 Sessione ordinaria 2006

Seconda prova scritta

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Un filo metallico di lunghezza λ viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.

a) Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:

b) la somma delle due aree sia minima?

c) la somma delle due aree sia massima?

Una aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

PROBLEMA 2

Si considerino le funzioni *f* e *g* determinate da $f(x) = \log x$ e $g(x) = ax^2$, essendo a un parametro reale e il logaritmo in base *e*.

1. Si discuta, al variare di a, l'equazione $\log x = ax^2$ e si dica, in particolare, per quale valore di a i grafici di *f* e *g* sono tra loro tangenti.
2. Si calcoli, posto $a = 1$, l'area della parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni f e g e dalle rette $x = 1$ e $x = 2$.
3. Si studi la funzione $h(x) = \log x - ax^2$ scegliendo per a un valore numerico maggiore di $\dfrac{1}{2e}$ e se ne disegni il grafico.

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64^a casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.
2. I poliedri regolari – noti anche come *solidi platonici* – sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?
3. Un foglio di carta deve contenere: un'area di stampa di *50* cm^2, margini superiore e inferiore di *4 cm* e margini laterali di *2 cm*. Quali sono le dimensioni del foglio di carta di area minima che si può utilizzare?
4. La capacità di un serbatoio è pari a quella del cubo inscritto in una sfera di un metro di diametro. Quanti sono, approssimativamente, i litri di liquido che può contenere il serbatoio?
5. Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n \in N$.
6. L'equazione risolvente un dato problema è: $k\cos 2x - 5k + 2 = 0$ dove k è un parametro reale e x ha le seguenti limitazioni: $15° < x < 45°$. Si discuta per quali valori di k le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.
7. La funzione $f(x)=x^3-2x^2$ soddisfa le condizioni del teorema di *Lagrange* nell'intervallo $[0,1]$? Se si, trova il punto ξ che compare nella formula
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$
8. La funzione $f(x)=tgx$ assume valori di segno opposto negli estremi dell'intervallo $I=\left[\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right]$, eppure non esiste alcun $x \in I$ tale che $f(x)=0$. È così? Perché?
9. Della funzione $f(x)$ si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che: $f'(x)=f(x)$ e $f(0)=1$. Puoi determinare $f(x)$?
10. La funzione $f(x)=a\,\mathrm{sen}\,x+b\cos x$ ha un estremo relativo per $x=\frac{4\pi}{3}$ ed è $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=1$. Si trovino a e b e si dica quale è il periodo di $f(x)$.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Un filo metallico di lunghezza λ viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.

a) Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:

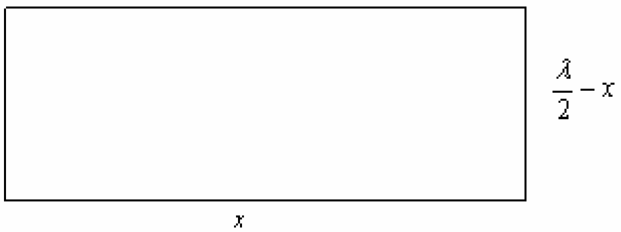
b) la somma delle due aree sia minima?

c) la somma delle due aree sia massima?

Una aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

SOLUZIONE DI DE ROSA NICOLA

a)



L'area è:

$$A(x)=x*\left(\frac{\lambda}{2}-x\right)=\frac{\lambda x}{2}-x^2, 0 \le x \le \frac{\lambda}{2}$$

Calcoliamo la derivata prima e seconda :

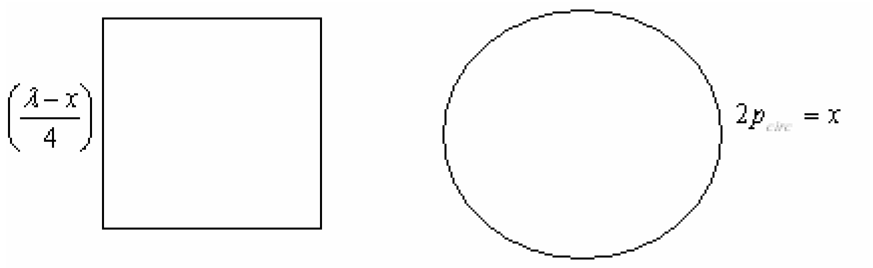
$$A^{I}(x)=\frac{\lambda}{2}-2x>0 \rightarrow x<\frac{\lambda}{4}$$

$$A^{II}(x)=-2<0 \forall x \rightarrow x=\frac{\lambda}{4} \text{ è l'ascissa del massimo, per cui}$$

$$A_{max}=A(x_{max})=A\left(\frac{\lambda}{4}\right)=\frac{\lambda^2}{16} \text{ cioè l'area massima la si ha in corrispondenza di un quadrato}$$

