

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO - 2002

CORSO DI ORDINAMENTO Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva k di equazione $y = f(x)$, dove è:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^3 + 2}$$

- a) Determinare per quali valori di x essa è situata nel semipiano $y > 0$ e per quali nel semipiano $y < 0$.
- b) Trovare l'equazione della parabola passante per l'origine O degli assi e avente l'asse di simmetria parallelo all'asse y , sapendo che essa incide ortogonalmente la curva k nel punto di ascissa -1 (*N.B.: si dice che una curva incide ortogonalmente un'altra in un punto se le rette tangenti alle due curve in quel punto sono perpendicolari*).
- c) Stabilire se la retta tangente alla curva k nel punto di ascissa -1 ha in comune con k altri punti oltre a quello di tangenza.
- d) Determinare in quanti punti la curva k ha per tangente una retta parallela all'asse x .
- e) Enunciare il teorema di Lagrange e dire se sono soddisfatte le condizioni perché esso si possa applicare alla funzione $f(x)$ assegnata, relativamente all'intervallo $-\sqrt{2} \leq x \leq 0$.

PROBLEMA 2

Si considerino le lunghezze seguenti:

$$[1] \quad a + 2x, \quad a - x, \quad 2a - x,$$

dove a è una lunghezza nota non nulla ed x è una lunghezza incognita.

a) Determinare per quali valori di x le lunghezze [1] si possono considerare quelle dei lati di un triangolo non degenero.

b) Stabilire se, fra i triangoli non degeneri i cui lati hanno le lunghezze [1], ne esiste uno di area massima o minima.

c) Verificato che per $x = \frac{a}{4}$ le [1] rappresentano le lunghezze dei lati di un triangolo, descriverne la costruzione geometrica con riga e compasso e stabilire se si tratta di un triangolo rettangolo, acutangolo o ottusangolo.

d) Indicato con ABC il triangolo di cui al precedente punto c), in modo che BC sia il lato maggiore, si conduca per A la retta perpendicolare al piano del triangolo e si prenda su di essa un punto D tale che AD sia lungo a : calcolare un valore approssimato a meno di un grado (sessagesimale) dell'ampiezza dell'angolo formato dai due piani DBC e ABC.

QUESTIONARIO

1. Il rapporto fra la base maggiore e la base minore di un trapezio isoscele è 4. Stabilire, fornendone ampia spiegazione, se si può determinare il valore del rapporto tra i volumi dei solidi ottenuti facendo ruotare il trapezio di un giro completo dapprima intorno alla base maggiore e poi intorno alla base minore o se i dati a disposizione sono insufficienti.

2. Due tetraedri regolari hanno rispettivamente aree totali A' e A'' e volumi V' e V'' . Si sa che $\frac{A'}{A''} = 2$. Calcolare il valore del rapporto $\frac{V'}{V''}$.

3. Considerati i numeri reali a, b, c, d - comunque scelti - se $a > b$ e $c > d$ allora:

- A) $a+d > b+c$;
- B) $a-d > b-c$;
- C) $ad > bc$;
- D) $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$

Una sola alternativa è corretta: individuarla e motivare esaurientemente la risposta.

1. Si consideri la seguente proposizione: "La media aritmetica di due numeri reali positivi, comunque scelti, è maggiore della loro media geometrica". Dire se è vera o falsa e motivare esaurientemente la risposta.

2. Determinare, se esistono, i numeri a, b in modo che la seguente relazione:

$$\frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{a}{x - 3} + \frac{b}{x + 1}$$

sia un'identità.

3. Si consideri la funzione:

$$f(x) = (2x - 1)^7 (4 - 2x)^5$$

Stabilire se ammette massimo o minimo assoluti nell'intervallo $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$.

4. Calcolare la derivata, rispetto ad x , della funzione $f(x)$ tale che:

$$f(x) = \frac{\int_x^{x+1} \ln t \, dt}{x}, \text{ con } x > 0.$$

5. La funzione reale di variabile reale $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[1,3]$ e derivabile nell'intervallo aperto $(1,3)$. Si sa che $f(1) = 1$ e inoltre $0 \leq f'(x) \leq 2$ per ogni x dell'intervallo $(1,3)$. Spiegare in maniera esauriente perché risulta $1 \leq f(3) \leq 5$.

6. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$y = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}$$

Tale luogo è costituito da:

- A) un punto;
- B) due punti;
- C) infiniti punti;
- D) nessun punto.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

1. La funzione reale di variabile reale $f(x)$, continua per ogni x , è tale che:

$$\int_0^2 f(x) \, dx = a, \quad \int_0^6 f(x) \, dx = b,$$

dove a, b sono numeri reali.

Determinare, se esistono, i valori a, b per cui risulta:

$$\int_0^3 f(2x) \, dx = \ln 2 \, e \int_1^3 f(2x) \, dx = \ln 4 \, .$$

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.