

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO - 2003

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Si consideri un tetraedro regolare T di vertici A, B, C, D .

- Indicati rispettivamente con V ed S il volume e l'area totale di T e con r il raggio della sfera inscritta in T , trovare una relazione che leghi V , S ed r .
- Considerato il tetraedro regolare T' avente per vertici i centri delle facce di T , calcolare il rapporto fra le lunghezze degli spigoli di T e T' e il rapporto fra i volumi di T e T' .
- Condotto il piano α , contenente la retta AB e perpendicolare alla retta CD nel punto E , e posto che uno spigolo di T sia lungo s , calcolare la distanza di E dalla retta AB .
- Considerata nel piano α la parabola p avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B ed E , riferire questo piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali e trovare l'equazione di p .
- e) Determinare per quale valore di s la regione piana delimitata dalla parabola p e dalla retta EA ha area

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^2.$$

PROBLEMA 2

È assegnata la funzione

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+m+|m|}$$

dove m è un parametro reale.

- Determinare il suo dominio di derivabilità.

2. Calcolare per quale valore di m la funzione ammette una derivata che risulti nulla per $x = 1$.

Studiare la funzione $f(x)$ corrispondente al valore di m così trovato e disegnarne il grafico g in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo aver stabilito quanti sono esattamente i flessi di g ed aver fornito una spiegazione esauriente di ciò.

Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico g , dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 1$.

QUESTIONARIO

1. Dopo aver fornito la definizione di "rette sghembe", si consideri la seguente proposizione: "Comunque si prendano nello spazio tre rette x, y, z , due a due distinte, se x ed y sono sghembe e, così pure, se sono sghembe y e z allora anche x e z sono sghembe". Dire se è vera o falsa e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.
2. Un piano interseca tutti gli spigoli laterali di una piramide quadrangolare regolare: descrivere le caratteristiche dei possibili quadrilateri sezione a seconda della posizione del piano rispetto alla piramide.
3. Dal punto A , al quale è possibile accedere, è visibile il punto B , al quale però non si può accedere in alcun modo, così da impedire una misura diretta della distanza AB . Dal punto A si può però accedere al punto P , dal quale, oltre ad A , è visibile B in modo che, pur rimanendo impossibile misurare direttamente la distanza PB , è tuttavia possibile misurare la distanza AP . Disponendo degli strumenti di misura necessari e sapendo che P non è allineato con A e B , spiegare come si può utilizzare il teorema dei seni per calcolare la distanza AB .

Il dominio della funzione

$$f(x) = \ln \left\{ \sqrt{x+1} - (x-1) \right\}$$

è l'insieme degli x reali tali che:

$$A) -1 < x \leq 3; \quad B) -1 \leq x < 3; \quad C) 0 < x \leq 3; \quad D) 0 \leq x < 3.$$

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta effettuata.

- La funzione

$$2x^3 - 3x^2 + 2$$

ha un solo zero reale, vale a dire che il suo grafico interseca una sola volta l'asse delle ascisse.

Fornire un'esauriente dimostrazione di questo fatto e stabilire se lo zero della funzione è positivo o negativo.

- La derivata della funzione

$$f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$$

è la funzione

$$f'(x) = 2x e^{-x^4}$$

. Eseguire tutti i passaggi necessari a giustificare l'affermazione.

- Considerati i primi n numeri naturali a partire da 1:

1, 2, 3, ..., $n-1$, n ,

moltiplicarli combinandoli due a due in tutti i modi possibili. La somma dei prodotti ottenuti risulta uguale a:

$$A) \frac{1}{4}n^2(n+1)^2; \quad B) \frac{1}{3}n(n^2-1); \quad C) \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1); \quad D) \frac{1}{24}n(n^2-1)(3n+2).$$

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

- x ed y sono due numeri naturali dispari tali che $x - y = 2$. Il numero

$$x^3 - y^3:$$

- A. è divisibile per 2 e per 3.
- B. è divisibile per 2 ma non per 3.
- C. è divisibile per 3 ma non per 2.
- D. non è divisibile né per 2 né per 3.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

- Si consideri una data estrazione in una determinata Ruota del Lotto. Calcolare quante sono le possibili cinquine che contengono i numeri 1 e 90.
- Il valore dell'espressione

$$\log_2 3 \cdot \log_3 2$$

è 1. Dire se questa affermazione è vera o falsa e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.