Ora suddividiamo il perimetro in due:

$2p_{circ} = x$ è il perimetro dell'aiuola circolare e $2p_q = \lambda - x$ quello del quadrato



Con queste convenzioni si ha che il lato del quadrato è $\left(\frac{\lambda-x}{4}\right)$ per cui l'area è $A_q(x) = \left(\frac{\lambda-x}{4}\right)^2$

mentre il raggio del cerchio sarà $\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ per cui l'area sarà $A_c(x) = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = \frac{x^2}{4\pi}$

per cui l'area totale sarà

$$A_{tot}(x) = \left(\frac{\lambda-x}{4}\right)^2 + \frac{x^2}{4\pi}, 0 \le x \le \lambda$$

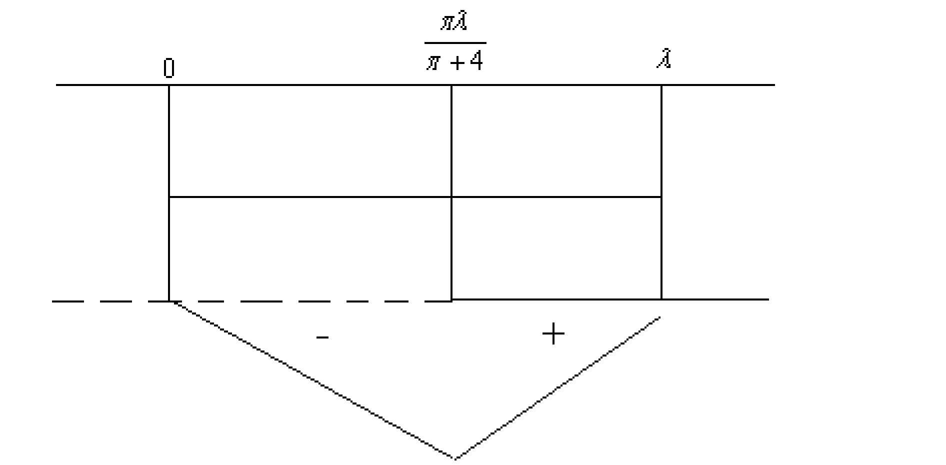
b)

Ora si calcolano le derivate della funzione $A_{tot}(x)$:

$$A_{tot}^{I}(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda-x}{4}\right) + \left(\frac{x}{2\pi}\right) = \left(\frac{x-\lambda}{8}\right) + \left(\frac{x}{2\pi}\right) = \frac{x(\pi+4)-\pi\lambda}{8\pi} > 0 \rightarrow x > \frac{\pi\lambda}{\pi+4}$$

$$A_{tot}^{II}(x) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi} > 0$$

La situazione è sotto rappresentata:



Dal grafico soprastante si evince che l'area minima la si ha per $x = \frac{\pi\lambda}{\pi + 4}$ in corrispondenza della quale si ricava

$$A_{tot,\min} = A\left(\frac{\pi\lambda}{\pi + 4}\right) = \left(\frac{\lambda - \frac{\pi\lambda}{\pi + 4}}{4}\right)^2 + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\pi\lambda}{\pi + 4}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{(\pi + 4)^2} + \frac{\lambda^2\pi}{4(\pi + 4)^2} = \frac{\lambda^2(\pi + 4)}{4(\pi + 4)^2} = \frac{\lambda^2}{4(\pi + 4)}$$

c)
Vediamo l'area massima: in tal caso il massimo lo si raggiunge agli estremi dell'intervallo cioè per $x = 0, x = \lambda$.
Ora

$$A_{tot}(x = 0) = \frac{\lambda^2}{16},$$
$$A_{tot}(x = \lambda) = \frac{\lambda^2}{4\pi} > \frac{\lambda^2}{16} = A_{tot}(x = 0)$$

