Sessione ordinaria 2007

Seconda prova scritta

Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sia a un numero reale maggiore di zero e sia g la funzione definita, per ogni $x \in R$, da: $g(x) = a^x + a^{-x}$.

1. Si dimostri che, se $a \neq 1$, g è strettamente crescente per $x > 0$ e strettamente decrescente per $x < 0$.
2. Posto $a = e$, si disegni il grafico della funzione $f(x) = e^x + e^{-x}$ e si disegni altresì il grafico della funzione $\dfrac{1}{f(x)}$.
3. Si calcoli $\displaystyle\int_0^t \frac{1}{f(x)}dx$; successivamente, se ne trovi il limite per $t \to \infty$ e si interpreti geometricamente il risultato.
4. Verificato che il risultato del limite di cui al punto precedente è $\dfrac{\pi}{4}$, si illustri una procedura numerica che consenta di approssimare tale valore.

PROBLEMA 2

Si considerino i triangoli la cui base è $AB = 1$ e il cui vertice C varia in modo che l'angolo $C\hat{A}B$ si mantenga doppio dell'angolo $A\hat{B}C$.

1. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto da C.
2. Si rappresenti γ, tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.
3. Si determini l'ampiezza dell'angolo $A\hat{B}C$ che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati AC e BC e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).
4. Si provi che se $A\hat{B}C = 36°$ allora è $AC = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno.
2. La regione del piano racchiusa tra il grafico della funzione $y = \ln x$ e l'asse x, con $1 \le x \le e$, è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte rettangoli aventi l'altezza tripla della base. Si calcoli il volume di S e se ne dia un valore approssimato a meno di 10^{-2}.
3. Si dimostri che l'insieme delle *omotetie* con centro O fissato è un *gruppo*.
4. Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

   Se ne spieghi l'importanza nelle applicazioni della matematica illustrando il significato di μ, σ, σ^2 e come tali parametri influenzino il grafico di $f(x)$.
5. Si consideri il teorema: «*la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto*» e si spieghi perché esso non è valido in un contesto di geometria *non-euclidea*. Quali le formulazioni nella geometria *iperbolica* e in quella *ellittica*? Si accompagni la spiegazione con il disegno.
6. Si scelga a caso un punto P all'interno di un triangolo equilatero il cui lato ha lunghezza 3. Si determini la probabilità che la distanza di P da ogni vertice sia maggiore di 1.
7. Si determini l'equazione del luogo geometrico dei centri delle circonferenze del piano tangenti alla parabola $y = x^2 + 1$ nel punto (1, 2).
8. A *Leonardo Eulero* (1707-1783), di cui quest'anno ricorre il terzo centenario della nascita, si deve il seguente problema: «Tre gentiluomini giocano insieme: nella prima partita il primo perde, a favore degli altri due, tanto denaro quanto ne possiede ciascuno di loro. Nella successiva, il secondo gentiluomo perde a favore di ciascuno degli altri due tanto denaro quanto essi già ne possiedono. Da ultimo, nella terza partita, il primo e il secondo guadagnano ciascuno dal terzo gentiluomo tanto denaro quanto ne avevano prima. A questo punto smettono e trovano che ciascuno ha la stessa somma, cioè 24 luigi. Si domanda con quanto denaro ciascuno si sedette a giocare».
9. Si dimostri che l'equazione $2x^3 - 3x^2 + 6x + 6 = 0$ ha un'unica radice reale e si trovi il suo valore con una precisione di due cifre significative.
10. Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a *meridiani* e a *paralleli*, a *latitudini* e a *longitudini*. Supponendo che la Terra sia una sfera *S* e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta *r* passante per il centro di *S*, come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 1

Sia a un numero reale maggiore di zero e sia g la funzione definita, per ogni $x \in R$, da: $g(x) = a^x + a^{-x}$.

1. Si dimostri che, se $a \neq 1$, g è strettamente crescente per $x > 0$ e strettamente decrescente per $x < 0$.
2. Posto $a = e$, si disegni il grafico della funzione $f(x) = e^x + e^{-x}$ e si disegni altresì il grafico della funzione $\dfrac{1}{f(x)}$.
3. Si calcoli $\displaystyle\int_0^t \frac{1}{f(x)}dx$; successivamente, se ne trovi il limite per $t \to \infty$ e si interpreti geometricamente il risultato.
4. Verificato che il risultato del limite di cui al punto precedente è $\dfrac{\pi}{4}$, si illustri una procedura numerica che consenta di approssimare tale valore.

SOLUZIONE

1)

La funzione $g(x) = a^x + a^{-x}$, $\forall a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ e $\forall x \in R$ è una funzione pari, continua, derivabile e sempre positiva, che non interseca mai l'asse delle ascisse, interseca quello delle ordinate in $(0,2)$ e che non presenta asintoti, né verticali, né orizzontali, né obliqui .

Gli asintoti verticali non si presentano visto che il dominio è l'intero asse reale; gli asintoti orizzontali nemmeno esistono perché $\lim_{x \to \pm\infty} \left[a^x + a^{-x}\right] = +\infty, \forall a \neq 1$. Gli asintoti obliqui nemmeno esistono perché $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\left[a^x + a^{-x}\right]}{x} \overset{H}{=} \lim_{x \to \pm\infty} \ln(a)\left[a^x - a^{-x}\right] = +\infty, \forall a \neq 1$.

Per la crescenza e decrescenza vanno distinti i due casi:

- $a \in (0,1)$;
- $a \in (1,+\infty)$,

Caso $a \in (0,1)$:

$$g'(x) = \ln(a)\left[a^x - a^{-x}\right]$$

In questo caso essendo $a \in (0,1)$ allora $\ln(a) < 0$, per cui

$$g'(x) = \ln(a)\left[a^x - a^{-x}\right] > 0 \to \left[a^x - a^{-x}\right] < 0 \to a^x < a^{-x}$$

Ora ricordando che nel caso di disequazioni esponenziali, se la base è un numero appartenente all'intervallo $(0,1)$, il verso della disequazione cambia allora si ha:

$$a^x < a^{-x} \Leftrightarrow x > -x \to x > 0$$

Quindi per $a \in (0,1)$ la funzione è strettamente crescente in $(0,+\infty)$ e strettamente decrescente in $(-\infty,0)$.

Caso $a \in (1,+\infty)$:

$$g'(x) = \ln(a)\left[a^x - a^{-x}\right]$$

In questo caso essendo $a \in (1,+\infty)$ allora $\ln(a) > 0$, per cui

$$g'(x) = \ln(a)\left[a^x - a^{-x}\right] > 0 \to \left[a^x - a^{-x}\right] > 0 \to a^x > a^{-x}$$

Ora ricordando che nel caso di disequazioni esponenziali, se la base è un numero appartenente all'intervallo $(1,+\infty)$, il verso della disequazione non cambia allora si ha:

$$a^x > a^{-x} \Leftrightarrow x > -x \to x > 0$$

Quindi per $a \in (1,+\infty)$ la funzione è strettamente crescente in $(0,+\infty)$ e strettamente decrescente in $(-\infty,0)$.

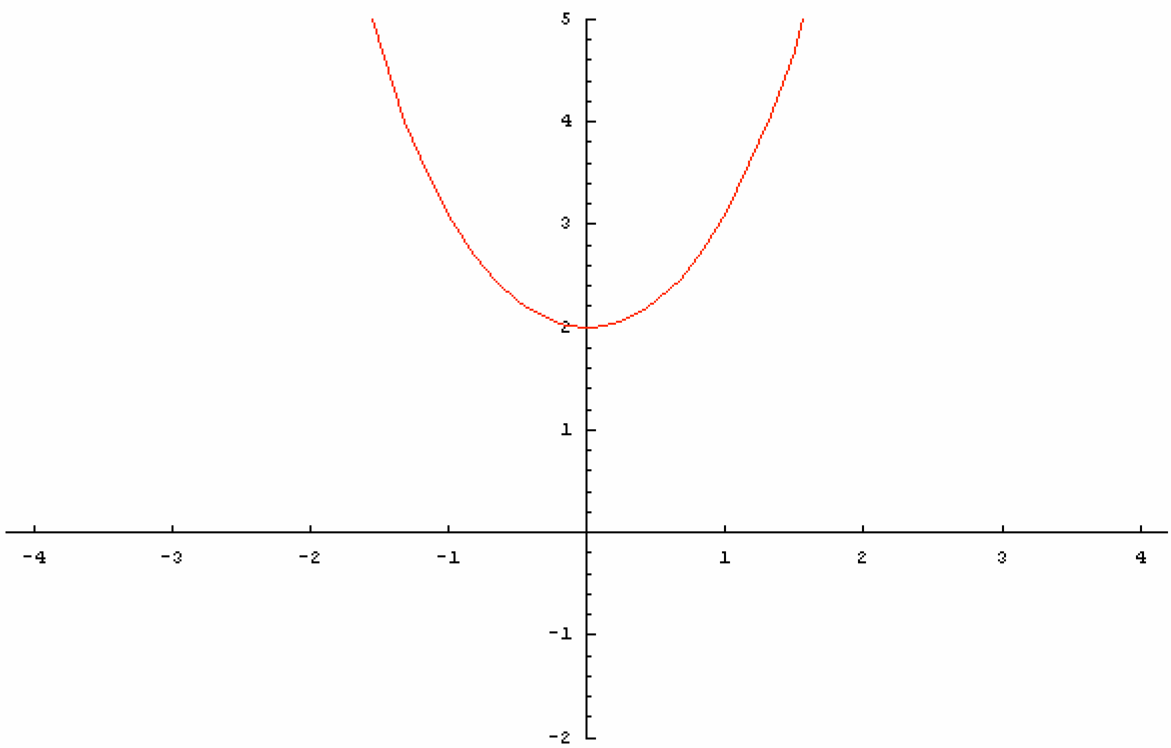
Quindi abbiamo dimostrato che $\forall a \neq 1$ la funzione $g(x) = a^x + a^{-x}$ è strettamente crescente in $(0,+\infty)$ e strettamente decrescente in $(-\infty,0)$.

