T=C_{(20,8)}=\binom{20}{8}=125970$. I casi possibili sono prodotto del numero di combinazioni semplici di classe 4 che si possono comporre con le otto ragazze, espresso dal coefficiente binomiale $\binom{8}{4}$, moltiplicato per il numero della combinazioni semplici di classe 4 che si possono comporre con i 12 studenti maschi, dato da $\binom{12}{4}$.

Pertanto $N_P=C_{(12,4)}\cdot C_{(8,4)}=\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4}=495\cdot 70=34650$

Quindi la probabilità richiesta è $p=\frac{34650}{125970}=\frac{1155}{4199}\cong 0.275$.

In realtà la probabilità richiesta poteva essere calcolata anche come prodotto delle combinazioni semplici di classe 4 che si possono comporre con le otto ragazze, espresso dal coefficiente binomiale $C_{(8,4)}=\binom{8}{4}=70$ e la probabilità di estrarre esattamente 4 studentesse e 4 studenti. La probabilità di estrarre esattamente 4 studentesse e 4 studenti è $p_{4SF,4SM} = \left(\frac{8}{20}\cdot\frac{7}{19}\cdot\frac{6}{18}\cdot\frac{5}{17}\right)\cdot\left(\frac{12}{16}\cdot\frac{11}{15}\cdot\frac{10}{14}\cdot\frac{9}{13}\right) = \frac{19958400}{5079110400} = \frac{33}{8398}$ per cui $p = 70\cdot\frac{33}{8398} = \frac{33\cdot 35}{4199} = \frac{1155}{4199} \cong 0.275$

Quesito 10

Qual è l'equazione della curva simmetrica rispetto all'origine di $y = e^{-2x}$? Quale quella curva simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante?

La simmetrica rispetto all'origine si calcola tramite la trasformazione $\begin{cases} y' = -y \\ x' = -x \end{cases}$ per cui $y' = -e^{2x'}$.

La simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante di equazione $y = x$ si calcola tramite la trasformazione $\begin{cases} y' = x \\ x' = y \end{cases}$ per cui $x' = e^{-2y'}$ da cui ricaviamo $y' = -\frac{1}{2}\ln x'$. $y = -\frac{1}{2}\ln x$