Per cui l'area massima la si ha per $x = \lambda$ ed è $A_{tot,\max} = \frac{\lambda^2}{4\pi}$

d)
Il volume di un parallelepipedo è dato dal prodotto delle tre dimensioni, cioè

$$V_{parallelepipedo} = l_1 l_2 l_3$$

Se si aumentano le dimensioni del 10% si ha:

$$V'_{parallelepipedo} = 1.1l_1 * 1.1l_2 * 1.1l_3 = 1.331 * l_1 l_2 l_3 = 1.331V_{parallelepipedo}$$

Per cui l'incremento percentuale del volume è del 33.1%.

PROBLEMA 2

Si considerino le funzioni f e g determinate da $f(x) = \log x$ e $g(x) = ax^2$, essendo a un parametro reale e il logaritmo in base e.

1. Si discuta, al variare di a, l'equazione $\log x = ax^2$ e si dica, in particolare, per quale valore di a i grafici di f e g sono tra loro tangenti.
2. Si calcoli, posto $a = 1$, l'area della parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni f e g e dalle rette $x = 1$ e $x = 2$.
3. Si studi la funzione $h(x) = \log x - ax^2$ scegliendo per a un valore numerico maggiore di $\frac{1}{2e}$ e se ne disegni il grafico.

SOLUZIONE DI **De Rosa Nicola**

1)
Per essere tangenti le due funzioni devono avere la stessa tangente in (x_0, y_0)
L'equazione di tale tangente è: $y\text{-}y_0 = m(x - x_0)$
Ora bisogna imporre l'uguaglianza tra i due coefficienti angolari ricavati tramite la derivata delle due funzioni in x_0

$$m = f'(x_0) = g'(x_0) \Rightarrow \frac{1}{x_0} = 2ax_0 \Rightarrow a = \frac{1}{2x_0^2} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2$$

Inoltre poichè (x_0, y_0) appartiene ad entrambe deve aversi che

$$f(x_0) = g(x_0) \Rightarrow \ln(x_0) = 0.5 \Rightarrow x_0 = \sqrt{e} \Rightarrow \mathbf{a} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2e}}$$

Ora facciamo qualche considerazione:

se a $> \frac{1}{2e}$ **le intersezioni non esistono**

se $0 < a < \frac{1}{2e}$ **le intersezioni esistono e sono due**

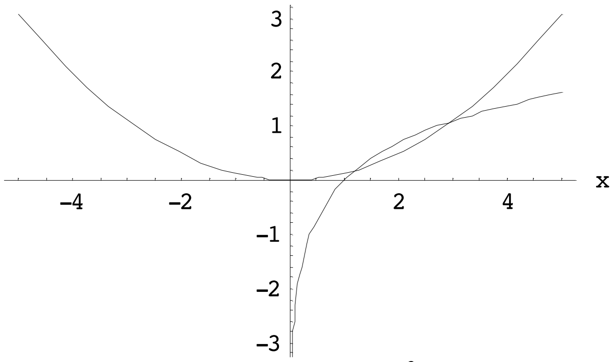
se a < 0 **esiste una sola intersezione**

Infatti se $\mathbf{a} > \frac{1}{2e} > \mathbf{0}$ la parabola $g(x)$ corrispondente si stringe sempre di più, si allontana rapidamente dalla funzione $f(x)$ visto che il valore di a è positivo, ed al limite per $a \to +\infty$ diventa un impulso centrato in $x = 0$

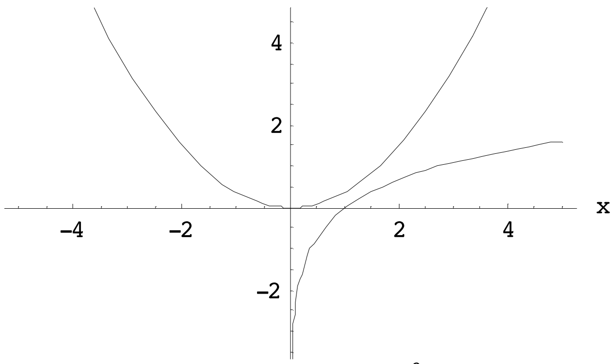
Se $\mathbf{a} < \mathbf{0}$ la parabola cambia concavità, sarà ora rivolta verso il basso e l'intersezione corrispondente sarà una sola

