7.

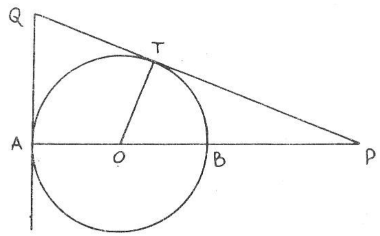
SETTEMBRE 1948
PRIMO PROBLEMA

DATA UNA CIRCONFERENZA DI DIAMETRO $AB = 2r$, DETERMINARE SUL PROLUNGAMENTO DI AB, OLTRE B, UN PUNTO P TALE CHE SI ABBIA

$$\overline{PT}^2 + \overline{TQ}^2 = K\,\overline{PA}^2$$

CON K NUMERO REALE POSITIVO, OVE T È IL PUNTO DI CONTATTO DI UNA DELLE TANGENTI CONDOTTE DA P ALLA CIRCONFERENZA E Q IL PUNTO DI INTERSEZIONE DI QUESTA TANGENTE CON QUELLA CONDOTTA IN A ALLA CIRCONFERENZA STESSA.

DISCUTERE IL PROBLEMA.



Poniamo

$$BP = x \qquad (\text{con } x \geq 0)$$

Il triangolo OTP è rettangolo e perciò

$$\overline{PT}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{OT}^2 = (r+x)^2 - r^2 = x(2r+x)$$

Il triangolo QAP è simile al triangolo OTP (hanno un angolo in comune e sono entrambi rettangoli) e quindi vale la proporzione

$$AP : AQ = TP : TO$$

$$AQ = \frac{AP \cdot TO}{TP} = \frac{(2r+x)\cdot r}{\sqrt{2rx+x^2}} = \frac{\sqrt{(2r+x)^2}\cdot r}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{2r+x}} = \frac{\sqrt{2r+x}\cdot r}{\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{r\sqrt{2rx+x^2}}{x}$$

Ma è

$$AQ = QT$$

e allora

$$\overline{QT}^2 = \frac{r^2(2rx+x^2)}{x^2} = \frac{r^2(2r+x)}{x}$$

$$\overline{PA}^2 = (2r+x)^2$$

Imponendo la relazione fornita dal problema, si ottiene

$$x(2r+x) + \frac{r^2(2r+x)}{x} = K(2r+x)^2$$

Dividiamo i due membri per $2r+x$ (essendo senz'altro $x \neq -2r$)

$$x + \frac{r^2}{x} = K(2r+x)$$

Eliminiamo il denominatore (con la condizione suppletiva $x \neq 0$). Si ha

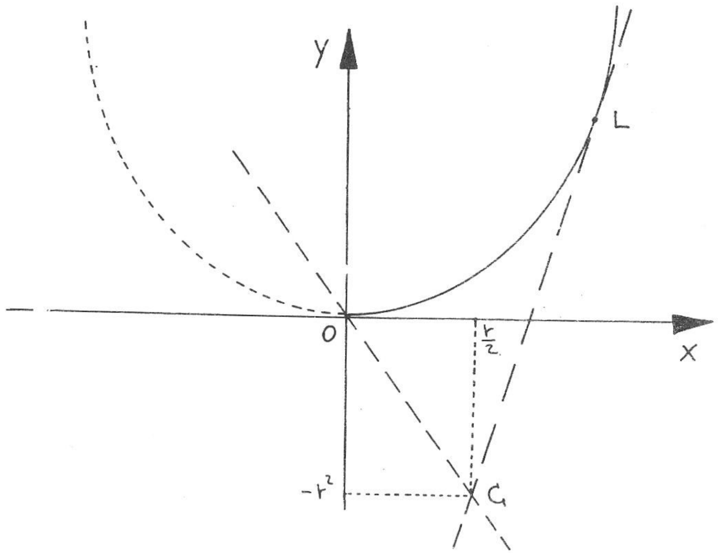
$$\boxed{\begin{array}{l} x^2(K-1) + 2Krx - r^2 = 0 \\ x > 0 \qquad K > 0 \end{array}}$$

che è l'equazione parametrica da discutere.

Eseguiamo la discussione grafica ponendo $x^2 = y$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y(K-1) + 2Krx - r^2 = 0 \end{cases}$$

Si ha una parabola con vertice nell'origine, asse verticale e di cui dovremo considerare solo i punti con ascissa positiva, e un fascio di rette di cui possiamo determinare il centro dando a K due valori arbitrari, e risolvendo il sistema delle due rette così ottenute.



Per $K = 0 \longrightarrow -y - r^2 = 0 \longrightarrow y = -r^2$

Per $K = 1 \longrightarrow 2rx - r^2 = 0 \longrightarrow x = \frac{r}{2}$

E quindi

$$G \equiv \left(\frac{r}{2} ; -r^2\right)$$

Il coefficiente angolare del fascio di rette è

$$\boxed{m = \frac{2Kr}{1-K}} \qquad (1)$$

Calcoliamo per quale valore di K la retta del fascio è tangente alla parabola

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y(K-1) + 2Krx - r^2 = 0 \end{cases} \longrightarrow x^2(K-1) + 2Krx - r^2 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \longrightarrow K^2r^2 + (K-1)r^2 = 0 \longrightarrow K^2 + K - 1 = 0$$

$$K = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Il valore negativo va scartato perchè deve essere $K > 0$. L'altro valore corrisponde dunque alla tangenza in L.

La retta del fascio è invece verticale quando $m = \infty$, cioè ricordando la (1), $K = 1$.

Poichè la retta del fascio ha due intersezioni con la parabola quando il suo coefficiente angolare è compreso fra la posizione verticale e la tangenza in L, il problema ammette due soluzioni quando

$$\boxed{\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq K < 1}$$

Calcoliamo ora per quale valore di K la retta del fascio passa per l'origine.

Imponiamo alla retta

$$y = \frac{2Kr}{1-K}x + \frac{r^2}{K-1}$$

di passare per il punto $(0;0)$. Si ottiene

$$0 = \frac{r^2}{K-1}$$

cioè

$$K - 1 = \infty$$

$$K = \infty$$

La retta del fascio ha una sola intersezione con la parabola se il suo coefficiente angolare varia fra la posizione verticale $(K=1)$ e la posizione in cui passa per l'origine $(K=\infty)$.

Quindi il problema ammette una sola soluzione quando

$$\boxed{K \geqslant 1}$$