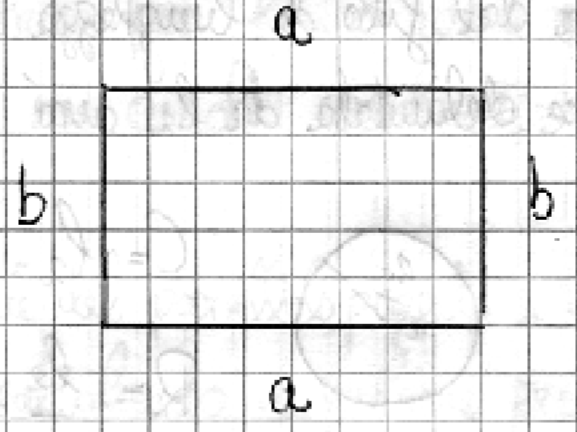
Problema 1

a) Si considerino il generico rettangolo avente perimetro ℓ e si indichino con a e b i suoi lati:



É chiaro che la richiesta del problema equivale a determinare i valori di a e b per cui l'area del rettangolo sia massima sapendo che il perimetro é di lunghezza pari ad ℓ.

$$P = 2a + 2b = \ell \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\ell}{2} - a$$

$$A = ab \quad \Rightarrow \quad \boxed{A(a) = a\left(\frac{\ell}{2} - a\right) = -a^2 + \frac{1}{2}\ell a}$$

Si deve quindi determinare il massimo assoluto della funzione $A(a) = -a^2 + \frac{1}{2}\ell a$ nell'intervallo $[0, \frac{\ell}{2}]$. Si può procedere tramite lo studio della derivata della funzione (e confrontando i valori agli estremi dell'intervallo) oppure, più semplicemente osservare che si tratta di un arco di parabola con la concavità rivolta verso il basso ed avente vertice nel punto di ascissa

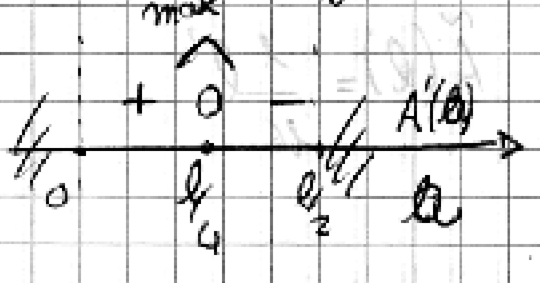
$$x_V = -\frac{\frac{1}{2}\ell}{-2} = \frac{1}{4}\ell$$ per ottenere che:

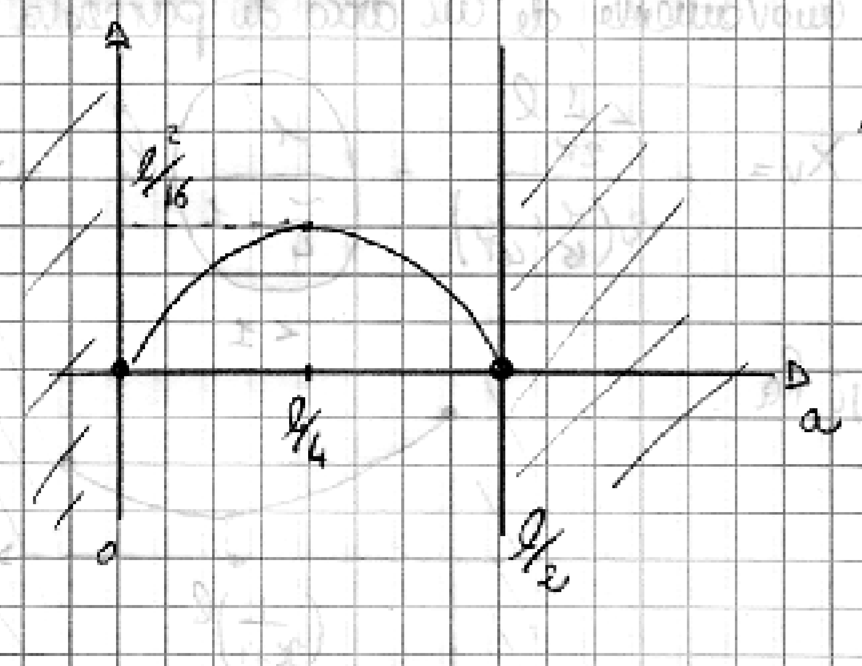
$$A\left(\frac{\ell}{4}\right) = \frac{\ell^2}{16}$$

$A(0) = 0$

$A\left(\frac{\ell}{2}\right) = -\frac{\ell^2}{4} + \frac{\ell^2}{4} = 0$

$A'(\ell) = -2a + \frac{1}{2}\ell$



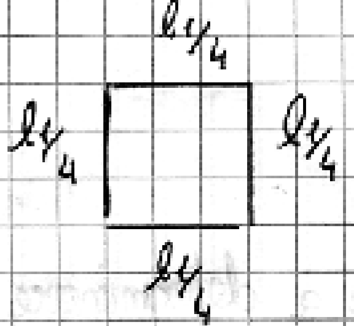


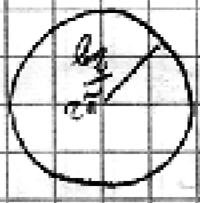
Il rettangolo richiesto è, pertanto, il quadrato di lato $\frac{\ell}{4}$ e area $\frac{\ell^2}{16}$.