Inoltre $\forall a \neq 1, g''(x) = \ln^2(a) g(x) > 0 \forall x \in R$, per cui la funzione in esame presenta un minimo relativo ed assoluto nel punto $(0,2)$ e presenta concavità sempre rivolta verso l'alto.

2)

La funzione da discutere è $y = f(x) = e^x + e^{-x}$. Questa funzione appartiene alla casistica dei casi $a \in (1,+\infty)$. Le proprietà di una siffatta funzione sono state prima evidenziate, per cui il grafico è immediato ed è di seguito riportato:

$$y = f(x) = e^x + e^{-x}$$



Sia ora $h(x)=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{e^{x}+e^{-x}}=\frac{e^{x}}{e^{2x}+1}$

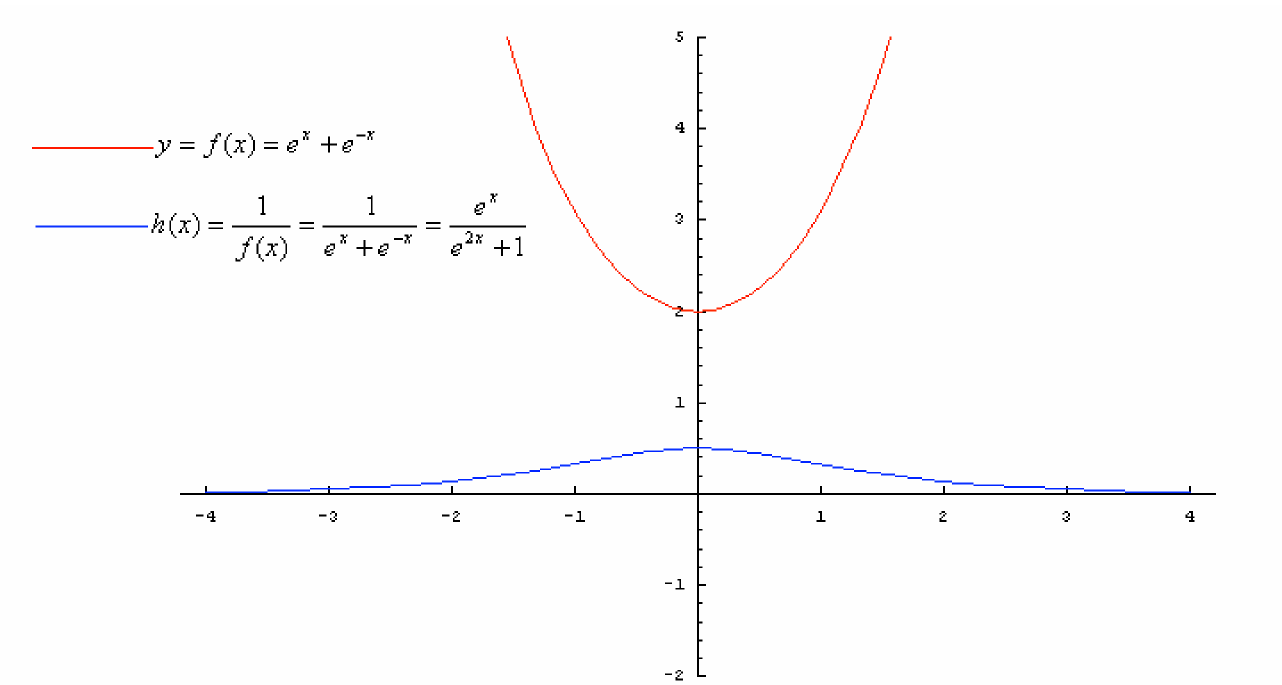
Questa funzione come la sua reciproca, è definita e continua su tutto l'asse reale, non interseca mai l'asse delle ascisse, interseca quello delle ordinate in $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, è sempre positiva, non presenta asintoti, né verticali, né obliqui .
Gli asintoti verticali non si presentano visto che il dominio è l'intero asse reale; gli asintoti orizzontali esistono ed in realtà a destra e sinistra coincidono. Infatti $\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{e^{x}}{e^{2x}+1}\right]=0$, per cui l'asintoto orizzontale destro e sinistro è la retta coincidente con l'asse delle ascisse, cioè $y=0$.
Vediamo ora la crescenza e decrescenza:

$$h'(x)=-\frac{e^{x}-e^{-x}}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}}>0\to e^{x}-e^{-x}<0\to e^{x}<e^{-x}\to x<-x\to x<0$$

Cioè la funzione è strettamente crescente nell'intervallo $(-\infty,0)$ e strettamente decrescente nell'intervallo $(0,+\infty)$ ed in $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ assume un massimo relativo ed assoluto.

Rappresentiamo i grafici di $y=f(x)=e^{x}+e^{-x}$ ed $h(x)=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{e^{x}+e^{-x}}=\frac{e^{x}}{e^{2x}+1}$ in un unico sistema di riferimento:

.



3)

Il calcolo dell'integrale $I(t)=\int_0^t \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$ lo si effettua tramite preventiva sostituzione:

$$e^x = y \to dy = e^x dx$$
$$x = 0 \to y = 1$$
$$x = t \to y = e^t$$

Per cui

$$I(t)=\int_0^t \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx=\int_1^{e^t}\frac{1}{y^2+1}dy=\left[\arctan(y)\right]_1^{e^t}=\arctan\left(e^t\right)-\arctan(1)=\arctan\left(e^t\right)-\frac{\pi}{4}$$

Ora

$$\lim_{t\to+\infty} I(t)=\lim_{t\to+\infty}\left[\arctan\left(e^t\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\lim_{t\to+\infty}\arctan\left(e^t\right)-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

E questo limite geometricamente rappresenta l 'area sottesa dalla curva $h(x)=\frac{e^x}{e^{2x}+1}$ nell'intervallo $(0,+\infty)$.

4)

Per il calcolo di $\frac{\pi}{4}$ si possono seguire differenti strade, che presentiamo di seguito.

- Utilizzo dello sviluppo di Taylor della funzione $y=\arctan(x)$:

secondo questo sviluppo possiamo scrivere la funzione $y=\arctan(x)$ in questo modo:

$$y=\arctan(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left[(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right]$$

Per cui

$$\arctan(1)=\frac{\pi}{4}=\sum_{k=0}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^k}{2k+1}\right]=\lim_{h\to+\infty}\sum_{k=0}^{h}\left[\frac{(-1)^k}{2k+1}\right]$$

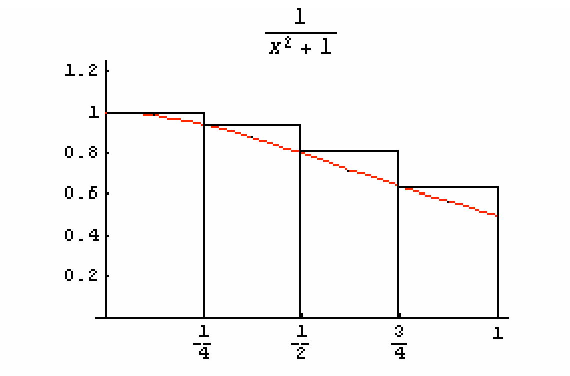
E cioè il valore lo si calcola come somma di valori numerici del tipo $\sum_{k=0}^{h}\left[\frac{(-1)^k}{2k+1}\right]$ al tendere di $h\to+\infty$.

