2.

1947: SECONDO PROBLEMA

I DUE SETTORI CIRCOLARI CONSECUTIVI AOB, BOC DEL CERCHIO DI CENTRO O E RAGGIO r, HANNO CIASCUNO L'ANGOLO AL CENTRO DI AMPIEZZA $\alpha \leq 45°$. SI DETERMINI L'ANGOLO AL CENTRO α IN MODO CHE SIA K IL RAPPORTO FRA IL MAGGIORE E IL MINORE DEI DUE SOLIDI GENERATI DAI DUE SETTORI DATI, IN UNA ROTAZIONE COMPLETA ATTORNO ALLA RETTA OA.

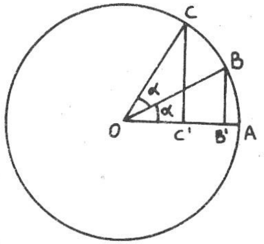
SI CONSIDERI IL CASO PARTICOLARE

$$K = 2 + \sqrt{2}$$

N.B. PER LA RISOLUZIONE DEL PROBLEMA IL CANDIDATO PUÒ RICORDARE CHE SE SI HA UN SETTORE CIRCOLARE AOB, ED H È LA PROIEZIONE ORTOGONALE DI B SU OA, IL VOLUME DEL SOLIDO GENERATO DAL SETTORE IN UNA ROTAZIONE COMPLETA ATTORNO ALLA RETTA OA È DATO DA

$$\frac{2}{3}\pi r^2 h$$

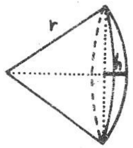
DOVE r ED h SONO RISPETTIVAMENTE LE MISURE DI OA ED HA.



$OA = r$

$\alpha \leq 45°$

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h$$



Ciascun settore, con una rotazione completa attorno ad OA genera un settore sferico.
Determiniamo AB' e AC'

$$OB' = r\cos\alpha$$

$$AB' = r - r\cos\alpha = r(1-\cos\alpha)$$

$$OC' = r\cos 2\alpha$$

$$AC' = r - r\cos 2\alpha = r(1-\cos 2\alpha) =$$

$$= r(1-\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha) =$$

$$= r(1-\cos^2\alpha + 1 - \cos^2\alpha) =$$

$$= 2r(1-\cos^2\alpha)$$

Imponiamo la relazione del problema

$$\frac{V_{OCA}}{V_{OBA}} = k \qquad (\text{con } k > 1)$$

$$\frac{\frac{2}{3}\pi r^2 \cdot 2r(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}{\frac{2}{3}\pi r^2 \cdot r(1-\cos\alpha)} = k$$

semplificando e dividendo per $(1-\cos\alpha)$, si ha

$$2(1+\cos\alpha) = k$$

con la condizione $\cos\alpha \neq 1$, cioè $\alpha \neq 0°$.
Poiché α può variare fra $0°$ e $45°$, si deve discutere l'equazione parametrica di primo grado

$$\boxed{\begin{array}{l} 2\cos\alpha + 2 - k = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos\alpha < 1 \\ k > 1 \end{array}}$$

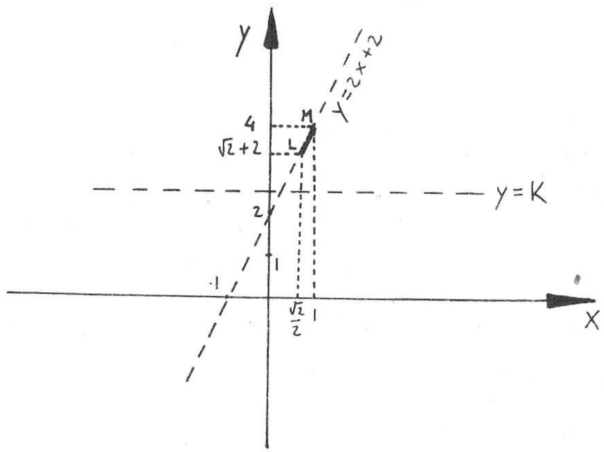
Basta porre

$$\begin{cases} \cos\alpha = x \\ k = y \end{cases}$$

per ottenere

$$\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = k \end{cases}$$

cioè l'equazione di una retta e di un fascio di rette parallele all'asse x. A causa delle limitazioni si deve però considerare solo il segmento di retta con ascisse comprese fra $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ed 1, e quelle rette del fascio con ordinata maggiore di 1 -



Le soluzioni del problema sono costituite dalle intersezioni fra la prima retta e il fascio di rette -

Poichè le ordinate dei punti estremi del segmento LM sono $2+\sqrt{2}$ e 4, il problema ha sempre una soluzione per

$$\boxed{2+\sqrt{2} \leq K < 4}$$

Nel caso particolare $K = 2+\sqrt{2}$ si ha $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ cioè $\alpha = 45°$ -