4.

## 1947: SECONDO PROBLEMA

IN UN SISTEMA DI COORDINATE CARTESIANE DI ORIGINE O È DATA LA PARABOLA $y = 4 - x^2$ CHE TAGLIA L'ASSE x NEI PUNTI A E B, E L'ASSE DELLE ORDINATE NEL PUNTO V. È DATO INOLTRE SULL'ASSE y IL PUNTO C DI ORDINATA 8.

NELL'EQUAZIONE $y = mx + 8$ DETERMINARE I DUE VALORI DI m PER I QUALI LA RETTA È TANGENTE ALLA PARABOLA E VERIFICARE CHE I PUNTI DI CONTATTO SONO A E B.

DETERMINARE POI SU OV UN PUNTO Z DI ORDINATA z TALE CHE TRACCIANDO PER ESSO LA PARALLELA ALL'ASSE DELLE x, E DETTE D, E LE INTERSEZIONI DI ESSA CON LE TANGENTI GIÀ CONSIDERATE, F ED H LE INTERSEZIONI CON LA PARABOLA, VALGA LA RELAZIONE

$$\frac{DE}{FH} = K$$

DOVE K È UN NUMERO POSITIVO. DISCUSSIONE.



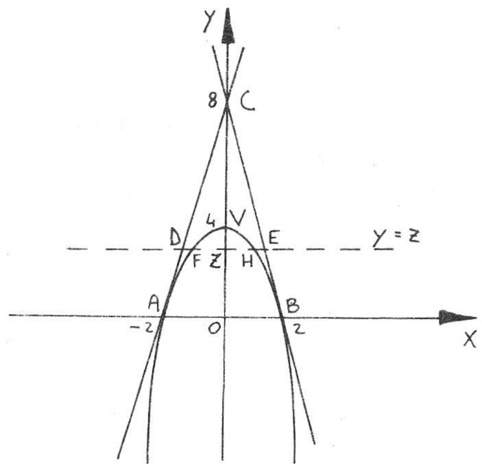
Disegnata la parabola

$$y = -x^2 + 4$$

mettiamola a sistema con il fascio di rette

$$y = mx + 8$$

avente centro nel punto C,




ed imponiamo la condizione di tangenza

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4 \\ y = mx + 8 \end{cases}$$

$$-x^2 + 4 = mx + 8$$

$$x^2 + mx + 4 = 0$$

$$\Delta = 0 \longrightarrow m^2 - 16 = 0 \longrightarrow \boxed{m = \pm 4}$$

Quindi le due rette tangenti hanno equazione

$$y = \pm 4x + 8$$

Risolvendo i sistemi costituiti dalla parabola e da ciascuna delle due rette tangenti si ottengono le coordinate dei due punti di tangenza

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4 \\ y = 4x + 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -x^2 + 4 \\ y = -4x + 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

che sono, appunto, le coordinate dei punti A e B.

La retta orizzontale passante per Z ha equazione

$$y = z$$

Determiniamo le coordinate di E

$$\begin{cases} y = -4x + 8 \\ y = z \end{cases}$$

$$E \equiv \left( \frac{8-z}{4} ; z \right)$$

e le coordinate di H



$$\begin{cases} y = -x^2 + 4 \\ y = z \end{cases}$$

$$H \equiv \left( \sqrt{4-z} ; z \right)$$

Risulta allora

$$DE = 2 \cdot \frac{8-z}{4} = \frac{8-z}{2}$$

$$FH = 2\sqrt{4-z}$$

e perciò, applicando la relazione del problema

$$\frac{DE}{FH} = K \longrightarrow \frac{\frac{8-z}{2}}{2\sqrt{4-z}} = K$$

$$8 - z = 4K\sqrt{4-z}$$

Poichè il punto Z deve essere compreso fra O e V, la variabile z ha sempre valori compresi fra 0 e 4, quindi il radicando è sempre positivo e l'equazione può essere elevata al quadrato senza alcuna condizione restrittiva.

Si ha

$$64 - 16z + z^2 = 16K^2(4 - z)$$

cioè

$$\boxed{\begin{array}{c} z^2 - 16z(1-k^2) + 64(1-k^2) = 0 \\ 0 \le z < 4 \\ k > 0 \end{array}}$$

che è l'equazione parametrica da discutere.

Seguiamo il metodo grafico ponendo $y = z^2$. Avremo

$$\begin{cases} y = z^2 \\ y = 16z(1-k^2) - 64(1-k^2) \end{cases}$$

cioè una parabola (di cui dovremo considerare solo l'arco con ascisse contenute fra 0 e 4) e un fascio di rette con coefficiente angolare

$$m = 16(1-k^2)$$

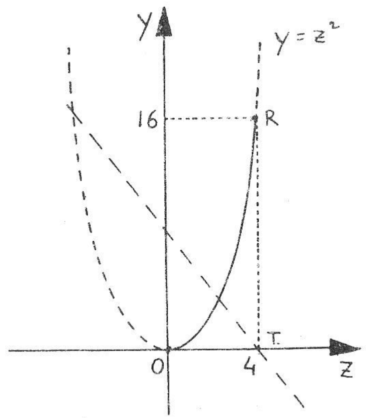
Determiniamo il centro del fascio di rette dando a k due valori arbitrari (0 e 1) e risolvendo il sistema costituito dalle due rette così ottenute

$$\begin{array}{l} k = 0 \longrightarrow \\ k = 1 \longrightarrow \end{array} \begin{cases} y = 16z - 64 \\ y = 0 \end{cases}$$

e perciò

$$T \equiv (4;0)$$






La retta generica del fascio avrà sempre una intersezione con l'arco OR di parabola per tutti i valori del coefficiente angolare compresi fra zero e meno infinito.

Si avrà dunque sempre una sola soluzione per

$$m \le 0$$

cioè

$$16(1-k^2) \le 0$$

cioè

$$\boxed{k \ge 1}$$

in quanto k può assumere solo valori positivi.