- Utilizzo della relazione per cui $\frac{\pi}{4}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$

Si può utilizzare l'approssimazione per rettangoli, che si traduce in:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{n}\left[f(x_0)+f(x_1)+\cdots f(x_{n-1})\right]$$

Nel nostro caso utilizzeremo n=4 rettangoli con intervalli uguali come evidenzia la figura sottostante:



Per cui

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \cong \frac{1}{4}\left[1+\frac{1}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}\right] \cong 0.845$$

Valor che si avvicina sempre più al valore effettivo al crescere degli intervalli considerati.

- Procedura numerica al calcolatore.

Dal calcolo fatto in precedenza sappiamo che $I(t)=\int_0^t \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \arctan\left(e^t\right)-\frac{\pi}{4}$. L'errore che si può commettere approssimando il valore di $\frac{\pi}{4}$ con l'integrale $I(t)=\int_0^t \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \arctan\left(e^t\right)-\frac{\pi}{4}$ è $\Delta_t = \frac{\pi}{4}-\left(\arctan\left(e^t\right)-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}-\arctan\left(e^t\right)$.

Supponiamo ora di far variare il parametro t nel campo degli interi, cioè i possibili valori assumibili da t sono $t=0,1,2,3,\cdots\cdots$. Questa assunzione è fondamentale per poter applicare la procedura iterativa che illustreremo.

La procedura seguita è una procedura iterativa che ad ogni iterazione minimizza l'errore compiuto nell'approssimare il valore di $\frac{\pi}{4}$ con l'integrale $I(t)=\int_0^t \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \arctan\left(e^t\right)-\frac{\pi}{4}$. La metrica utilizzata va a minimizzare il valore Δ_t, al variare di t negli interi e rispetto ad una soglia di errore fissata in partenza.

Per essere più chiari la procedura così funziona:

Parametri di ingresso:

1.) $t = 1$

Elaborazioni effettuate:

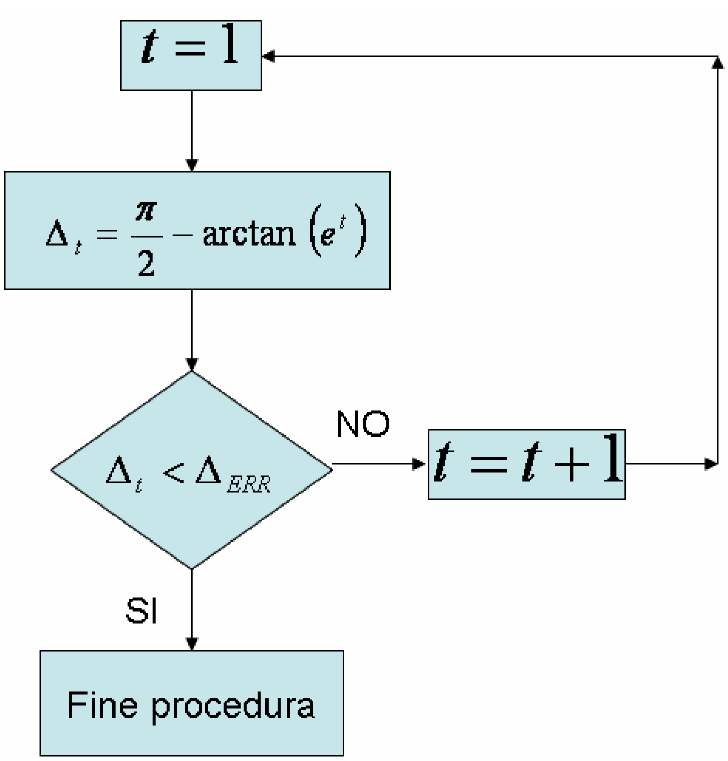
1.)Si calcola $\Delta_t = \frac{\pi}{4} - \left(\arctan\left(e^t\right) - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(e^t\right)$;

2.)Si fa il confronto con la soglia: se $\Delta_t < \Delta_{ERR}$ allora accettiamo come valore di approssimazione Δ_t e la procedura termina altrimenti:

2.1)t=t+1

2.2)La procedura inizia daccapo col valore aggiornato di t.

Ecco la procedura secondo uno schema a blocchi:



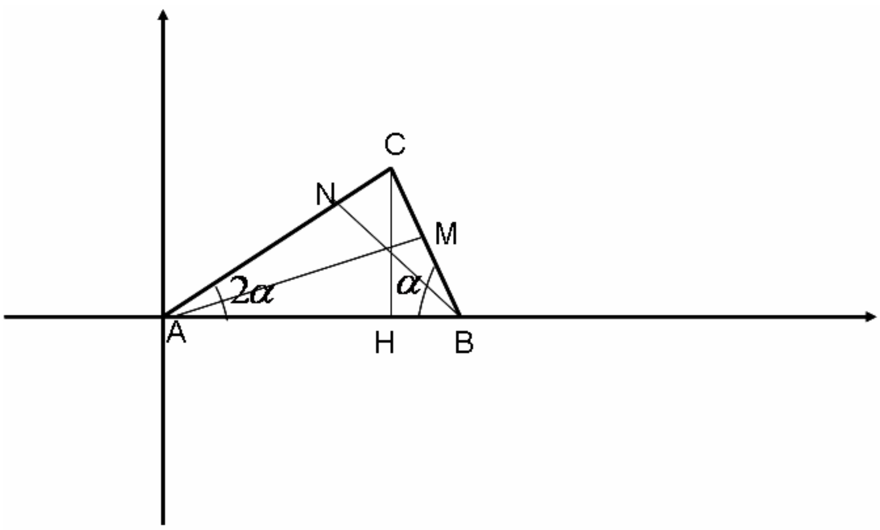
PROBLEMA 1

Si considerino i triangoli la cui base è $AB = 1$ e il cui vertice C varia in modo che l'angolo $C\hat{A}B$ si mantenga doppio dell'angolo $A\hat{B}C$.

1. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto da C.
2. Si rappresenti γ, tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.
3. Si determini l'ampiezza dell'angolo $A\hat{B}C$ che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati AC e BC e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).
4. Si provi che se $A\hat{B}C = 36°$ allora è $AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

SOLUZIONE

Consideriamo la seguente figura:



1)

Il punto C ha coordinate generiche $C = (x, y)$. Ma il triangolo AHC è rettangolo per cui $y = x\tan(2\alpha)$.

Ora applicando il teorema dei seni al triangolo ABC si ha:

$$\frac{AC}{\sin(\alpha)} = \frac{AB}{\sin(\pi - 3\alpha)} = \frac{1}{\sin(3\alpha)} \rightarrow$$

$$AC = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(3\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(2\alpha + \alpha)} =$$

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(2\alpha)\cos(\alpha) + \cos(2\alpha)\sin(\alpha)} =$$

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha)\left[2\cos^2(\alpha) + \cos(2\alpha)\right]} = \frac{1}{\left[4\cos^2(\alpha) - 1\right]} = \frac{1}{\left[2\cos(2\alpha) + 1\right]}$$

Ma vale anche che:

$$AH = x = AC\cos(2\alpha) = \frac{\cos(2\alpha)}{\left[2\cos(2\alpha)+1\right]} \to \cos(2\alpha) = \frac{x}{1-2x}$$

Quindi abbiamo due condizioni:

$$\begin{cases} \cos(2\alpha) = \dfrac{x}{1-2x} \\ \sin(2\alpha) = \dfrac{y}{x}\cos(2\alpha) = \dfrac{y}{1-2x} \end{cases}$$

Ricordando la relazione fondamentale

$$\begin{aligned} &\sin^2(2\alpha) + \cos^2(2\alpha) = 1 \to \\ &\left(\frac{y}{1-2x}\right)^2 + \left(\frac{x}{1-2x}\right)^2 = 1 \to \\ &x^2 + y^2 - (1-2x)^2 = 0 \to \\ &y^2 - 3x^2 + 4x - 1 = 0 \end{aligned}$$

Per cui si ha:

$$\gamma : y^2 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$$

Per capire di che curva si tratta riscriviamola in questo modo:

$$\begin{aligned} &y^2 - 3x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 - \left(3x^2 - 4x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow y^2 - 3\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \\ &y^2 - 3\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow y^2 - 3\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \\ &\frac{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{9}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1 \end{aligned}$$

Ora se effettuiamo una traslazione lungo l'asse delle ascisse cioè effettuiamo la trasformazione $x'' = x - \frac{2}{3}$ la curva diventa:

$$\gamma : \frac{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{9}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1 \to \gamma'' : \frac{(x'')^2}{\frac{1}{9}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$$

cioè otteniamo la classica iperbole con asintoti $y = \pm x\sqrt{3}$. Per cui la nostra curva è una iperbole traslata con asintoti $y = \pm\sqrt{3}\left(x - \frac{2}{3}\right)$

2)

Il problema impone però delle limitazioni geometriche.