Come esempio presentiamo tre casi ed i corrispondenti grafici dati dalla sovrapposizione dei grafici di *f(x) e g(x)* rispettivamente per $a = \frac{1}{3e}, \frac{1}{e}, -1$

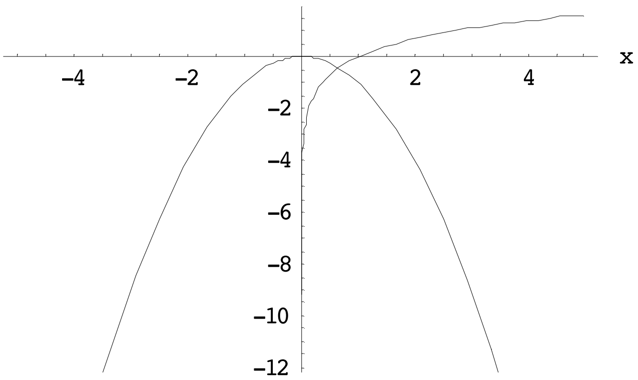
$f(x) = \ln(x) \quad g(x) = \frac{x^2}{3 * e}$



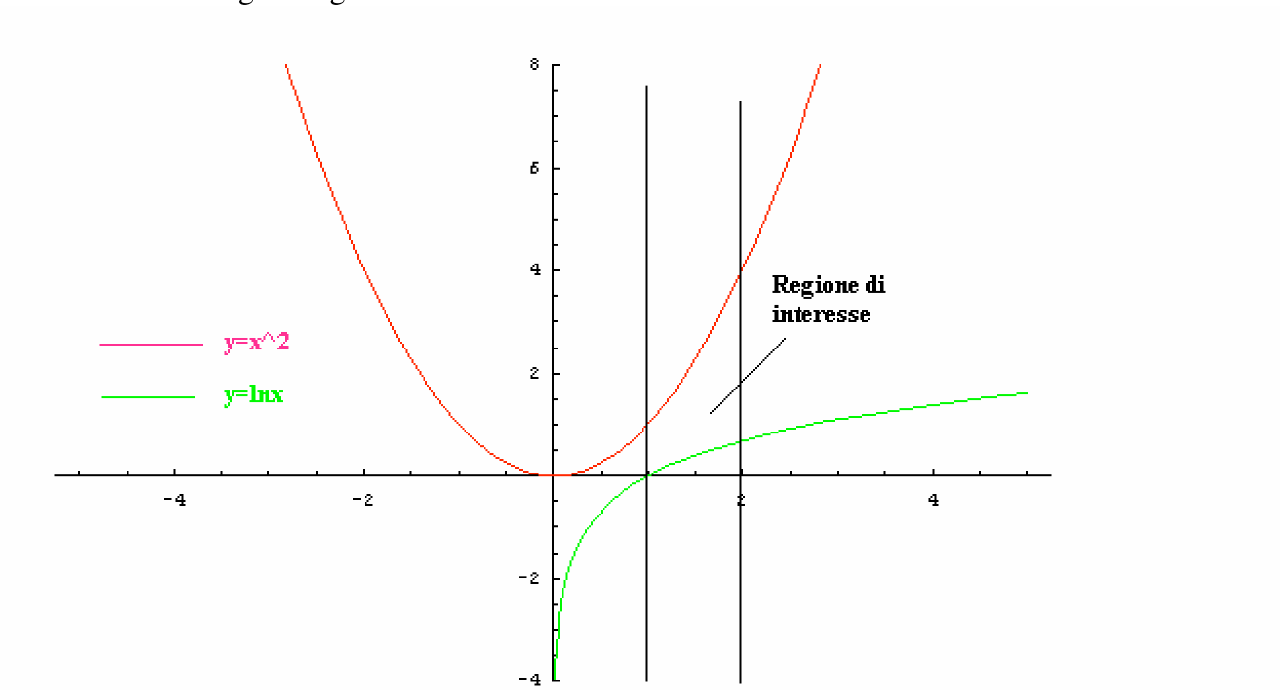
$f(x) = \ln(x) \quad g(x) = \frac{x^2}{e}$



