

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

2004

CORSO SPERIMENTALE - P.N.I.

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sia γ la curva d'equazione:

$$y = ke^{-\lambda x^2}$$

ove k e λ sono parametri positivi.

1. Si studi e si disegni γ ;
2. si determini il rettangolo di area massima che ha un lato sull'asse x e i vertici del lato opposto su γ ;

3. sapendo che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ e assumendo $\lambda = \frac{1}{2}$, si trovi il valore da attribuire a k affinché l'area compresa tra γ e l'asse x sia 1;

4. per i valori di k e λ sopra attribuiti, γ è detta *curva standard degli errori* o *delle probabilità* o *normale di Gauss* (da *Karl Friedrich Gauss*, 1777-1855). Una media $\mu \neq 0$ e uno scarto quadratico medio $\sigma \neq 1$ come modificano l'equazione e il grafico?

PROBLEMA 2

Sia f la funzione così definita:

$$f(x) = \sin \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{2b} x + x$$

con a e b numeri reali diversi da zero.

1. Si dimostri che, comunque scelti a e b , esiste sempre un valore di x tale che $f(x) = \frac{a+b}{2}$

2. Si consideri la funzione g ottenuta dalla f ponendo $a = 2b = 2$. Si studi g e se ne tracci il grafico.
3. Si consideri per $x > 0$ il primo punto di massimo relativo e se ne fornisca una valutazione approssimata applicando un metodo iterativo a scelta.

QUESTIONARIO

1. La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi *sessagesimali*, i *radianti*, i *gradi centesimali*. Quali ne sono le definizioni?
2. Si provi che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.
3. Un solido viene trasformato mediante una similitudine di rapporto 3. Come varia il suo volume? Come varia l'area della sua superficie?
4. Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$ quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B ?
5. Dare un esempio di funzione g , non costante, tale che:

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3 \text{ e } g(2) = 4$$

6. Dare un esempio di funzione $f(x)$ con un massimo relativo in $(1, 3)$ e un minimo relativo in $(-1, 2)$.
7. Tra i triangoli di base assegnata e di uguale area, dimostrare che quello isoscele ha perimetro minimo.
8. Si trovino due numeri reali a e b , $a \neq b$, che hanno somma e prodotto uguali.
9. Si dimostri che l'equazione $e^x + 3x = 0$ ammette una e una sola soluzione e se ne calcoli un valore approssimato utilizzando un metodo iterativo a scelta.
10. Nel piano è data la seguente trasformazione:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x\sqrt{3} - y \\ y &\rightarrow x + y\sqrt{3} \end{aligned}$$

Di quale trasformazione si tratta?