Innanzitutto deve essere $0° \le \alpha \le 60°$. Ora poiché il coseno in questo intervallo è decrescente allora

$$0° \le \alpha \le 60° \Leftrightarrow 0 \le 2\alpha \le 120° \to \cos(120°) \le \cos(2\alpha) \le \cos(0°) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le \cos(2\alpha) \le 1$$

Ma

$$\cos(2\alpha) = \frac{x}{1-2x} \to -\frac{1}{2} \le \frac{x}{1-2x} \le 1 \to$$

$$\begin{cases} \frac{x}{1-2x} \le 1 \\ \frac{x}{1-2x} \ge -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x-1}{1-2x} \le 0 \\ \frac{1}{1-2x} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \frac{1}{3}, x > \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x \le \frac{1}{3}$$

Inoltre per come introdotto il sistema di riferimento deve aversi $y \ge 0$, quindi il nostro problema va discusso per

$$\begin{cases} x \le \frac{1}{3} \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Ricaviamo ora la funzione $y = f(x)$ dalla curva $\gamma : y^2 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$.

Si ha:

$$y = \pm\sqrt{3x^2 - 4x + 1}$$

Ma con la limitazione $y \ge 0$ la soluzione da prendere è quella positiva per cui la nostra funzione è

$$y = \sqrt{3x^2 - 4x + 1}$$

Studiamo allora la funzione $y = \sqrt{3x^2 - 4x + 1}$ con la limitazione $x \le \frac{1}{3}$

Dominio: $3x^2 - 4x + 1 = (3x-1)(x-1) \ge 0 \to x \ge 1 \cup x \le \frac{1}{3}$ che con la limitazione $x \le \frac{1}{3}$ impone come dominio $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$;

Intersezioni asse ascisse: $y = \sqrt{3x^2 - 4x + 1} = 0 \to 3x^2 - 4x + 1 = 0 \to x = 1, x = \frac{1}{3}$ e con la limitazione l'unica intersezione è $x = \frac{1}{3}$;

Intersezioni asse delle ordinate: $x = 0 \to y = 1$**;**

Positività: nel dominio la funzione è sempre positiva visto che si tratta di una funzione radice;

Asintoti verticali: non ce ne sono;

Asintoti orizzontali: non ce ne sono. Infatti $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{3x^2 - 4x + 1} = +\infty$;

Asintoti obliqui:

$$y = mx + q$$

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{3x^2 - 4x + 1}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|\sqrt{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = -\sqrt{3}$$

$$q = \lim_{x \to -\infty} \left[\sqrt{3x^2 - 4x + 1} + x\sqrt{3}\right] = \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{-4x + 1}{\sqrt{3x^2 - 4x + 1} - x\sqrt{3}}\right] = \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{-4x + 1}{-x\sqrt{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} - x\sqrt{3}}\right] = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

per cui l'asintoto è unico ed è pari a $y = -\sqrt{3}x + \frac{2}{\sqrt{3}}$ come già anticipato. L'altro asintoto non lo abbiamo calcolato e ritrovato perché abbiamo la limitazione $x \le \frac{1}{3}$

Crescenza e decrescenza:.

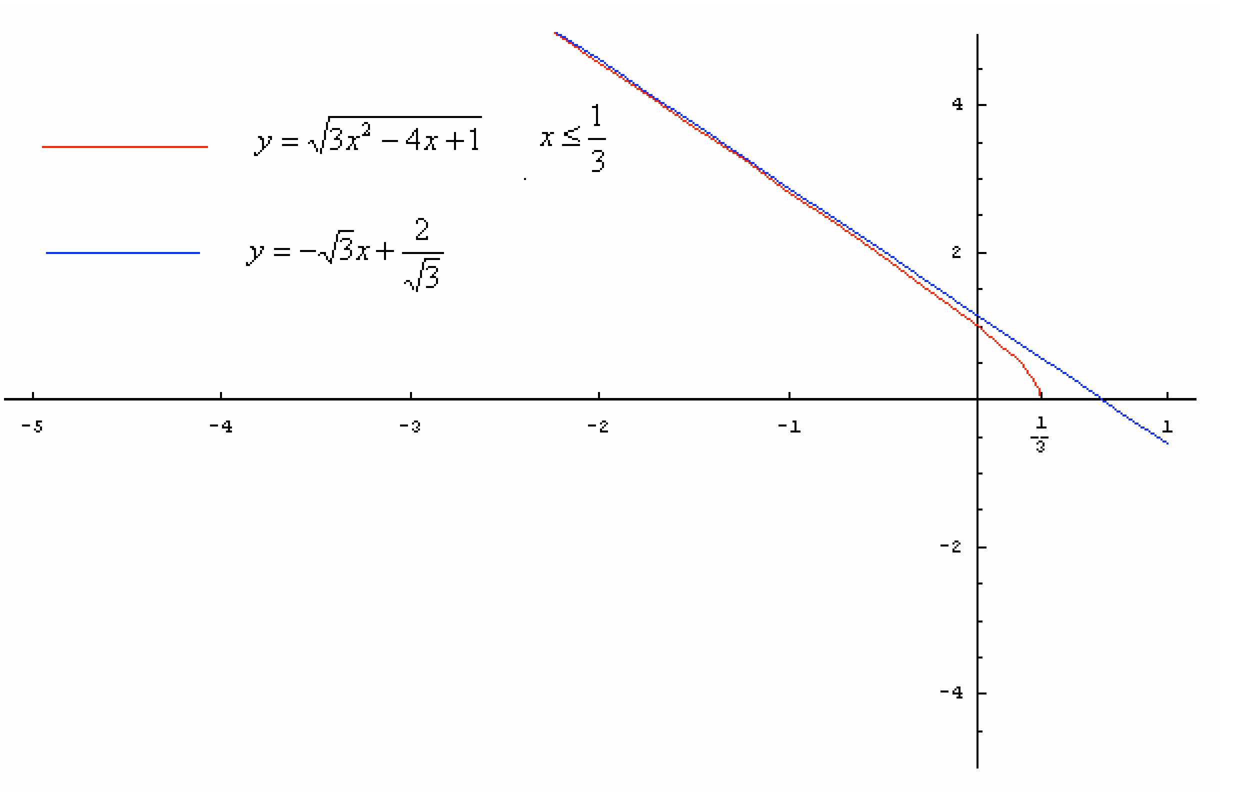
Calcoliamo le derivate:

$y'(x) = \frac{3x-2}{\sqrt{3x^2-4x+1}} > 0 \to x \in (1,+\infty)$ tenendo conto del dominio di definizione.

Per cui la funzione è crescente nell' intervallo $x \in (1,+\infty)$ e decrescente altrove. Poiché abbiamo la limitazione geometrica $x \le \frac{1}{3}$ allora la nostra funzione è sempre decrescente.

Inoltre essa non è derivabile in $x = \frac{1}{3}$ perché $\lim_{x \to \frac{1}{3}^-} y'(x) = \lim_{x \to \frac{1}{3}^+} y'(x) = -\infty$.

Il grafico è sotto presentato:



In realtà va fatta una ulteriore considerazione. Se scegliamo il sistema di riferimento in modo da avere il triangolo col vertice che spazia nel terzo e quarto quadrante otteniamo l'altra soluzione, precedentemente scartata. Cioè otteniamo che il luogo in quel caso è descritto dall'equazione

$$y = -\sqrt{3x^2-4x+1}$$

che è la simmetrica di $y=\sqrt{3x^2-4x+1}$ rispetto all'asse delle ascisse. In tal caso è importante controllare che l'asintoto verticale abbia equazione $y=\sqrt{3}x-\frac{2}{\sqrt{3}}$ come dedotto dall'equazione dell'iperbole.

