

10.

1949: SECONDO PROBLEMA

SIANO DATE, IN UN SISTEMA DI ASSI CARTESIANI ORTOGONALI, LE PARABOLE DI EQUAZIONI

$$y = x^2 - 2x \quad y = 4x - x^2$$

CONSIDERATE LE RETTE PARALLELE AGLI ASSI DI EQUAZIONE $x=2$, $y=b$ DETERMINARE a, b IN MODO CHE RISULTINO MASSIMI I SEGMENTI MN , PQ DI TALI RETTE APPARTENENTI ALLA REGIONE COMUNE ALLE DUE PARABOLE, E AVENTI ESTREMI N, Q SULLA PRIMA ED M, P SULLA SECONDA PARABOLA.

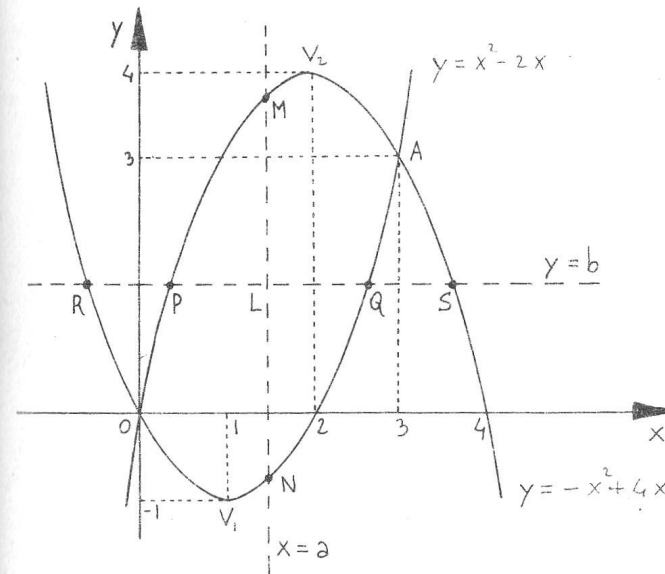
DETERMINARE INOLTRE L'AREA DI TALE REGIONE.

PARTE FACOLTATIVA:

DENOTATI CON R, S GLI ULTERIORI PUNTI DI INTERSEZIONE DELLA RETTA PQ CON LA PRIMA E CON LA SECONDA PARABOLA, DIMOSTRARE CHE LE TANGENTI AD ESSE NEI QUATTRO PUNTI R, P, Q, S DETERMINANO UN PARALLELOGRAMMO.

DIMOSTRARE INFINE CHE IL QUADRILATERO

MPNQ È UN ROMBO E CHE IL PUNTO COMUNE ALLE DIAGONALI DEL ROMBO COINCIDE COL PUNTO COMUNE ALLE DIAGONALI DEL PARALLELOGRAMMO.



Per la parabola $y = x^2 - 2x$ si ha $V_1 = (1; -1)$ mentre per l'altra è $V_2 = (2; 4)$.
Risolvendo il sistema fra le due equazioni si trovano le coordinate dei due punti comuni

$$O \equiv (0; 0)$$

$$A \equiv (3; 3)$$

La generica retta verticale di equazione $x=2$ taglia le parabole nei punti

$$\begin{cases} M \equiv (a ; -a^2 + 4a) \\ N \equiv (a ; a^2 - 2a) \end{cases}$$

$$\{ N \equiv (a \ ; \ a^2 - 2a) \}$$

Passiamo ora alla generica retta orizzontale di equazione $y = b$ - Esplicitiamo la x nelle equazioni delle due parabole -

Considerando la y come se fosse nota, si ha

$$x^2 - 2x - y = 0 \quad x = 1 \pm \sqrt{1+y} \begin{cases} 1 + \sqrt{1+y} \\ \text{ascissa di } Q \end{cases} \begin{cases} 1 - \sqrt{1+y} \\ \text{ascissa di } R \end{cases}$$

$$1 - \sqrt{1+y}$$

ascissa di R

$$x^2 - 4x + y = 0 \quad x = 2 \pm \sqrt{4-y} \quad \begin{cases} 2 + \sqrt{4-y} \\ \text{ascissa di S} \\ 2 - \sqrt{4-y} \\ \text{ascissa di P} \end{cases}$$