$f(x) = \ln(x) \quad g(x) = -x^2$



2)
Consideriamo la figura seguente:



Prima di calcolare l'area di interesse bisogna richiamare il calcolo dell'integrazione per parti applicato al nostro caso:

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - \int x * \left(\frac{d(\ln(x))}{dx}\right)dx = x\ln(x) - \int x * \frac{1}{x}dx =$$
$$x\ln(x) - \int dx = x\ln(x) - x + K = x(\ln(x) - 1) + K$$

L'area cercata è :

$$\int_1^2 \left[-\ln(x) + x^2\right]dx = \left[-x(\ln(x)-1) + \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = -2(\ln 2 - 1) + \frac{8}{3} - 1 - \frac{1}{3} = \mathbf{-2\ln 2 + \frac{10}{3}}$$

3)
$h(x) = \ln(x) - ax^2$

Dominio : $x \in (0, +\infty)$

Non ci sono intersezioni con gli assi, nè x nè y dal momento che $a > \frac{1}{2e}$

Positività : $h(x) < 0 \ \forall x \in (0, +\infty)$ dal momento che $\ln(x)$ sta sempre al di sotto della parabola

Asintoti verticali : x = 0

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = -\infty$$

Non ci sono asintoti orizzontali. Infatti

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x}{e^{ax^2}}\right) = \ln\left[\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x}{e^{ax^2}}\right)\right] = \ln(0) = -\infty$$ sfruttando de l'Hopital ed essendo $a > \frac{1}{2e} > 0$

Non ci sono asintoti obliqui. Infatti

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=-\infty$$

Crescenza e decrescenza :

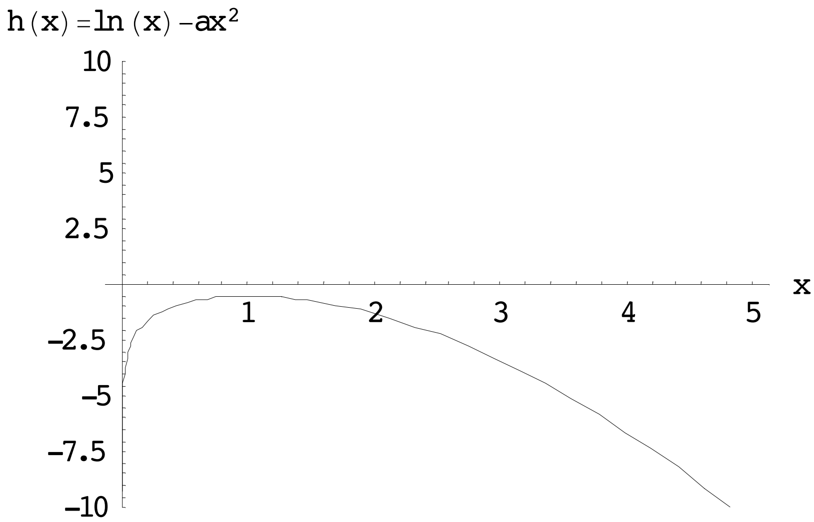
$$h'(x)=\frac{1}{x}-2ax=\frac{1-2ax^2}{x}$$

$$h'(x)>0\Rightarrow x\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)$$

$$h''(x)=-\frac{1}{x^2}-2a,\ h''\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)=-4a<0\Rightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{2a}},\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)-0.5\right)\text{è un massimo}$$

Inoltre poichè per ipotesi $a>\frac{1}{2e}>0$, allora $h''(x)<0\ \forall x\in D=(0,+\infty)$ $\Rightarrow$ non ci sono flessi

Il grafico è questo:



Se scegliamo ad esempio *a=1/2*, allora il massimo è (1,-0.5).
Al crescere del valore a, l'ascissa del massimo si sposta e tende a diventare sempre più piccola

SOLUZIONI DI De Rosa Nicola

QUESTIONARIO

1. Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64^a casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.

Soluzione

Il numero N dei chicchi di grano è:

$$N = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63} = \sum_{n=0}^{63} 2^n$$

Siamo quindi in presenza di una serie geometrica di ragione 2.