Ed infatti

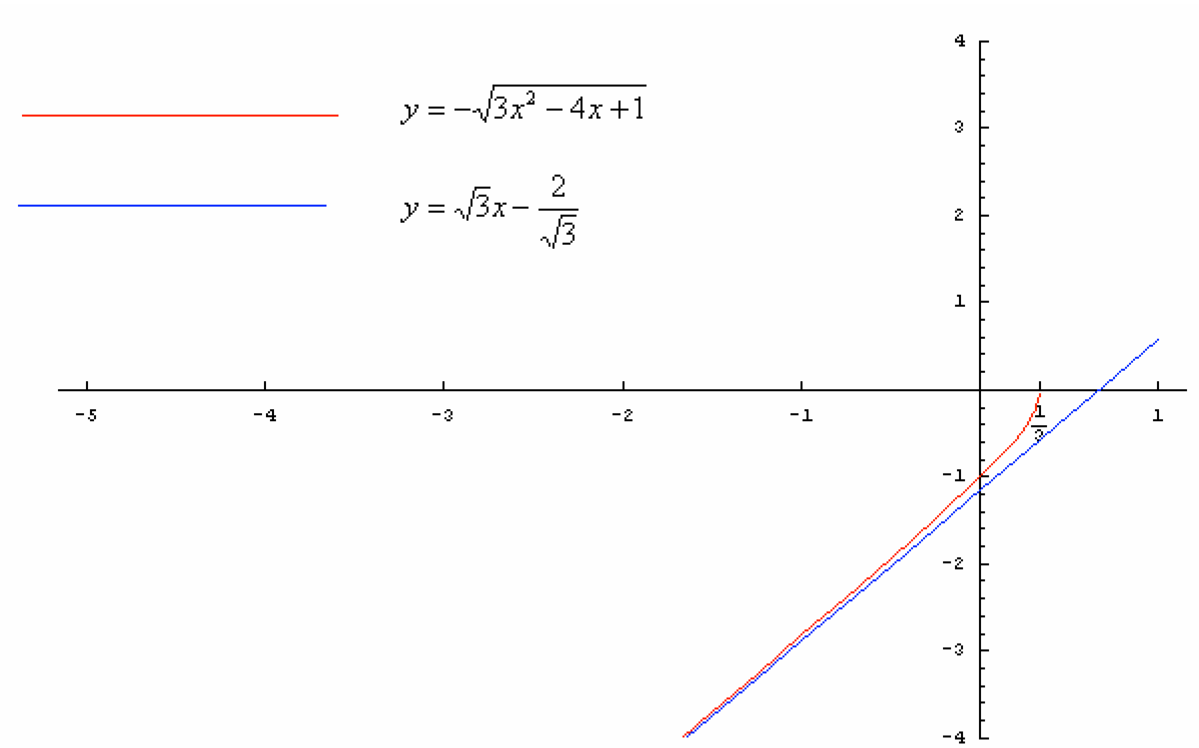
$$y=mx+q$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{3x^2-4x+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-|x|\sqrt{3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt{3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=\sqrt{3}$$

$$q=\lim_{x\to-\infty}\left[-\sqrt{3x^2-4x+1}-x\sqrt{3}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-4x+1}{-\sqrt{3x^2-4x+1}+x\sqrt{3}}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-4x+1}{x\sqrt{3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}-x\sqrt{3}}\right]=-\frac{2}{\sqrt{3}}$$

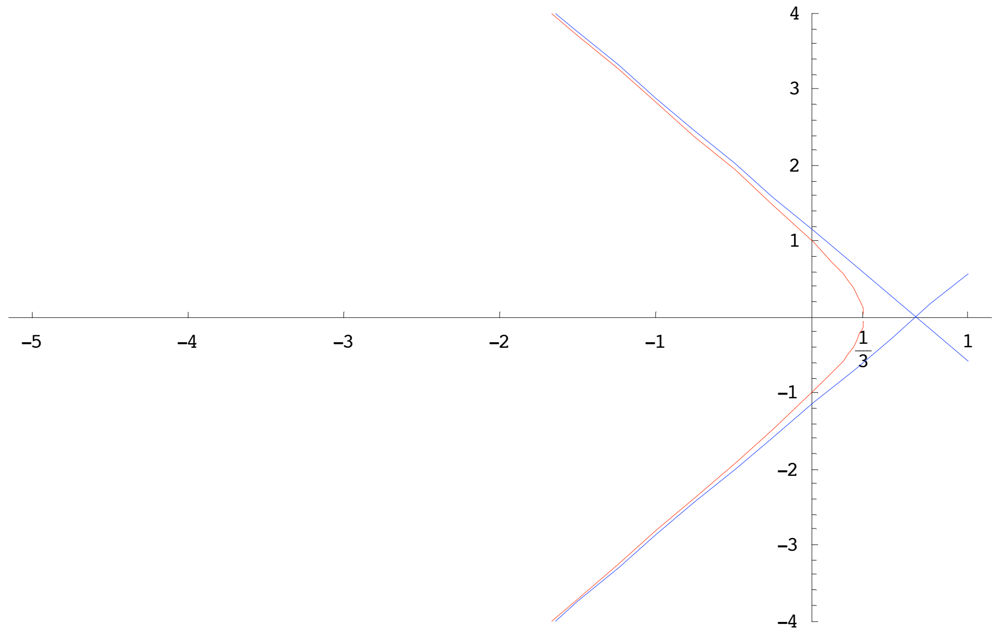
per cui l'asintoto è unico ed è pari a $y=\sqrt{3}x-\frac{2}{\sqrt{3}}$ come già anticipato.

In conclusione in tal caso il grafico è:



Se mettiamo assieme i due grafici otteniamo il ramo di iperbole ottenuto dal sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{9}} - \dfrac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1 \\ x \le \dfrac{1}{3} \end{cases}$$



come sin dall'inizio evidenziato.

Abbiamo preferito fare tutti i calcoli perché era l'unica strada da perseguire se non ci si accorgeva che con una semplice traslazione ottenevamo una iperbole. E' stato un modo per confermare i risultati da un altro punto di vista.

3)

Considerando la figura di partenza si ha:

$AM = AB\sin(\alpha) = \sin(\alpha)$

$BN = AB\sin(2\alpha) = \sin(2\alpha)$

Per cui la funzione da massimizzare è $S(\alpha) = \sin^2(\alpha) + \sin^2(2\alpha)$.

Calcoliamo le derivate:

$$S'(\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) + 4\sin(2\alpha)\cos(2\alpha) = \sin(2\alpha)\left[1 + 4\cos(2\alpha)\right]$$
$$S''(\alpha) = 2\cos(2\alpha) + 8\cos(4\alpha)$$

Il segno lo si discute sempre discutendo singolarmente ogni fattore, ricordando la limitazione $0° \le \alpha \le 60°$:

$$\sin(2\alpha) > 0 \to k\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + k\pi$$
$$\cos(2\alpha) > -\frac{1}{4} \to k\pi < \alpha < \frac{1}{2} ar\cos\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi \cup \left(\pi - \frac{1}{2} ar\cos\left(-\frac{1}{4}\right)\right) + k\pi < x < \pi + k\pi$$

e limitandoci in $0° \le \alpha \le 60°$ si ha:

$$S'(\alpha) > 0 \to 0 < \alpha < \frac{1}{2} ar\cos\left(-\frac{1}{4}\right)$$
$$S''\left(\frac{1}{2} ar\cos\left(-\frac{1}{4}\right)\right) < 0$$

per cui il valore che massimizza la funzione $S(\alpha) = \sin^2(\alpha) + \sin^2(2\alpha)$ è

$$\alpha = \frac{1}{2} ar\cos\left(-\frac{1}{4}\right) \cong 52°13'$$

4)

Per dimostrare l'ultima questione ci serviamo di relazioni trigonometriche fondamentali:

$$\sin(72°) = 2\sin(36°)\cos(36°)$$
$$\sin(36°) = 2\sin(18°)\cos(18°)$$
$$\cos(36°) = 1 - 2\sin^2(18°)$$
$$\sin(72°) = \sin(90° - 18°) = \cos(18°)$$

Da queste ricaviamo:

$$4\sin(18°)\cos(18°)\left[1 - 2\sin^2(18°)\right] = \cos(18°) \to 4\sin(18°)\left[1 - 2\sin^2(18°)\right] = 1$$

Poniamo ora $x = \sin(18°)$, allora:

$$4\sin(18°)\left[1-2\sin^2(18°)\right]=1 \rightarrow 4x(1-2x^2)=1 \rightarrow 8x^3-4x+1=0 \rightarrow$$
$$(2x-1)(4x^2+2x-1)=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}, x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

Ora la soluzione $x=\frac{1}{2}$ non è accettabile perché a 30° il seno vale $\frac{1}{2}$. Inoltre la soluzione $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ va scartata perché riguarda un angolo che non si trova nel primo quadrante, in cui si trova invece 18°. Per cui in conclusione si ha

$$\sin(18°)=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

Ora

$$AC=\frac{1}{\left[4\cos^2(36°)-1\right]}=\frac{1}{\left[4\cos^2(2*18°)-1\right]}=\frac{1}{\left[4\left(\cos^2(18°)-\sin^2(18°)\right)^2-1\right]}=$$
$$\frac{1}{\left[4\left(1-2\sin^2(18°)\right)^2-1\right]}=\frac{1}{\left[4\left(1-2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2\right)^2-1\right]}=\frac{1}{\left[4\left(1-\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{8}\right)\right)^2-1\right]}=$$
$$\frac{1}{\left[4\left(\frac{2+2\sqrt{5}}{8}\right)^2-1\right]}=\frac{1}{\left[\left(\frac{24+8\sqrt{5}}{16}\right)-1\right]}=\frac{16}{8+8\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

QUESTIONARIO

1. Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno.

