

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO - 2003

CORSO SPERIMENTALE - P.N.I.

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Nel piano sono dati: il cerchio g di diametro $OA = a$, la retta t tangente a g in A , una retta r passante per O , il punto B , ulteriore intersezione di r con g , il punto C intersezione di r con t . La parallela per B a t e la perpendicolare per C a t s'intersecano in P . Al variare di r , P descrive il luogo geometrico G noto con il nome di **versiera di Agnesi** [da Maria Gaetana Agnesi, matematica milanese, (1718-1799)].

1. Si provi che valgono le seguenti proporzioni: $OD : DB = OA : DP$ $OC : DP = DP : BC$ ove D è la proiezione ortogonale di B su OA ;
2. Si verifichi che, con una opportuna scelta del sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche Oxy , l'equazione cartesiana di

$$\Gamma \text{ è: } y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$$

3. Si tracci il grafico di G e si provi che l'area compresa fra G e il suo asintoto è quattro volte quella del cerchio y .

PROBLEMA 2

Sia

$$f(x) = a2^x + b2^{-x} + c$$

con a, b, c numeri reali. Si determinino a, b, c in modo che:

1. la funzione f sia pari;
2. $f(0)=2$;
- 3.

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{2 \log 2}.$$

Si studi la funzione g ottenuta sostituendo ad a,b,c i valori così determinati e se ne disegni il grafico G.

Si consideri la retta r di equazione $y=4$ e si determinino, approssimativamente, le ascisse dei punti in cui essa interseca G, mettendo in atto un procedimento iterativo a scelta.

Si calcoli l'area della regione finita del piano racchiusa tra r e G.

Si calcoli

$$\int \frac{1}{g(x)} dx.$$

Si determini la funzione g' il cui grafico è simmetrico di G rispetto alla retta r.

QUESTIONARIO

1. Quante partite di calcio della serie A vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre?
2. Tre scatole A, B e C contengono lampade prodotte da una certa fabbrica di cui alcune difettose. A contiene 2000 lampade con il 5% di esse difettose, B ne contiene 500 con il 20% difettose e C ne contiene 1000 con il 10% difettose. Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada. Quale è la probabilità che essa sia difettosa?
3. Quale è la capacità massima, espressa in centilitri, di un cono di apotema 2 dm?
4. Dare un esempio di polinomio $P(x)$ il cui grafico tagli la retta $y=2$ quattro volte.
5. Dimostrare, usando il **teorema di Rolle** [da Michel Rolle, matematico francese, (1652-1719)], che se l'equazione:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

ammette radici reali, allora fra due di esse giace almeno una radice dell'equazione:

$$nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1 = 0$$

6. Si vuole che l'equazione

$$x^3 + bx - 7 = 0$$

abbia tre radici reali. Quale è un possibile valore di b?

7. Verificare l'uguaglianza:

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

e utilizzarla per calcolare un'approssimazione di π , applicando un metodo di integrazione numerica.

8. Dare un esempio di solido il cui volume è dato da

$$\int_0^1 \pi x^3 dx.$$

.

9. Di una funzione $f(x)$ si sa che ha derivata seconda uguale a $\sin x$ e che. Quanto vale

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)?$$

10. Verificare che l'equazione

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

ammette tre radici reali. Di una di esse, quella compresa tra 0 e 1, se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile e la consultazione del vocabolario di italiano.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.