Ricordando che una serie geometrica di ragione q ha somma $\sum_{n=0}^{M} q^n = \frac{q^{M+1} - 1}{q - 1}$, in tal caso si ha

$$N = \sum_{n=0}^{63} 2^n = \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1$$

Quindi il peso degli $N = 2^{64} - 1$ è

$$P = \frac{\left(2^{64} - 1\right)}{1000} * 38 \text{ grammi} = \frac{\left(2^{64} - 1\right)}{1000} * 38 * 10^{-6} \text{ tonnellate} = \frac{\left(2^{64} - 1\right)}{10^9} * 38 \text{ tonnellate}$$

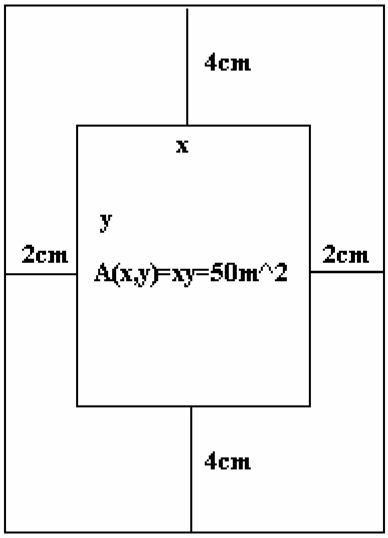
2. I poliedri regolari – noti anche come *solidi platonici* – sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?

Soluzione

Un poliedro si dice regolare se le sue facce sono poligoni regolari congruenti e i suoi angoloidi sono congruenti tra loro. La somma degli angoli di una faccia dell'angoloide è minore di un angolo giro. e le facce sono triangoli equilateri si possono avere tre tipi di poliedri: infatti 3*60°=180°, 4*60°=240°, 5*60°=300°; se le facce sono quadrati si può avere un solo poliedro perché 3*90°=270°; se sono pentagoni si può avere un solo poliedro perché 3*108°=324°.
Si dimostra che tali poliedri esistono.

3. Un foglio di carta deve contenere: un'area di stampa di *50 cm*^{2}, margini superiore e inferiore di *4 cm* e margini laterali di *2 cm*. Quali sono le dimensioni del foglio di carta di area minima che si può utilizzare?

Soluzione



L'area del foglio, considerando la figura soprastante è:

$$S(x,y)=(y+8)(x+4)=xy+4y+8x+32, x\geq 0, y\geq 0$$

Per ipotesi si sa che $xy=50 \to y=\frac{50}{x}$ e sostituendo in $S(x,y)$ si ha:

$$S\left(x,\frac{50}{x}\right)=xy+4y+8x+32=50+\frac{200}{x}+8x+32$$

Ora se ne calcola la derivata ottenendo:

$$S^{I}(x)=-\frac{200}{x^2}+8=\frac{8(x^2-25)}{x^2}$$
$$S^{II}(x)=\frac{400}{x^3}$$

Ora per studiare il segno della derivata prima, poiché $x^2>0 \forall x\in R-\{0\}$, basta studiare il segno del fattore (x^2-25), per cui

$S^{I}(x)=\frac{8(x^2-25)}{x^2}>0 \to (x^2-25)>0 \to x<-5 \cup x>5$ e poichè deve aversi $x\geq 0$ si ha

$S^{I}(x)>0 \to x>5$.

Inoltre $S^{II}(x=5)=\frac{400}{125}=\frac{16}{3}>0 \to x=5$ garantisce l'area minima

in corrispondenza della quale si ha $y=\frac{50}{5}=10$

Per cui le dimensioni del foglio che garantiscono l'area minima sono

$$(10+8)cm = 18cm \text{ e } (5+4)cm = 9cm$$

4. La capacità di un serbatoio è pari a quella del cubo inscritto in una sfera di un metro di diametro. Quanti sono, approssimativamente, i litri di liquido che può contenere il serbatoio?

Soluzione

Un cubo inscritto in una sfera ha come diagonale il diametro della sfera. Ricordando la relazione tra diagonale e lato di un cubo si ha che il lato è:

$$lato = l = \frac{diagonale}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}m$$

Per cui il volume del cubo è $V = l^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}}m^3 = \frac{1000}{3\sqrt{3}}dm^3$

5. Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n \in N$.