b) Tagliando il filo otteniamo due fili di lunghezza, rispettivamente, pari ad ℓ_1 (l'incognita) ed $\ell_2 = \ell - \ell_1$.
L'aiuola quadrata delimitata dal filo di lunghezza ℓ_1 ~~...~~ avrà lato $\frac{\ell_1}{4}$, mentre quella circolare delimitata da ℓ_2 avrà raggio pari ad $\frac{\ell_2}{2\pi}$

$P = \ell_1$

$\text{lato} = \frac{\ell_1}{4}$





$C = \ell_2 = \ell - \ell_1$

$R = \frac{\ell_2}{2\pi} = \frac{\ell - \ell_1}{2\pi}$

per cui, indicando con A_Q e A_C le aree, rispettivamente, del quadrato e del cerchio, otteniamo che:

$$A_Q = \left(\frac{\ell_1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}\ell_1^2$$

$$A_C = \pi R^2 = \pi\left(\frac{\ell - \ell_1}{2\pi}\right)^2 = \frac{1}{4\pi}(\ell - \ell_1)^2$$

Per rispondere alle domande b) e c), pertanto, è sufficiente determinare i punti di massimo e minimo assoluto della funzione:

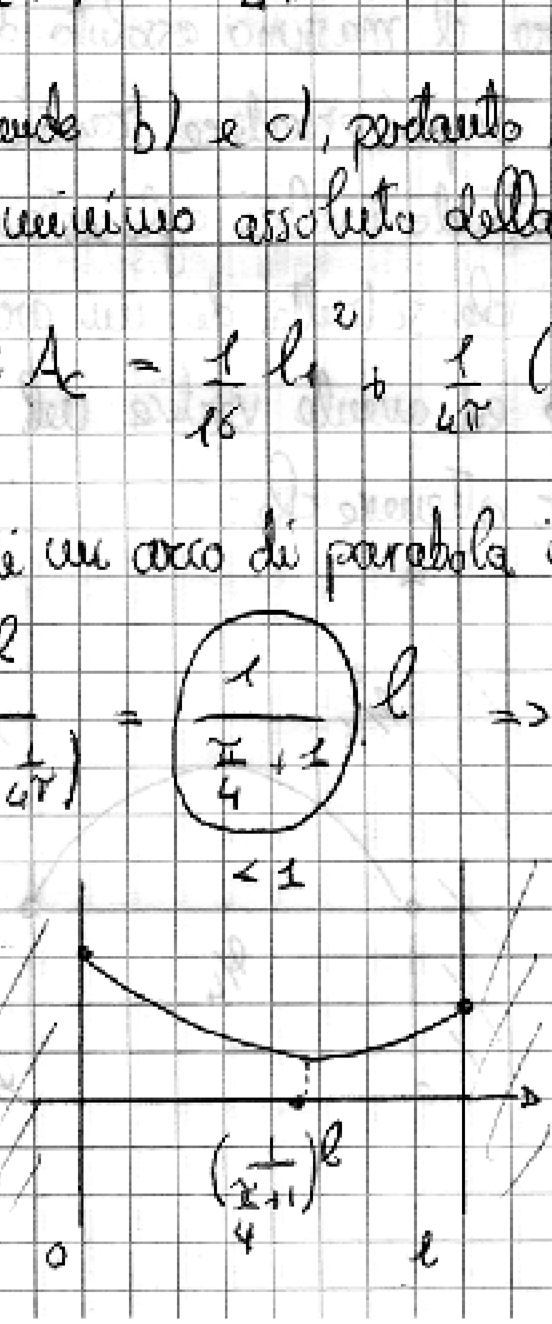
$$\tilde{A}(\ell_1) = A_Q + A_C = \frac{1}{16}\ell_1^2 + \frac{1}{4\pi}(\ell - \ell_1)^2, \text{ con } \ell_1 \in [0, \ell]$$

Si tratta, nuovamente, di un arco di parabola il cui vertice ha ascissa pari a

$$x_V = -\frac{-\frac{1}{2\pi}\ell}{2\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4\pi}\right)} = \frac{1}{\frac{\pi}{4} + 1}\ell \Rightarrow x_V \in (0, \ell)$$

< 1

per cui si ha:



$\tilde{A}(0) = \frac{1}{4\pi}\ell^2$

$\tilde{A}(\ell) = \frac{1}{16}\ell^2$

Per cui si ottiene che la somma delle aree è minima quando si sceglie

$$l_1 = \frac{1}{\frac{\pi}{4}+1} \cdot l$$

mentre è massima per $l_1 = 0$, ossia quando il filo viene utilizzato tutto per realizzare un'aiuola circolare.

