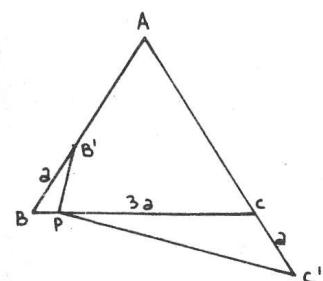


3.

**SETTEMBRE 1947**  
**PRIMO PROBLEMA**

DATO IL TRIANGOLO ISOSCELE ABC, LA CUI BASE BC MISURA  $3a$  E IL CUI ANGOLO AL VERTICE  $\hat{BAC}$  HA PER COSENTO  $\frac{7}{25}$ , SI INDICHINO CON  $B'$  E  $C'$  DUE PUNTI SITUATI, IL PRIMO SUL LATO BA E IL SECONDO SUL PROlungamento del lato AC dalla parte di C, IN MODO CHE SIA  $BB' = CC' = a$  -

DETERMINARE SULLA BASE BC UN PUNTO P, IN MODO CHE LA SOMMA DEI QUADRATICHE MISURE DELLE SUE DISTANZE DA  $B'$  E DA  $C'$  SIA  $2K^2a^2$ , ESSENDO K UN NUMERO REALE DATO - DISCUSSIONE -



$$BB' = CC' = a$$

$$BC = 3a$$

$$\cos \hat{A} = \frac{7}{25}$$

Poniamo

$$AB = x$$

Applichiamo il teorema di Carnot

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \hat{A}$$

$$9\alpha^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \frac{7}{25}$$

$$9\alpha^2 = \frac{36}{25} x^2$$

$$x^2 = \frac{9 \cdot 25}{36} \alpha^2$$

$$x = \frac{5}{2} \alpha$$

quindi

$$\boxed{AB = AC = \frac{5}{2} \alpha}$$

Sfruttando la prima relazione fondamentale calcoliamo il seno dell'angolo in A

$$\sin \hat{A} = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{49}{625}} = \sqrt{\frac{576}{625}} = \frac{24}{25}$$

e, applicando il teorema dei seni al triangolo isoscele, calcoliamo il seno degli angoli alla base

$$AC : \sin \hat{B} = BC : \sin \hat{A}$$

$$\sin \hat{B} = \frac{AC \cdot \sin \hat{A}}{BC} = \frac{\frac{5}{2} \alpha \cdot \frac{24}{25}}{3\alpha} = \frac{4}{5}$$

Infine, usando nuovamente la prima relazione fondamentale, ricaviamoci il coseno degli angoli alla base

$$\cos \hat{B} = \sqrt{1 - \sin^2 \hat{B}} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

quindi

$$\boxed{\cos \hat{B} = \cos \hat{C} = \frac{3}{5}}$$

Consideriamo ora il triangolo BB'P, poniamo nuovamente

$$BP = x$$

e calcoliamo  $\overline{B'P}^2$  applicando il teorema di Carnot

$$\overline{B'P}^2 = \alpha^2 + x^2 - 2\alpha x \cdot \frac{3}{5}$$

cioè

$$\boxed{\overline{B'P}^2 = \alpha^2 + x^2 - \frac{6\alpha x}{5}}$$

Passiamo ora al triangolo PCC'. Poiché

$$\cos(180 - \alpha) = -\cos \alpha$$

si ha

$$\cos \hat{P'C} = -\cos \hat{ACB} = -\frac{3}{5}$$

E inoltre

$$PC = 3\alpha - x$$

$$CC' = \alpha$$

Applicando Carnot, si trova

$$\begin{aligned}\overline{PC'}^2 &= \overline{PC}^2 + \overline{CC'}^2 - 2 \cdot \overline{PC} \cdot \overline{CC'} \cdot \cos P\hat{C}C' \\ \overline{PC'}^2 &= (3\alpha - x)^2 + \alpha^2 - 2(3\alpha - x)\alpha \left(-\frac{3}{5}\right) = \\ &= 9\alpha^2 - 6\alpha x + x^2 + \alpha^2 + \frac{6}{5}\alpha(3\alpha - x) = \\ &= 10\alpha^2 - 6\alpha x + x^2 + \frac{18}{5}\alpha^2 - \frac{6}{5}\alpha x\end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{PC'}^2 = \frac{68}{5}\alpha^2 - \frac{36}{5}\alpha x + x^2}$$