Soluzione

Ricordiamo la formula del binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

E ponendo in essa a=b=1 si ricava:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n \quad \forall n \in N$$

6. L'equazione risolvente un dato problema è: $k\cos 2x - 5k + 2 = 0$ dove k è un parametro reale e x ha le seguenti limitazioni: $15° < x < 45°$. Si discuta per quali valori di k le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.

Soluzione

Riscriviamo l'equazione risolvente in questo modo:

$$\cos(2x) = \frac{5k-2}{k}$$

Ora, dire 15°<x<45° è equivalente a dire 30°<2x<90°, e poiché il coseno è una funzione decrescente nell'intervallo 30°<2x<90° , allora vale la seguente:

$$30° < 2x < 90° \to \cos(90°) < \cos(2x) = \frac{5k-2}{k} < \cos(30°) \to 0 < \frac{5k-2}{k} < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

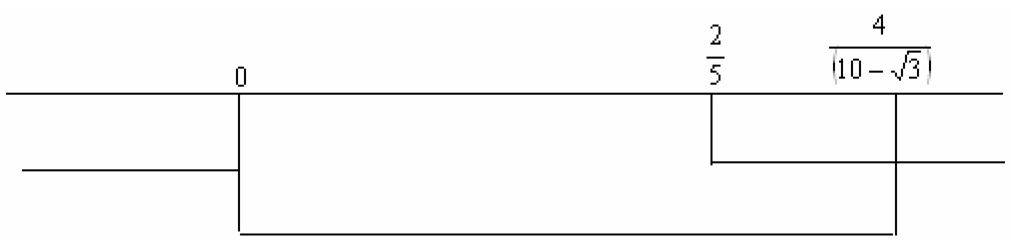
Quindi va risolto il sistema seguente:

$$\begin{cases} \dfrac{5k-2}{k} > 0 \\ \dfrac{5k-2}{k} < \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5k-2}{k} > 0 \\ \\ \dfrac{k\left(10-\sqrt{3}\right)-4}{2k} < 0 \end{cases}$$

Le due disequazioni si risolvono ognuna col classico metodo del falso sistema e le soluzioni sono:

$$\begin{cases} \dfrac{5k-2}{k} > 0 \\ \dfrac{k\left(10-\sqrt{3}\right)-4}{2k} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k < 0 \ \cup \ k > \dfrac{2}{5} \\ 0 < k < \dfrac{4}{\left(10-\sqrt{3}\right)} \end{cases}$$

E prendendo le soluzioni comuni, il sistema è soddisfatto per $\mathbf{\frac{2}{5} < k < \frac{4}{\left(10-\sqrt{3}\right)}}$ come evidenzia la figura sotto

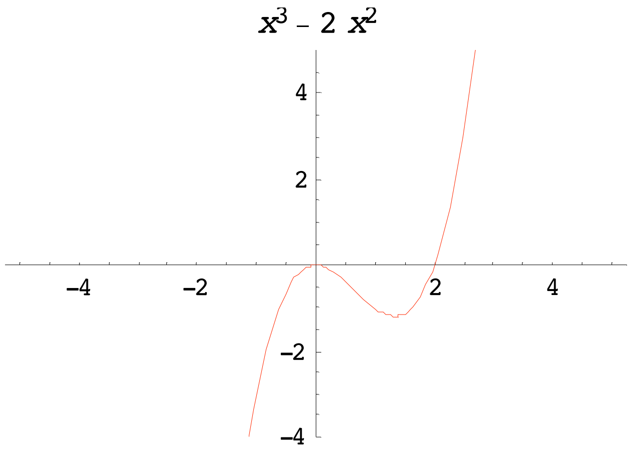


7. La funzione $f(x) = x^3 - 2x^2$ soddisfa le condizioni del teorema di *Lagrange* nell'intervallo $[0,1]$? Se si, trova il punto ξ che compare nella formula

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

Soluzione

La funzione
$f(x) = x^3 - 2x^2$ è una funzione continua e derivabile su tutto R, che presenta un massimo in $(0,0)$, un minimo in $\left(\frac{4}{3}, -\frac{32}{27}\right)$ ed un flesso in $\left(\frac{2}{3}, -\frac{16}{27}\right)$. Quindi soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange.