Infine, il problema del parallelepipedo si risolve indicando con l_1, l_2 ed l_3 i lati iniziali e calcolando il volume prima e dopo l'aumento del 10%, otteniamo:

$$V = l_1 l_2 l_3 \qquad V_{aumentato} = \left(l_1 + \frac{1}{10}l_1\right)\left(l_2 + \frac{1}{10}l_2\right)\left(l_3 + \frac{1}{10}l_3\right)$$

$$= \left(1+\frac{1}{10}\right)l_1 \left(1+\frac{1}{10}\right)l_2 \left(1+\frac{1}{10}\right)l_3 =$$

$$= \left(1+\frac{1}{10}\right)^3 l_1 l_2 l_3$$

per cui $$\frac{V_{aumentato}}{V} = \frac{\left(1+\frac{1}{10}\right)^3 \cancel{l_1 l_2 l_3}}{\cancel{l_1 l_2 l_3}} = \left(1+\frac{1}{10}\right)^3 = 1 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{1}{1000} = 1,331$$

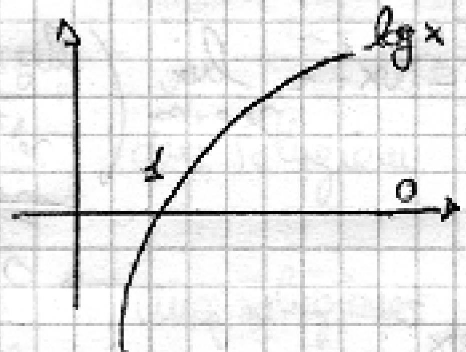
e quindi si è avuto un incremento di volume dello 0,331 ossia del 33,1%.

Problema 2

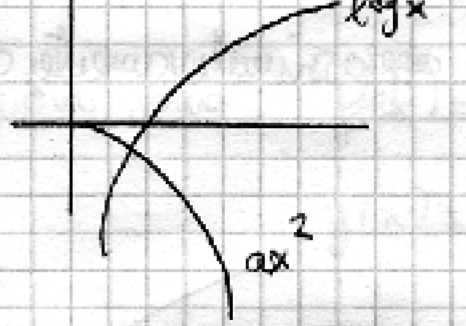
1) Per risolvere l'equazione $\log x = ax^2$ può essere conveniente distinguere i seguenti casi

$a=0$ Questo è il caso più semplice in quanto l'equazione diventa

$\log x = 0 \Rightarrow$ $x=1$ è l'unica soluzione



$a<0$ In questo caso si hanno i seguenti grafici:



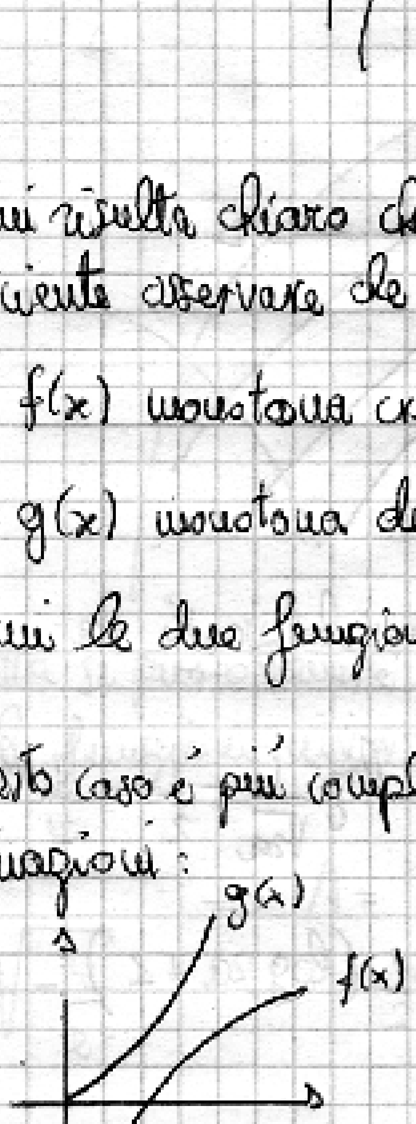
per cui risulta chiaro che esisterà un'unica soluzione. Per dimostrarlo è sufficiente osservare che

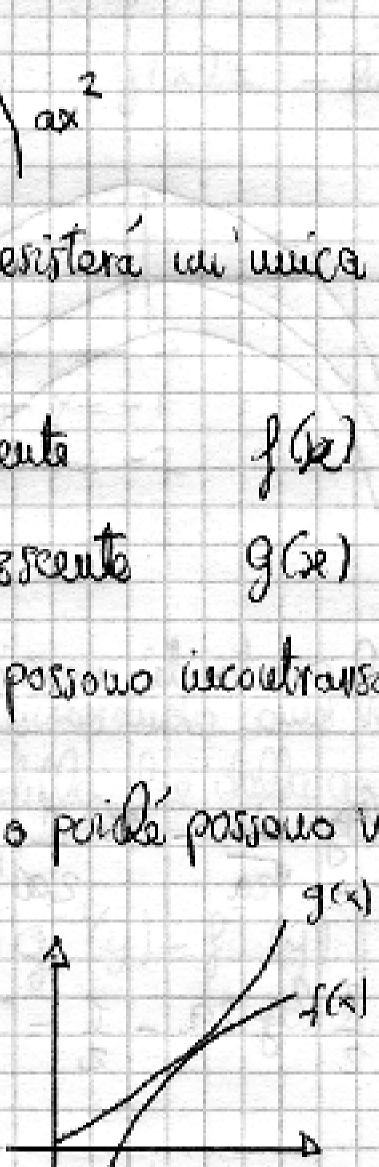
$f(x)$ monotona crescente $\quad f(x) \xrightarrow{x \to 0^+} -\infty, \; f(x) \xrightarrow{x \to +\infty} +\infty$