$$2 - \sqrt{4 - y}$$

ascissa di P

Quindi alremo

$$\begin{cases} P \equiv (2 - \sqrt{4-b} ; b) \\ Q \equiv (1 + \sqrt{1+b} ; b) \end{cases}$$

$$\{ Q \equiv (1 + \sqrt{1+b}; b) \}$$

Le lunghezze dei due segmenti MN e PG sono perciò

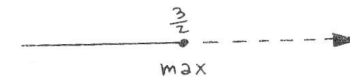
$$\begin{cases} MN = (-a^2 + 4a) - (a^2 - 2a) = -2a^2 + 6a \\ PQ = (1 + \sqrt{1+b}) - (2 - \sqrt{4-b}) = \sqrt{1+b} + \sqrt{4-b} - 1 \end{cases}$$

$$\{ PQ = (1 + \sqrt{1+b}) - (2 - \sqrt{4-b}) = \sqrt{1+b} + \sqrt{4-b} - 1$$

Per individuare il massimo di questi due segmenti, calcoliamo la derivata prima di queste due funzioni e studiamone il segno.

Per MH si ha

$$y' = -4x + 6$$



cioè un massimo per

$$a = \frac{3}{2}$$

Invece per PQ si ha

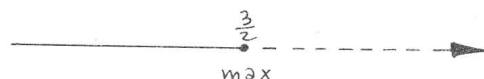
$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1+b}} + \frac{-1}{2\sqrt{4-b}}$$

$$y' = \frac{\sqrt{4-b} - \sqrt{1+b}}{2\sqrt{1+b}\sqrt{4-b}}$$

Dallo studio del segno del denominatore si

ricorda che b può assumere solo valori compresi fra -1 e 4 , e che in tale intervallo il denominatore è positivo.

Dallo studio del segno del numeratore si ricava invece



cioè si ha un massimo per

$$b = \frac{3}{2}$$

Passiamo ora al calcolo dell'area della regione piana racchiusa fra le due parabole.

$$S = \int_0^3 [(-x^2 + 4x) - (x^2 - 2x)] dx = \int_0^3 (-2x^2 + 6x) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^3 = 9$$

Rispondiamo infine alla parte facoltativa. Nel caso in cui $a = b = \frac{3}{2}$ le coordinate dei punti R, P, Q, S sono:

$$R \equiv \left(1 - \frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

$$P \equiv \left(2 - \frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

$$Q \equiv \left(1 + \frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

$$S \equiv \left(2 + \frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

Calcoliamo le derivate delle due parabole

$$\begin{cases} y' = 2x - 2 \\ y' = -2x + 4 \end{cases}$$

e perciò per la prima parabola:

$$f'(1 - \frac{\sqrt{10}}{2}) = -\sqrt{10} \rightarrow \text{coeff. ang. tangente in } R$$

$$f'(1 + \frac{\sqrt{10}}{2}) = \sqrt{10} \rightarrow \text{coeff. ang. tangente in } Q$$

mentre per la seconda parabola:

$$f'(2 - \frac{\sqrt{10}}{2}) = \sqrt{10} \rightarrow \text{coeff. ang. tangente in } P$$

$$f'(2 + \frac{\sqrt{10}}{2}) = -\sqrt{10} \rightarrow \text{coeff. ang. tangente in } S$$

Poiché i coefficienti angolari sono uguali a due a due, le quattro rette tangenti formano un parallelogramma.

Calcoliamo infine le coordinate dei punti M e N (sempre nel caso $a = b = \frac{3}{2}$). Si ha

$$M \equiv \left(\frac{3}{2}; \frac{15}{4}\right)$$

$$N \equiv \left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}\right)$$

Ebbene, poiché

$$L \equiv \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

è il punto medio di PQ e di MN , il quadrilatero $MQNP$ è un rombo.

Resta da dimostrare che anche il parallelogramma formato dalle quattro rette tangenti nei punti R, P, Q, S , ha le diagonali che si incontrano nel punto L .

Tralasciando i calcoli possiamo asserire che ciò è vero per ragioni di simmetria in quanto

$$RP = QS = 1$$

e i coefficienti angolari dei lati sono $\sqrt{10}$ e $-\sqrt{10}$.