Ora possiamo applicare il teorema:

$$f(1) = -1, f(0) = 0, f'(x = \xi) = \left(3x^2 - 4x\right)_{x=\xi} = 3\xi^2 - 4\xi$$

Per cui l'equazione della traccia comporta:

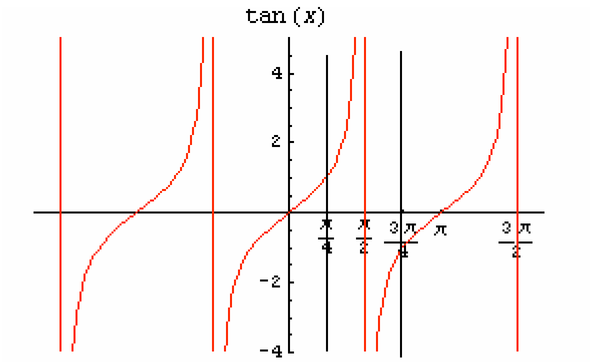
$$3\xi^2 - 4\xi = \frac{-1}{1} = -1 \rightarrow 3\xi^2 - 4\xi + 1 = 0 \rightarrow (3\xi - 1)(\xi - 1) = 0 \rightarrow \xi = \frac{1}{3}, \xi = 1$$

Ed il valore accettabile, che ricade nell'intervallo (0,1) è $\xi = \frac{1}{3}$.

8. La funzione $f(x) = tgx$ assume valori di segno opposto negli estremi dell'intervallo $I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$, eppure non esiste alcun $x \in I$ tale che $f(x) = 0$. È così? Perché?

Soluzione

Rappresentiamo innanzitutto la funzione y=tg(x):



Effettivamente, come si evince dal grafico, nell'intervallo $I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ la funzione non si annulla mai, eppure la funzione assume agli estremi valori unitari e discordi. Quindi il teorema degli zeri prevederebbe un valore interno all'intervallo in cui la funzione si annullerebbe. In questo caso però il suddetto teorema non è applicabile dal momento che la funzione nell'intervallo $I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ non è continua, avendo una discontinuità di terza specie in $x = \frac{\pi}{2} \in I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

9. Della funzione $f(x)$ si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che: $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. Puoi determinare $f(x)$?

Soluzione

La funzione può essere determinata, ed è tra l'altro anche unica. Infatti il problema proposto non è altro che il classico problema di Cauchy

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

che sotto alcune ipotesi, si dimostra fornire un'unica soluzione.
Per calcolarla basta ricordare le equazioni differenziali a variabili separabili: infatti l'equazione differenziale $f'(x) = f(x)$, supponendo $f(x) \neq 0$ si può riscrivere come:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1$$

Ed integrando ambo i membri in dx si ricava:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int dx \text{ cioè } \ln|f(x)| = x + k$$

Quindi il problema iniziale diventa:

$$\begin{cases} \ln|f(x)| = x + k \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Dalla prima, per x=0, si ricava $\ln|f(0)| = k$ e ricordando che la condizione iniziale impone $f(0) = 1$, allora si ricava $k = \ln 1 = 0$, per cui infine si ricava:

$$\ln|f(x)| = x \rightarrow |f(x)| = e^x \rightarrow f(x) = \pm e^x$$

In cui va scartata la soluzione $f(x) = -e^x$ perché non soddisfa la condizione iniziale.
In conclusione la soluzione esiste, è unica ed è l'autofunzione $f(x) = e^x$

10. La funzione $f(x)=a\,\text{sen}\,x+b\cos x$ ha un estremo relativo per $x=\frac{4\pi}{3}$ ed è $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=1$. Si trovino a e b e si dica quale è il periodo di $f(x)$.

Soluzione

$f'(x)=a\cos(x)-b\sin(x)$ per cui imponendo le due condizioni bisogna risolvere il sistema seguente:

$$\begin{cases} a\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+b\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=1 \\ a\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)-b\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a\sqrt{3}}{2}-\frac{b}{2}=1 \\ -\frac{a}{2}+\frac{b\sqrt{3}}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\sqrt{3}-b=2 \\ a=b\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\sqrt{3} \\ b=1 \end{cases}$$

Da cui si ricava :

$$f(x)=\sqrt{3}\sin(x)+\cos(x) \text{ il cui periodo è T} = 2\pi$$