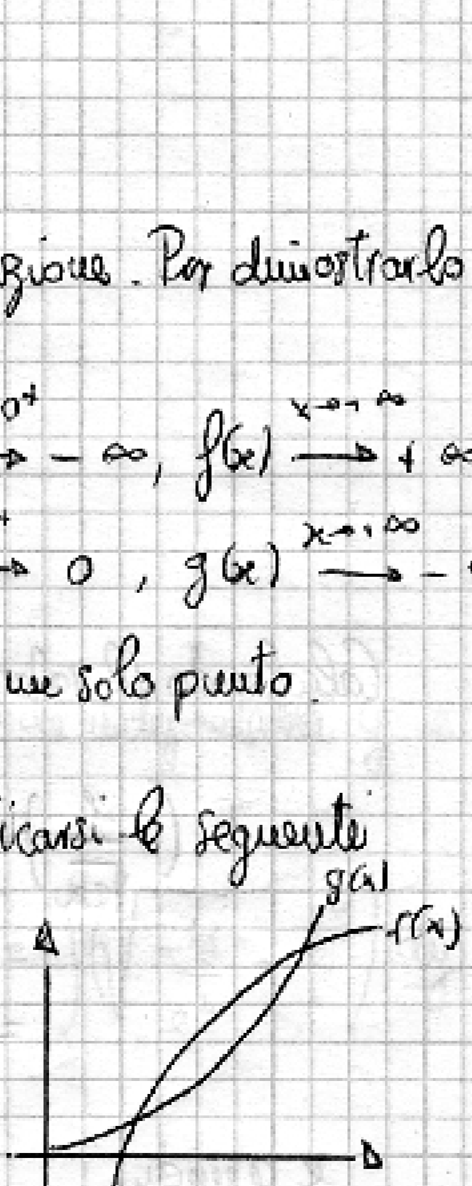
$g(x)$ monotona decrescente $\quad g(x) \xrightarrow{x \to 0^+} 0, \; g(x) \xrightarrow{x \to +\infty} -\infty$

per cui le due funzioni possono incontrarsi in un solo punto.

$a>0$ Questo caso è più complesso poiché possono verificarsi le seguenti situazioni:







Per determinare quali casi si presentino al variare di a, conviene studiare l'andamento della funzione

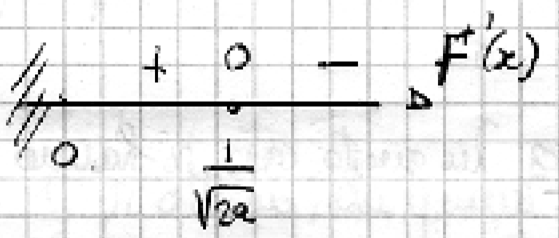
$$F(x) = -ax^2 + \log x$$

nell'intervallo $(0, +\infty)$.

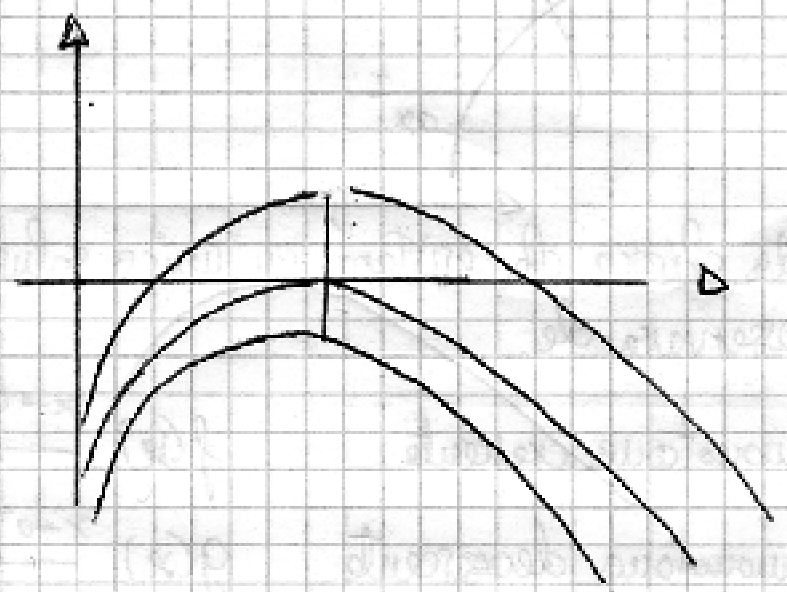
$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0^+} -ax^2 + \log x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \log x - ax^2 = \lim_{x \to +\infty} \Big(\underbrace{\frac{\log x}{x^2}}_{\to 0} - a \Big) \cdot x^2 = -\infty$$

$$F'(x) = \frac{1}{x} - 2ax = \frac{1 - 2ax^2}{x}$$



per cui l'andamento sarà approssimativamente questo:



Calcolando il valore nel punto di massimo relativo si ha:

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right) = \log \frac{1}{\sqrt{2a}} - \cancel{a} \frac{1}{2\cancel{a}} = \log \frac{1}{\sqrt{2a}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \log \frac{1}{2a} - \frac{1}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2} \log 2a - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} (\log 2a + 1)$$

e quindi:

$-\frac{1}{2}\left(\log 2a + 1\right) > 0 \iff \log 2a + 1 < 0 \iff \log 2a < -1 \iff$