Imponiamo finalmente la relazione del problema

$$\overline{BP}^2 + \overline{PC'}^2 = 2K^2\alpha^2$$

$$\alpha^2 + x^2 - \frac{6}{5}\alpha x + \frac{68}{5}\alpha^2 - \frac{36}{5}\alpha x + x^2 = 2K^2\alpha^2$$

$$\boxed{10x^2 - 42\alpha x + 73\alpha^2 - 10K^2\alpha^2 = 0}$$

che è l'equazione parametrica da discutere, con

$$\boxed{\begin{aligned}0 &\leq x \leq 3\alpha \\ \alpha &> 0\end{aligned}}$$

Eseguiamo la discussione grafica ponendo

$$y = 10K^2\alpha^2$$

Si ottiene

$$\begin{cases} y = 10x^2 - 42\alpha x + 73\alpha^2 \\ y = 10K^2\alpha^2 \end{cases}$$

cioè una parabola e un fascio di rette orizzontali.

La parabola ha asse verticale, concavità verso l'alto, e vertice con coordinate

$$\begin{cases} V_x = \frac{21}{10}\alpha = 2,1\alpha \\ V_y = \frac{289}{10}\alpha^2 = 28,9\alpha^2 \end{cases}$$

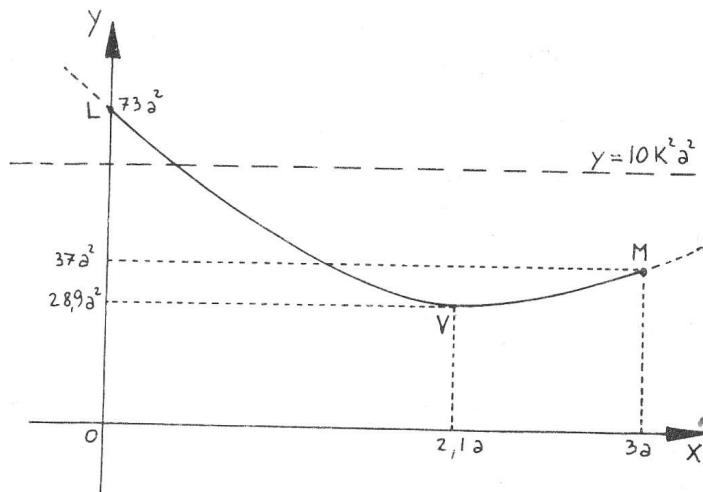
Essa taglia l'asse y nel punto di ordinata  $73\alpha^2$ , e non ha alcuna intersezione con l'asse x.

Poiché la x deve avere valori compresi fra 0 e  $3\alpha$ , dobbiamo considerare solo l'arco di parabola che va dal punto

$$L \equiv (0; 73\alpha^2)$$

al punto

$$M \equiv (3\alpha; 37\alpha^2)$$



Le soluzioni del problema al variare del parametro sono costituite dalle intersezioni fra l'arco LM di parabola e il fascio di rette orizzontali.

Si ha una soluzione limite per

$$10K^2a^2 = 73a^2 \rightarrow K^2 = 7,3$$

un'altra soluzione limite per

$$10K^2a^2 = 37a^2 \rightarrow K^2 = 3,7$$

e due soluzioni reali e coincidenti per

$$10K^2a^2 = 28,9a^2 \rightarrow K^2 = 2,89$$

inoltre una soluzione accettabile per

$$3,7 < K^2 < 7,3$$

e due soluzioni reali e distinte, entrambe accettabili, per

$$2,89 < K^2 < 3,7$$

In conclusione, si afferma, al variare del parametro

