1.

LUGLIO 1947
PRIMO PROBLEMA

IN UN SISTEMA DI ASSI CARTESIANI ORTOGONALI È DATO IL CERCHIO AVENTE IL CENTRO NELL'ORIGINE O DEGLI ASSI E RAGGIO $\sqrt{5}$.

DETERMINARE I VALORI DEI PARAMETRI h E K IN MODO CHE LE RETTE

$$x+2y-h=0$$
$$2x+y-K=0$$

RISULTINO TANGENTI AL CERCHIO RISPETTIVAMENTE IN A E B DEL PRIMO QUADRANTE.

DETERMINARE INOLTRE LE COORDINATE DEI PUNTI DI CONTATTO A E B E DEL PUNTO C DI INTERSEZIONE DELLE DUE TANGENTI.

DETERMINARE INFINE LA TANGENTE TRIGONOMETRICA DELL'ANGOLO $A\hat{O}B$.

L'equazione della circonferenza è

$$x^2+y^2-5=0$$

Mettiamo a sistema l'equazione della circonfe=

renza con ciascuno dei due fasci di rette

$$\begin{cases} x^2+y^2-5=0 \\ x=h-2y \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2-5=0 \\ y=K-2x \end{cases}$$

eliminiamo una delle due incognite

$$h^2-4hy+4y^2+y^2-5=0 \qquad K^2-4Kx+4x^2+x^2-5=0$$

$$5y^2-4hy+h^2-5=0 \qquad 5x^2-4Kx+K^2-5=0$$

e imponiamo le condizioni di tangenza

$$\frac{\Delta}{4}=4h^2-5(h^2-5)=0 \qquad \frac{\Delta}{4}=4K^2-5(K^2-5)=0$$

$$h=\pm 5 \qquad K=\pm 5$$

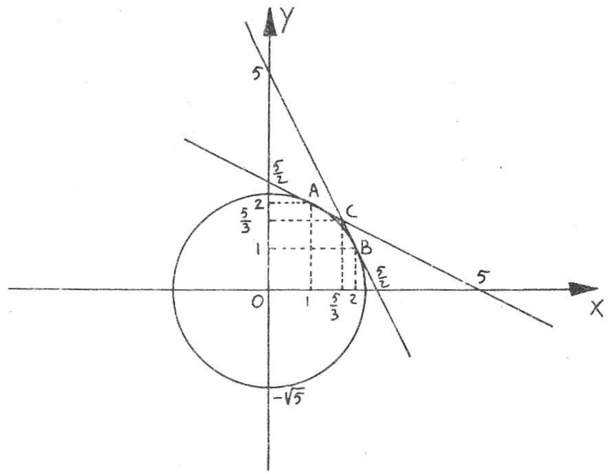
In entrambi i casi il segno negativo va scartato perchè i punti di tangenza A e B si devono trovare nel primo quadrante e quindi nelle equazioni delle rette, di tipo

$$y=mx+q$$

il termine noto q deve essere positivo.

Le rette tangenti hanno dunque equazione

$$x+2y-5=0$$
$$2x+y-5=0$$



Risolvendo i due sistemi

$$\begin{cases} x^2+y^2-5=0 \\ x=5-2y \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2-5=0 \\ y=5-2x \end{cases}$$

si trovano le coordinate dei punti

$$B\equiv(2;1) \qquad A\equiv(1;2)$$

Per le coordinate di C basta mettere a sistema le equazioni delle due rette

$$\begin{cases} x=5-2y \\ 2x+y-5=0 \end{cases}$$

e si ottiene

$$C \equiv \left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$$

Passando all'ultima domanda, si ha

$$\begin{cases} \text{coeff. angolare retta } OA \longrightarrow m_1 = 2 \\ \text{coeff. angolare retta } OB \longrightarrow m_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

e perciò

$$\tan A\hat{O}B = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$$