$\iff 2a < \frac{1}{e} \iff a < \frac{1}{2e}$

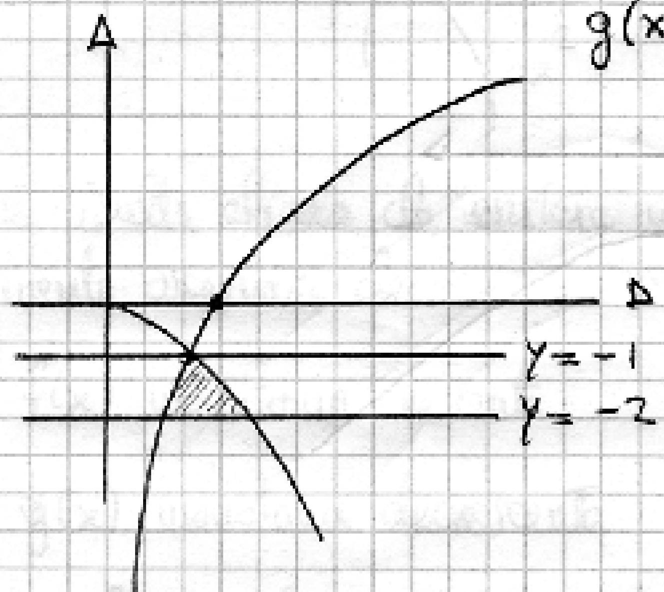
$-\frac{1}{2}\left(\log 2a + 1\right) = 0 \iff a = \frac{1}{2e}$

$-\frac{1}{2}\left(\log 2a + 1\right) < 0 \iff a > \frac{1}{2e}$

per cui $\begin{cases} 0 < a < \frac{1}{2e} & \text{due soluzioni} \\ a = \frac{1}{2e} & \text{una soluzione (e questo è il valore per cui sono tangenti } f \text{ e } g\text{).} \\ a > \frac{1}{2e} & \text{ness una soluzione} \end{cases}$

2) Per $a = -e^2$ le funzioni sono: $f(x) = \log x$

$g(x) = -e^2x^2$



L'area richiesta si può ottenere considerando come variabile indipendente y e integrando le funzioni inverse della f e della g.

$f^{-1}(y) = e^y$

$g^{-1}(y) = \sqrt{-\frac{y}{e^2}}$

$\Rightarrow A = \int_{-2}^{-1}\left[g^{-1}(y) - f^{-1}(y)\right] dy = \int_{-2}^{-1}\left(\sqrt{\frac{-y}{e^2}} - e^y\right) dy$

Poiché $\displaystyle\int \sqrt{-\frac{y}{e^2}}\,dy = \frac{1}{e}\int \sqrt{-y}\,dy = \frac{1}{e}\,\frac{2}{3}(-y)^{3/2}$

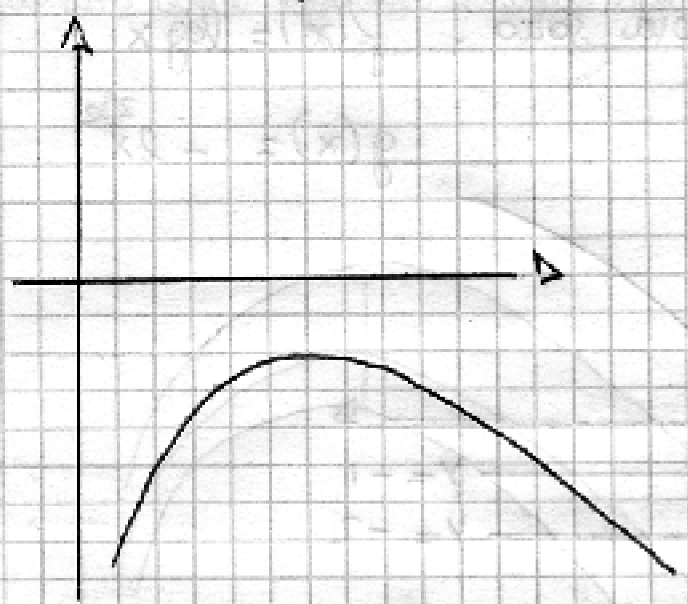
$$\int e^y\,dy = e^y$$

sarà:

$$A = \int_{-2}^{-1}\left(\sqrt{-\frac{y}{e^2}} - e^y\right)dy = \frac{1}{e}\,\frac{2}{3}(-y)^{3/2}\Big|_{-2}^{-1} - e^y\Big|_{-2}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{e}\,\frac{2}{3}\left(1 - 2\sqrt{2}\right) - \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}\right)$$

3) Prendendo, ad esempio, il valore $a = 1 > \frac{1}{2e}$ si ottiene, da quanto visto prima, il seguente grafico di funzione



Questionario

1) La somma dei chicchi di grano presenti sulla scacchiera é pari a

$$S = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{63}$$

(sulla casella n-esima sono presenti 2^{n-1} chicchi). Basandosi su quanto noto a proposito delle progressioni geometriche, o anche tramite osservazione diretta, é chiaro che la somma di cui sopra é pari a

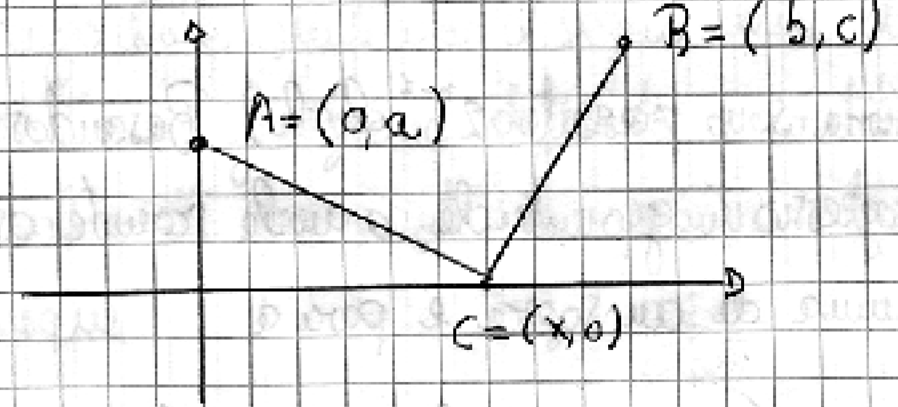
$$S = 2^{64} - 1$$ (in generale la somma delle prime n potenze di 2 sarà pari a $2^n - 1$)