Soluzione

Il problema della quadrature del cerchio consiste nel trovare con riga e compasso solamente un quadrato avente la stessa area di un dato cerchio. Questo equivale a costruire un quadrato di lato $l = \sqrt{\pi r^2} = r\sqrt{\pi}$. Ma questo non è possibile visto che, come ha dimostrato Lindermann nel 1882, il numero π (e quindi la sua radice) è un numero trascendente.

2. La regione del piano racchiusa tra il grafico della funzione $y = \ln x$ e l'asse x, con $1 \le x \le e$, è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte rettangoli aventi l'altezza tripla della base. Si calcoli il volume di S e se ne dia un valore approssimato a meno di 10^{-2}.

Soluzione

Il rettangolo avrà altezza triplo della base e quindi pari a $3\ln(x)$, per cui la sua area sarà $A = 3\ln^2(x)$, da cui il suo volume sarà:

$$V = \int_1^e 3\ln^2(x)dx = 3\int_1^e \ln^2(x)dx$$

Ora applicando due volte consecutive il teorema di integrazione per parti si ha:

$$\int \ln^2(x)dx = x\ln^2(x) - 2\int \ln(x)dx = x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + \int 2dx = x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x + k$$

Per cui

$$V = \int_1^e 3\ln^2(x)dx = 3\int_1^e \ln^2(x)dx = 3\left[x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x\right]_1^e = 3\left[e - 2e + 2e - 2\right] = 3e - 6$$

Un valore approssimato con due cifre significative è:

$$V \approx 3(2.71) - 6 \approx 2.13$$

3. Si dimostri che l'insieme delle *omotetie* con centro O fissato è un *gruppo*.

Soluzione

Un'omotetia di centro O fissato non è altro che un'applicazione T_λ che dato un punto P distante da O di una quantità d, manda questo stesso punto in un punto Q giacente sulla stessa semiretta OP distante λd dal centro O.

L'insieme delle omotetie di centro O e $\lambda > 0$ è un gruppo. Infatti gode delle seguenti proprietà:

- Associativa:

$$\forall\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3>0, T_{\lambda_1}\left(T_{\lambda_2}*T_{\lambda_3}\right)=\left(T_{\lambda_1}*T_{\lambda_2}\right)T_{\lambda_3}$$

Infatti la trasformazione $T_{\lambda_1}\left(T_{\lambda_2}*T_{\lambda_3}\right)$ porterà il punto P distante d dal centro O prima ad una distanza $\lambda_1\lambda_2 d$ e poi ad una distanza $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 d$ in un punto Q giacente sulla stessa semiretta OP. Analogamente dicasi per la trasformazione $\left(T_{\lambda_1}*T_{\lambda_2}\right)T$.

- Esistenza elemento neutro:

Tale elemento è $\lambda=1$, infatti dato $\mu>0$ si ha

$$T_1T_\mu=T_\mu T_1=T_\mu$$

In quanto la trasformazione T_1 manda il punto P in se stesso.

- Esistenza dell'inversa.

L'inversa di T_λ è la trasformazione $T_{\lambda^{-1}}$, infatti $T_\lambda T_{\lambda^{-1}}=T_{\lambda^{-1}}T_\lambda=Id$ con I l'applicazione identica, dal momento che la trasformazione T_λ porta P ad una distanza λd dal centro O e la trasformazione $T_{\lambda^{-1}}$ lo porta ad una distanza $(\lambda d)\lambda^{-1}=d$.

In particolare si dimostra che questo gruppo è abeliano.

Un ulteriore modo per dimostrare quanto appena dimostrato è notare che la omotetia di centro O fissato (supponiamo di stare nel piano e di prendere O=(0,0) senza ledere la generalità della dimostrazione) manda un punto P del piano di coordinate (x,y) nel punto $Q=(x',y')=(\lambda x,\lambda y)$ cioè effettua la trasformazione $\begin{cases}x'=\lambda x\\ y'=\lambda y\end{cases}$. Questa trasformazione può essere messa in forma matriciale in questo modo:

$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

In cui la matrice di trasformazione è $T=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$ ed è diagonale.

Ora il prodotto di due matrici diagonali è ancora una matrice diagonale, la matrice identità $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ è l'elemento neutro e $\forall\lambda\neq 0, T^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda} & 0\\ 0 & \frac{1}{\lambda}\end{bmatrix}$. Abbiamo così di nuovo dimostrato che l'insieme delle omotetie di centro fissato O è un gruppo.

4. Si consideri la funzione:

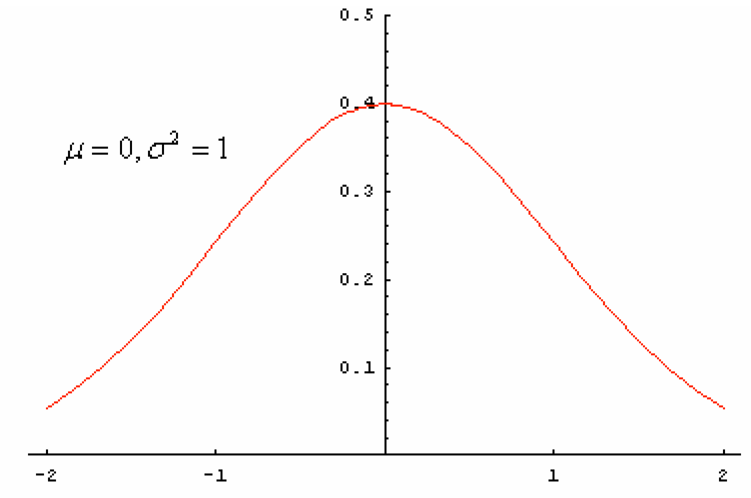
$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Se ne spieghi l'importanza nelle applicazioni della matematica illustrando il significato di μ, σ, σ^2 e come tali parametri influenzino il grafico di $f(x)$.

Soluzione

La funzione presentata non è altro che una densità di probabilità notissima; infatti essa rappresenta la densità di probabilità di una variabile aleatoria gaussiana o normale di media μ e varianza σ^2.

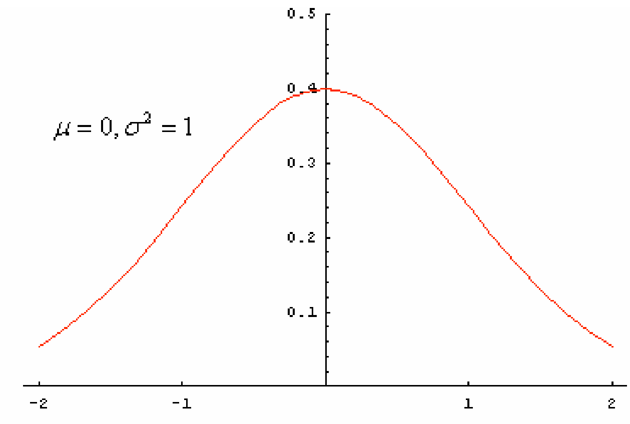
Essendo una densità di probabilità essa avrà area sottesa nulla cioè $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}dx=1$. Questa funzione viene più volte riferita come campana di Gauss vista la sua forma a campana:

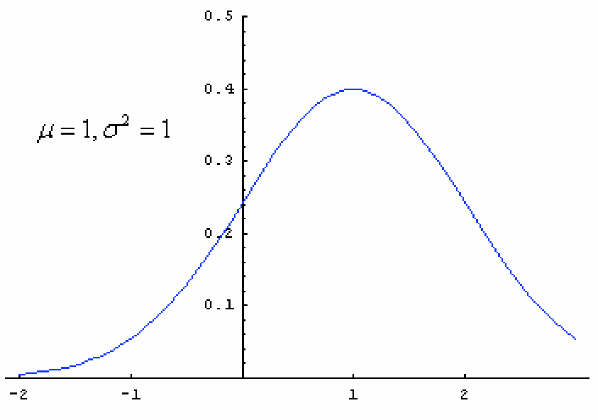


Una tale funzione, visto il suo vastissimo uso è gabellata numericamente. In particolare esistono tabelle che $\forall x\in R$ contengono i valori dell'integrale $Q(x)=\int_{x}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}dx$. Questo integrale non è altro che la probabilità che una variabile aleatoria gaussiana $X=N(\mu,\sigma^2)$ assuma valori maggiori di x, cioè $Q(x)=\int_{x}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}dx=\Pr(X\geq x)$.