Considerando che un singolo chicco pesa 38 milligrammi, ossia 38×10^{-9} tonnellate, otteniamo che il peso complessivo sarà pari a

$$P = (2^{64} - 1) \times 38 \times 10^{-9} \text{ tonnellate} =$$

2)

3) Prendiamo un riferimento che abbia la retta r come asse delle ascisse ed i punti A e B nel semipiano superiore e scegliamo l'asse delle ordinate in modo che il punto A vi appartenga:



É chiaro che il più breve cammino che congiunga A con B toccando r sarà dato dalla spezzata formata dai segmenti AC e BC, dove C é un generico punto dell'asse delle ascisse. Si tratta, nuovamente, di un problema di minimo dove la funzione da minimizzare é data da:

$$f(x) = \overline{AC} + \overline{BC} = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(b-x)^2 + c^2}, \text{ con } x \in \mathbb{R}$$

Calcolando la derivata si ottiene

$$f'(x) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{-\cancel{2}(b-x)}{\cancel{2}\sqrt{(b-x)^2+c^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{x-b}{\sqrt{(b-x)^2+c^2}}$$

e cercandone i punti stazionari otteniamo:

$$f'(x) = 0 \iff \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{x-b}{\sqrt{(b-x)^2+c^2}} = 0 \iff$$

$$\iff \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2+c^2}} \iff$$

$$\iff x\sqrt{(b-x)^2+c^2} = (b-x)\sqrt{x^2+a^2}$$

Questa equazione irrazionale é equivalente a quella ottenuta elevando al quadrato entrambi i membri, purché si aggiungano le opportune condizioni sui segni, si ottiene così:

$$f'(x)=0 \iff \begin{cases} x^2\cdot\left[(b-x)^2+c^2\right]=(b-x)^2(x^2+a^2) \\ x \text{ e } (b-x) \text{ concordi} \end{cases}$$

ossia $\begin{cases} x(b-x)\geq 0 \\ \cancel{x^2(b-x)^2}+x^2c^2=\cancel{(b-x)^2x^2}+(b-x)^2a^2 \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} x(b-x)\geq 0 \\ x^2c^2=(b-x)^2a^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x(b-x)\geq 0 \\ \pm xc=(b-x)a \end{cases}$$

e quindi $(b-x)a=xc$ oppure $(b-x)a=-xc$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$(a+c)x=ab \qquad\qquad (a-c)x=ab$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$x=\frac{ab}{a+c} \qquad\qquad x=\frac{ab}{a-c}$$

Questa soluzione è accettabile perché

$$\frac{ab}{a+c}\left(b-\frac{ab}{a+c}\right)=$$

$$=\frac{ab}{(a+c)^2}(\cancel{ab}+bc-\cancel{ab})=$$

$$=\frac{abc^2}{(a+c)^2}>0.$$

Questa soluzione va scartata perché non soddisfa la condizione $x(b-x)\geq 0$ infatti:

$$\frac{ab}{a-c}\left(b-\frac{ab}{a-c}\right)=\frac{ab}{(a-c)^2}(\cancel{ab}-bc-\cancel{ab})$$

$$=-\frac{abc^2}{(a-c)^2}<0$$

Per $\bar{x} = \dfrac{ab}{a+c}$, pertanto, la derivata vale zero. Per determinare se si tratta di un punto di massimo relativo, di minimo relativo o di flesso a tangente orizzontale, studiamo il segno della derivata su tutto $\mathbb{R}$.
Poiché $f'(x)$ è una funzione definita e continua su tutto $\mathbb{R}$, basta calcolarne il valore in due punti, uno prima ed uno dopo $\bar{x}$ per avere il segno ovunque.
Ad esempio

$$f'(0) = \cancel{\frac{0}{\sqrt{0+a^2}}} + \frac{0-b}{\sqrt{(0-b)^2+c^2}} = -\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} < 0$$

$$f'(b) = \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} + \cancel{\frac{\overset{0}{b-b}}{\sqrt{(b-b)^2+c^2}}} = \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} > 0$$

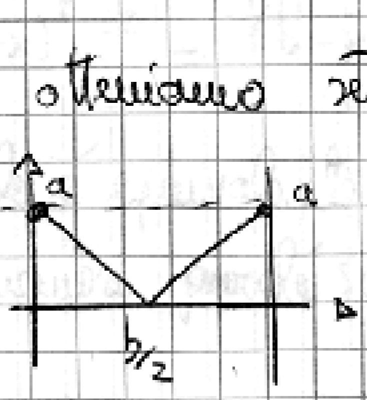
$$\left(\text{Ovviamente} \quad 0 < \frac{a}{a+c}\, b < b\right)$$

per cui:

$$\begin{array}{ccccccccc} - & - & - & 0 & + & + & + & f'(x) \\ \hline & & & \frac{ab}{a+c} & & & & x \end{array}$$

e quindi per $x = \dfrac{ab}{a+c}$ abbiamo il minimo, assoluto e relativo, della distanza cercata.

Osserviamo che, per $a = c$ otteniamo $\bar{x} = \dfrac{ab}{a+a} = \dfrac{\cancel{a}b}{2\cancel{a}} = \dfrac{b}{2}$, come è naturale attendersi



4) Si consideri l'equazione $\operatorname{sen} x = x - 1$ come la ricerca degli zeri della funzione:

$$f(x) = \operatorname{sen} x - (x-1)$$

Poiché la funzione $f(x)$ è continua, possiamo applicare il teorema di esistenza degli zeri; consideriamo il valore della funzione nei punti $x_0 = 0$ ed $x_1 = \pi$; si ha che:

$$f(0) = \operatorname{sen} 0 - (0-1) = 1 > 0$$
$$f(\pi) = \operatorname{sen}\pi - (\pi - 1) = 1 - \pi < 0$$

per cui deve esistere almeno un α compreso tra 0 e π per cui $f(\alpha) = 0$.
Per dimostrare che questa soluzione è l'unica studiamo l'andamento della funzione tramite la sua derivata

$$f'(x) = \cos x - 1 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

per cui la funzione sarà monotona non ~~de~~ crescente su tutto il suo insieme di definizione. La soluzione pertanto deve essere unica.

Per determinare il valore di α si può utilizzare, ad esempio, il metodo di bisezione che consiste nel suddividere l'intervallo $[x_0, x_1]$ in due parti e determinare su quale dei due sottointervalli sia ancora applicabile il teorema. Iterando il procedimento si ottengono stime sempre migliori del numero α; a titolo di esempio effettuiamo i primi passi:

$$\begin{matrix} x_0 = 0 \\ x_1 = \pi \end{matrix} \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x_2) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 2 - \frac{\pi}{2} > 0$$

$$\Rightarrow \alpha \in [x_2, x_1] \Rightarrow x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{\pi}{2} + \pi}{2} = \frac{3}{4}\pi \Rightarrow f(x_3) = \operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi - \left(\frac{3}{4}\pi - 1\right)$$

$$\Rightarrow f(x_3) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{3}{4}\pi < 0 \Rightarrow \alpha \in [x_2, x_3] = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi\right] \ldots\ldots$$

5) Considerando che i coefficienti binomiali $\binom{n}{k}$ sono definiti tramite la formula

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

sostituendo ad a e b il valore 1 otteniamo:

$$\underbrace{(1+1)^n}_{=2^n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

ossia proprio la formula richiesta.

6) Risolvendo l'equazione si ottiene

$$k\cos 2x - 5k + 2 = 0 \Rightarrow \cos 2x = \frac{5k-2}{k}$$

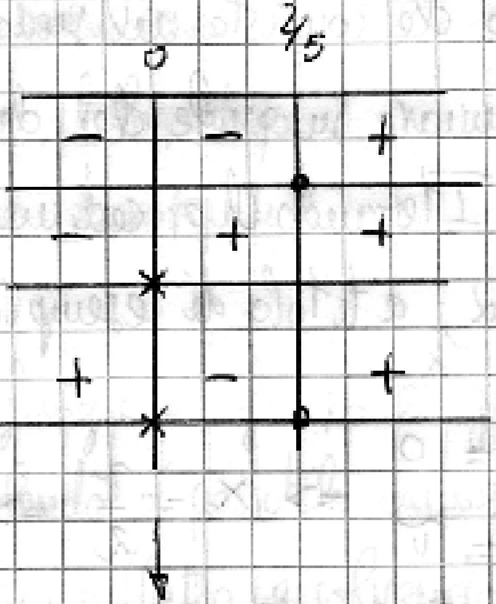
Poiché deve essere $15° < x < 45°$, si ottiene

$$15° < x < 45° \Rightarrow 30° < 2x < 90° \Rightarrow \cos 90° < \cos 2x < \cos 30°$$

$$\Rightarrow \quad 0 < \cos 2x < \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 0 < \frac{5k-2}{k} < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Bisogna quindi risolvere il sistema

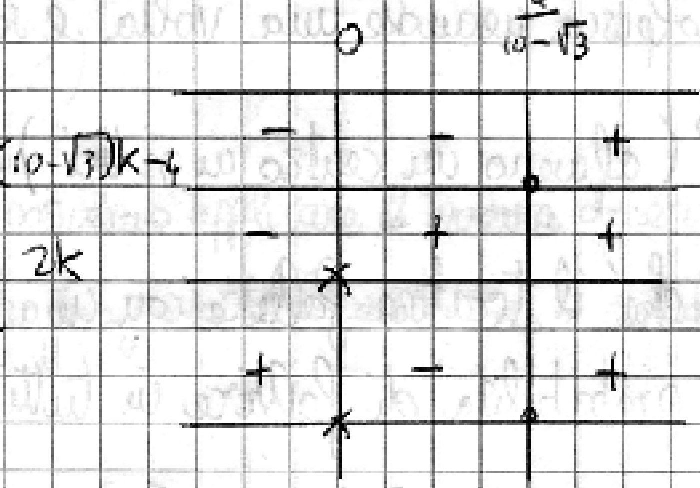
$$\begin{cases} \dfrac{5k-2}{k} > 0 \longrightarrow \dfrac{5k-2}{k} \\[2ex] \dfrac{5k-2}{k} < \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$