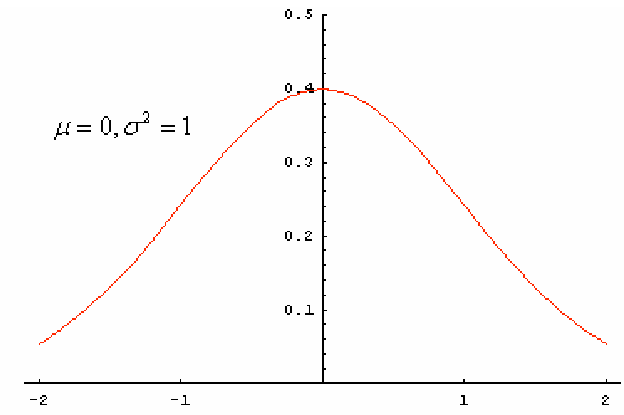
Una tale densità di probabilità presenta come parametri caratteristici la media μ, la varianza σ^2 e la deviazione standard σ definita come la radice quadrata della varianza. Discutiamo ora il significato della media μ e della varianza al variare dell'una e fissata l'altra.

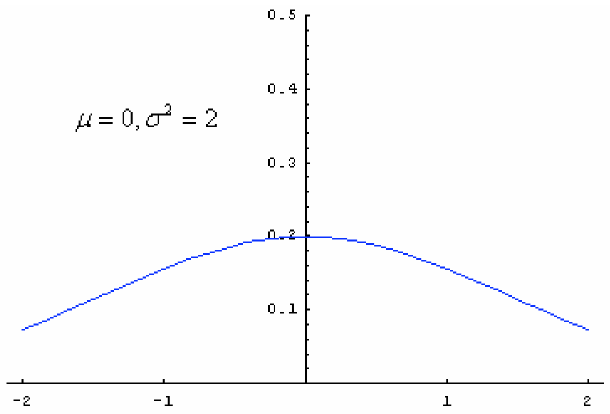
- Fissata la varianza σ^2, al variare della media μ la forma della campana non muta, ma trasla lungo l'asse delle ascisse. Infatti $x=\mu$ è asse di simmetria per la densità ed in corrispondenza di $x=\mu$ la densità assume valore massimo pari a $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.





- Fissata la media μ, al variare della varianza σ^2, la densità cambia forma. Infatti al decrescere della varianza σ^2 (e quindi di σ) la campana si restringe sempre più, il massimo raggiunto per $x = \mu$ aumenta, e la campana tende a diventare una delta di Dirac centrata in $x = \mu$ quando $\sigma^2 \to 0$. Viceversa al crescere di σ^2 (e quindi di σ) la campana si allarga sempre più, il suo massimo diminuisce, fino a che la densità tende a coincidere con l'asse delle ascisse se $\sigma^2 \to \infty$. Infatti in tal caso il valore massimo è nullo. Questo ci fa pensare che la deviazione standard e la varianza siano degli indici di come si distribuiscono i valori intorno alla media.

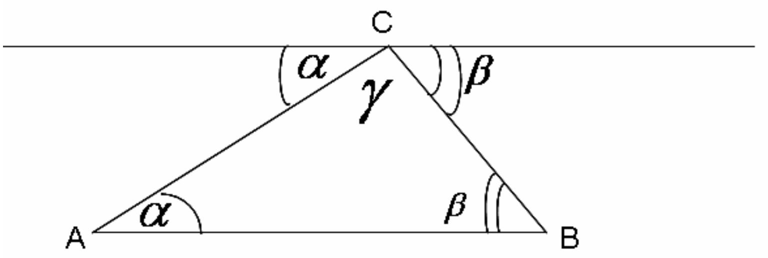




5. Si consideri il teorema: «*la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto*» e si spieghi perché esso non è valido in un contesto di geometria *non-euclidea*. Quali le formulazioni nella geometria *iperbolica* e in quella *ellittica*? Si accompagni la spiegazione con il disegno.

Soluzione

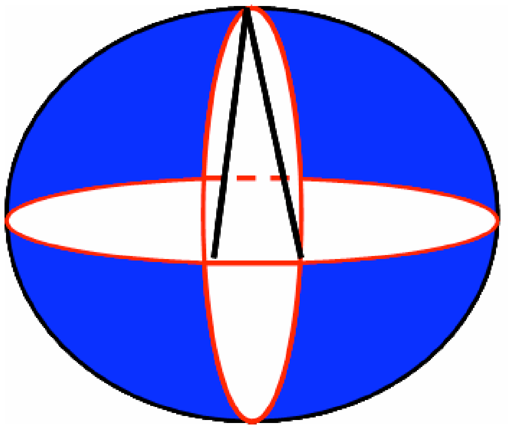
Nella geometria euclidea, l'asserto è dimostrabile sfruttando la proprietà che per un punto passa una sola retta parallela ad una retta data:



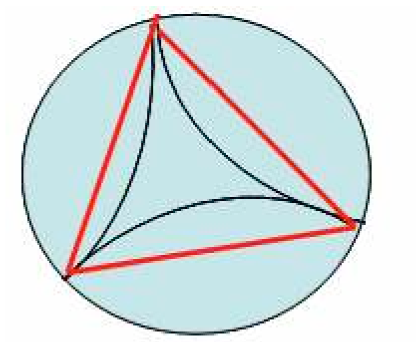
Per i teoremi sull'uguaglianza di angoli alterni interni per rette parallele, si ha l'uguaglianza degli angoli in figura da cui $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

In un contesto non euclideo si possono avere due possibilità:

- Geometria ellittica: la parallela dal vertice non esiste e la somma degli angoli interni è maggiore dell'angolo piatto, ed i lati non sono segmenti ma archi di circonferenza:



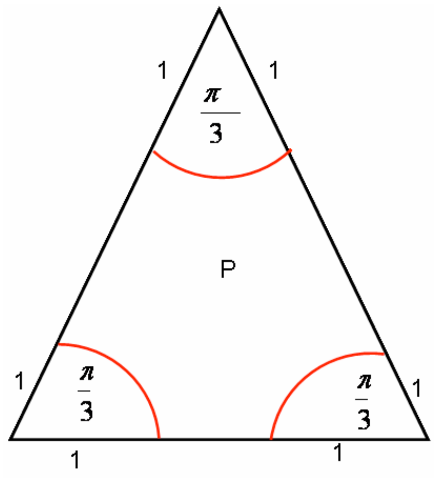
- Geometria iperbolica: la parallela dal vertice esiste e non è unica, e la somma degli angoli interni è minore dell'angolo piatto, ed i lati non sono segmenti ma archi di iperboli perpendicolari al cerchio esterno:



6. Si scelga a caso un punto P all'interno di un triangolo equilatero il cui lato ha lunghezza 3. Si determini la probabilità che la distanza di P da ogni vertice sia maggiore di 1.

Soluzione

La probabilità in questione possiamo calcolarla, vista la scelta casuale del punto P, come rapporto tra l'area della regione in cui in punto P deve stare per essere distante più di 1 da ogni vertice e l'area totale del triangolo equilatero. L'area del triangolo equilatero è $\frac{3^2\sqrt{3}}{4}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$. Per calcolare l'area di interesse consideriamo la figura seguente:



Il punto P non deve trovarsi in uno dei tre settori circolari di raggio 1 ed apertura angolare $\frac{\pi}{3}$. L'area coperta da ogni settore angolare suddetto è $\frac{\pi}{6}$, per cui l'area coperta da tutti e tre settori è $3\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{2}$. La probabilità richiesta è allora:

$$\Pr\{d_P > 1 \text{ da ogni vertice}\} = \frac{\frac{9\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{2}}{\frac{9\sqrt{3}}{4}} = \frac{9\sqrt{3}-2\pi}{9\sqrt{3}} \cong 0.597$$

7. Si determini l'equazione del luogo geometrico dei centri delle circonferenze del piano tangenti alla parabola $y=x^2+1$ nel punto (1, 2).

Soluzione

La parabola e la circonferenza in esame sono tangenti nel punto (1,2) per cui hanno la retta tangente in (1,2) comune. Il segmento contenente il centro della circonferenza è perpendicolare alla retta tangente in (1,2), per cui il luogo dei punti in questione non è altro che la retta normale nel punto (1,2) cioè la retta perpendicolare alla retta tangente in (1,2).