$k < 0$ oppure $k > \frac{2}{5}$

$$\frac{5k-2}{k}-\frac{\sqrt{3}}{2}<0 \iff \frac{10k-4-\sqrt{3}k}{2k}<0 \iff$$

$$\iff \frac{(10-\sqrt{3})k-4}{2k}<0$$

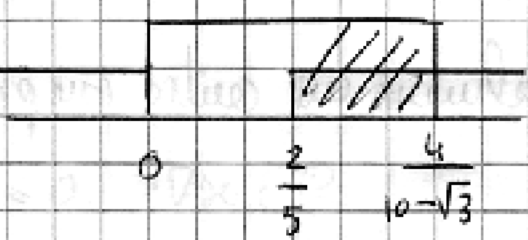


$$\Downarrow$$

$$0<k<\frac{4}{10-\sqrt{3}}$$

per cui:

$$\begin{cases} k<0 \text{ oppure } k>\frac{2}{5} \\ 0<k<\frac{4}{10-\sqrt{3}} \end{cases}$$



e quindi $\frac{2}{5}<k<\frac{4}{10-\sqrt{3}}$.

7) Il quesito, più che di vera e propria matematica, può essere considerato un quesito di filosofia. La matematica, particolarmente dal Settecento in poi, ha sviluppato una teoria necessaria a definire in maniera operativa e rigorosa il concetto di probabilità. Una risposta accettabile del candidato dovrebbe come minimo ricordare le varie definizioni di probabilità per tentare di interpretare il significato della frase citata.

8) La probabilità che il tiratore colpisca almeno una volta il bersaglio in n tiri si determina facilmente calcolando la probabilità che non lo colpisca neanche una volta e sottraendola dal valore 1.

$P = P$ (almeno un centro in n tiri) $= 1 - P$ (nessun centro in n tiri)

Poiché il tiratore fallisce con una probabilità di 0,7 ogni singolo tiro, la probabilità di fallire in tutti e n i tiri è pari a

$$P(n \text{ tiri falliti}) = [P(1 \text{ tiro fallito})]^n = (0,7)^n$$

e quindi:

$$P = 1 - (0,7)^n$$

Per fare almeno un centro con probabilità $\geq 0,99$, pertanto, dovrà essere:

$$1 - (0,7)^n \geq 0,99 \Rightarrow 1 - 0,99 \geq (0,7)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (0,7)^n \leq 0,01 \Rightarrow n \geq \log_{0,7}(0,01)$$

(Ricordiamo che se la base è minore di 1, il logaritmo è una funzione decrescente)

9) È noto a tutti gli studenti che la funzione $f(x) = e^x$ gode di tutte le proprietà richieste dal quesito. Volendo è possibile dimostrare che, in effetti, si tratta dell'unica funzione siffatta risolvendo, con metodi elementari, la seguente equazione differenziale

$$f'(x) = f(x) \quad , \text{con } f(0) = 1$$

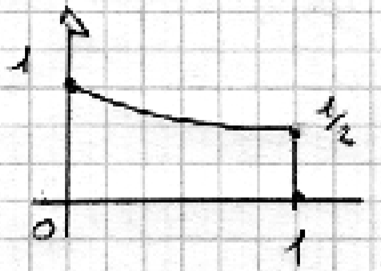
$$f'(x)=f(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=1 \Rightarrow \int_0^Y \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\int_0^Y 1\,dx$$

$$\Rightarrow \log(f(x))\Big|_0^Y = x\Big|_0^Y \Rightarrow \log(f(Y))-\log(f(0))=Y-0$$

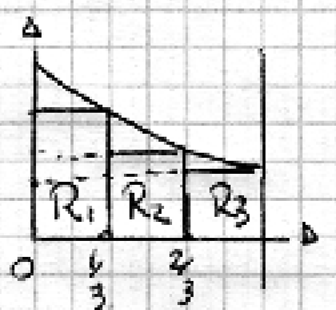
$$\Rightarrow \log(f(Y))-\underbrace{\cancel{\log(1)}}_{0} = Y \Rightarrow \log(f(Y))=Y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{f(Y)=e^{Y}}$$

10) Studiando la funzione integranda nell'intervallo [0,1] si ottiene il seguente andamento



Sapendo che l'area vale $\frac{\pi}{4}$, possiamo approssimare π, ad esempio, calcolando l'area del polirettangolo inscritto relativo ad una divisione dell'intervallo in tre parti



$f(0)=1 \rightarrow R_1=\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\left(\frac{\cancel{9}^{\,3}}{10}\right)=\frac{3}{10}$

$f(\frac{1}{3})=\frac{9}{10} \rightarrow R_2=\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{9}^{\,3}}{13}=\frac{3}{13}$

$f(\frac{2}{3})=\frac{9}{13}$

$f(1)=\frac{1}{2} \rightarrow R_3=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

Per cui $\frac{\pi}{4}\approx\frac{3}{10}+\frac{3}{13}+\frac{1}{6}=0{,}6974 \Rightarrow \pi\approx 2{,}789$

Ovviamente in questo modo si ottiene un'approssimazione molto grossolana e per avere una precisione maggiore occorre utilizzare una suddivisione più fine dell'intervallo o, in alternativa, un metodo di approssimazione più efficiente come, ad esempio, quello dei trapezi.