La retta tangente alla parabola in (1,2) ha coefficiente angolare $m = f'(1) = 2$ per cui la normale avrà coefficiente angolare $m' = -\frac{1}{2}$ per cui il luogo richiesto è

$$\gamma : y - 2 = -\frac{1}{2}(x-1) \rightarrow \gamma : x + 2y - 5 = 0$$

8. A *Leonardo Eulero* (1707-1783), di cui quest'anno ricorre il terzo centenario della nascita, si deve il seguente problema: «Tre gentiluomini giocano insieme: nella prima partita il primo perde, a favore degli altri due, tanto denaro quanto ne possiede ciascuno di loro. Nella successiva, il secondo gentiluomo perde a favore di ciascuno degli altri due tanto denaro quanto essi già ne possiedono. Da ultimo, nella terza partita, il primo e il secondo guadagnano ciascuno dal terzo gentiluomo tanto denaro quanto ne avevano prima. A questo punto smettono e trovano che ciascuno ha la stessa somma, cioè 24 luigi. Si domanda con quanto denaro ciascuno si sedette a giocare».

Soluzione

Chiamiamo i tre gentiluomini Nicola, Pasquale e Fabrizio. La situazione iniziale e dopo le giocate effettuate è evidenziata nella tabella sottostante:

	Pasquale	Nicola	Fabrizio
Soldi iniziali	A	B	C
Soldi dopo 1^a giocata	A-B-C	2B	2C
Soldi dopo 2^a giocata	2(A-B-C)	2B-(A-B-C)-2C=-A+3B-C	4C
Soldi dopo 3^a giocata	4(A-B-C)	2(-A+3B-C)	4C-2(A-B-C)- (-A+3B-C)= -A-B+7C

Va risolto allora il sistema:

$$\begin{cases} 4(A-B-C) = 24 \\ 2(-A+3B-C) = 24 \\ -A-B+7C = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A-B-C = 6 \\ -A+3B-C = 12 \\ -A-B+7C = 24 \end{cases} \Rightarrow$$

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -1 & -1 \\ 12 & 3 & -1 \\ 24 & -1 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{126+24+12+72+84-6}{21-1-1-3-7-1} = \frac{312}{8} = 39$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ -1 & 12 & -1 \\ -1 & 24 & 7 \end{vmatrix}}{8} = \frac{84+6+24-12+42+24}{8} = \frac{168}{8} = 21$$

$$C = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ -1 & 3 & 12 \\ -1 & -1 & 24 \end{vmatrix}}{8} = \frac{72+12+6+18-24+12}{8} = \frac{96}{8} = 12$$

9. Si dimostri che l'equazione $2x^3-3x^2+6x+6=0$ ha un'unica radice reale e si trovi il suo valore con una precisione di due cifre significative.

Soluzione

La funzione $y=2x^3-3x^2+6x+6$ è una funzione definita, continua e derivabile in tutto R.
Inoltre $\lim_{x\to+\infty} y=+\infty, \lim_{x\to-\infty} y=-\infty$.
La sua derivata è $y'=6(x^2-x+1)>0 \ \forall x\in R$, per cui la nostra funzione è sempre crescente. Le considerazioni sui limiti a $\pm\infty$ e sulla crescenza, ci portano a dire che $\exists! \ \bar{x}\in R \ : \ f(\bar{x})=0$.
Tale valore lo calcoliamo attraverso il metodo di bisezione.
Partiamo dall'intervallo $[-1,0]$. Si ha:

$y(-1)=-5<0, y(0)=6>0$. Ora proseguendo si ha:

$y\left(-\frac{1}{2}\right)=2>0$ per cui prendiamo in considerazione l'intervallo $\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$

$y\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{33}{32}<0$ per cui prendiamo in considerazione l'intervallo $\left[-\frac{3}{4},-\frac{1}{2}\right]$

$y\left(-\frac{5}{8}\right)=\frac{151}{256}>0$ per cui prendiamo in considerazione l'intervallo $\left[-\frac{3}{4},-\frac{5}{8}\right]$

$y\left(-\frac{11}{16}\right)=-\frac{395}{2048}<0$ per cui prendiamo in considerazione l'intervallo $\left[-\frac{11}{16},-\frac{5}{8}\right]$

$y\left(-\frac{11}{16}\right)=-\frac{395}{2048}<0$ per cui prendiamo in considerazione l'intervallo $\left[-\frac{11}{16},-\frac{5}{8}\right]$

$y\left(-\frac{21}{32}\right)=\frac{3343}{16384}>0$ per cui prendiamo in considerazione l'intervallo $\left[-\frac{11}{16},-\frac{21}{32}\right]$

$y\left(-\frac{86}{128}\right)=\frac{16592}{2097152}>0$ per cui lo zero si troverà nell'intervallo $\left[-\frac{11}{16},-\frac{86}{128}\right]$.

Ma

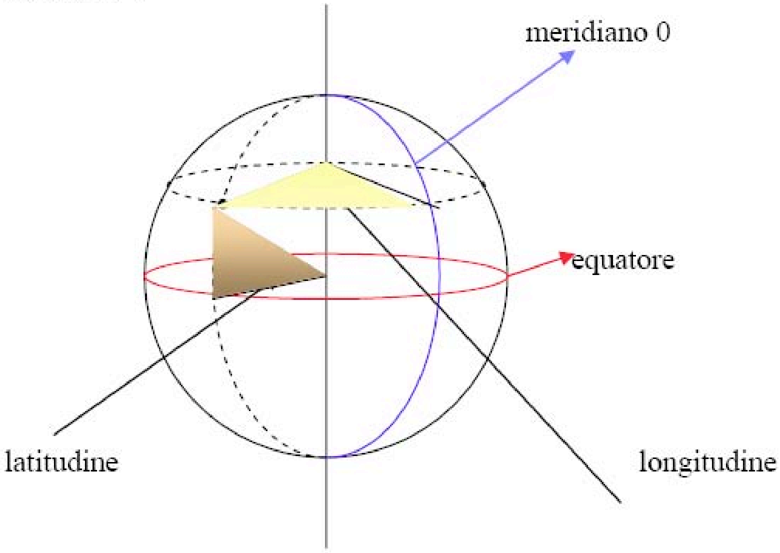
$y\left(-\frac{87}{128}\right)=-\frac{193038}{2097152}<0$ per cui lo zero si troverà nell'intervallo $\left[-\frac{87}{128},-\frac{86}{128}\right]\cong[-0.679,-0.671]$

Per cui lo zero ha come valore numerico con due cifre significative $\bar{x}=-0.67$.

10. Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a *meridiani* e a *paralleli*, a *latitudini* e a *longitudini*. Supponendo che la Terra sia una sfera S e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta r passante per il centro di S, come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?

Soluzione

Nel sistema di coordinate terrestri si sceglie come piano fondamentale quello dell'equatore, la direzione fondamentale l'asse di rotazione della Terra. Si suppone che la superficie terrestre sia di forma sferica.
Un qualunque piano che contiene l'asse terrestre (piano meridiano), determina sulla superficie terrestre un cerchio massimo passante per i poli, il circolo meridiano.
Per **meridiano** geografico si intende una semicirconferenza compresa tra i due poli. Ogni meridiano ha un suo antimeridiano. I meridiani sono tutti uguali fra loro.
I **paralleli** sono i circoli formati dall'intersezione tra un qualunque piano parallelo all'equatore e la superficie terrestre. I paralleli sono tanto più piccoli quanto più sono distanti dall'equatore.
Paralleli e meridiani formano un reticolato che permette di identificare la posizione di un qualsiasi punto della superficie terrestre. Per individuare un punto si deve indicare il parallelo e il meridiano che passano per tale punto.
Si fissa convenzionalmente come meridiano fondamentale quello passante per l'Osservatorio astronomico di Greenwich, nei pressi di Londra.
La **longitudine** geografica è la distanza angolare di un punto dal meridiano fondamentale, misurata sull'arco di parallelo che passa per quel punto. Essa corrisponde all'angolo compreso tra il piano del meridiano del punto e il piano del meridiano fondamentale. Può essere EST o OVEST a seconda che il punto si trovi a EST o a OVEST del meridiano fondamentale, varia da 0° per i punti del meridiano fondamentale a 180°, è positiva per i punti a OVEST, negativa per i punti a EST del meridiano fondamentale.
La **latitudine** geografica è la distanza angolare di un punto dall'equatore misurata lungo il meridiano che passa per quel punto. Corrisponde all'angolo compreso tra la verticale del luogo e il piano dell'equatore, varia da +90° polo NOD a -90° polo SUD. I punti lungo l'equatore hanno latitudine 0°.



http://www.vialattea.net/eratostene/gloss/coordinategeografiche.html
http://www.matematicamente.it/magazine/Matematicamente.it%20Magazine%20n.01.pdf